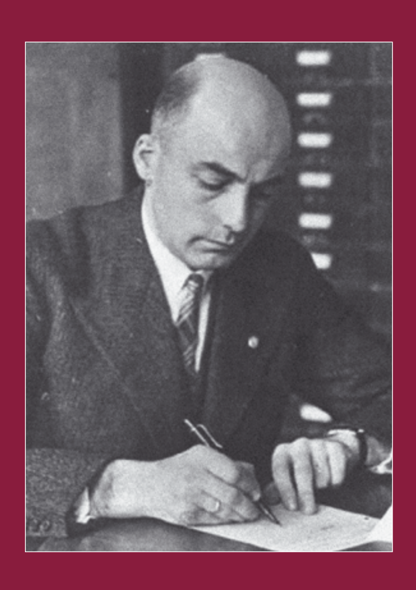
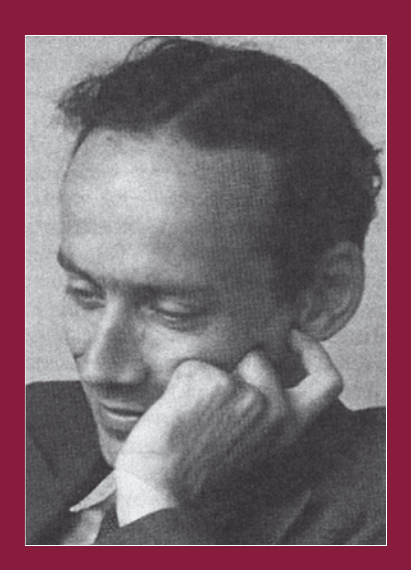
Emil Artin und Helmut Hasse
Die Korrespondenz 1923–1934

Herausgegeben und kommentiert von
Günther Frei und Peter Roquette
unter Mitwirkung von Franz Lemmermeyer





Emil Artin and Helmut Hasse
Their Correspondence 1923–1934

Edited and commented by
Günther Frei and Peter Roquette
with contributions of Franz Lemmermeyer

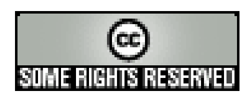
With an Introduction in English

Universitätsverlag Göttingen

Günther Frei und Peter Roquette

Emil Artin und Helmut Hasse

This work is licensed under the
Creative Commons License 2.0 “by-nd”,
allowing you to download, distribute and print the
document in a few copies for private or educational
use, given that the document stays unchanged
and the creator is mentioned.
You are not allowed to sell copies of the free version.



erschienen im Universitätsverlag Göttingen 2008

Emil Artin und Helmut Hasse

Die Korrespondenz 1923-1934

Herausgegeben und
kommentiert von
Günter Frei und Peter Roquette

unter Mitwirkung von
Franz Lemmermeyer



Universitätsverlag Göttingen
2008

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Kontakt/Contact

Peter Roquette
Universität Heidelberg
roquette@uni-hd.de

Dieses Buch ist auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den OPAC der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek (http://www.sub.uni-goettingen.de) erreichbar und darf gelesen, heruntergeladen sowie als Privatkopie ausgedruckt werden. Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

Titelabbildung: Artin 1930er Jahre
Foto N. Artin
Titelabbildung: Hasse 1930er Jahre
Aus: Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. Bd. 10

Umschlaggestaltung: Margo Bargheer

© 2008 Universitätsverlag Göttingen
http://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-940344-50-2

Übersicht

Teil I

Vorspann

1 Introduction

This book contains the full text of all letters from Emil Artin to Helmut Hasse, as they are preserved in the *Handschriftenabteilung* of the Göttingen University Library, written in the years 1923 – 1934. There are 49 such letters. Unfortunately, the corresponding letters from Hasse to Artin seem to be lost; Artin was known not to keep many of the letters and papers which he received. So we have supplemented Artin's letters by detailed comments where we discuss their mathematical content, comparing this with a description of the mathematical environment of Hasse and Artin, of the tendencies of the time, and of the relevant literature. In this way it will become possible for the reader to obtain some idea of the content of the corresponding letters from Hasse to Artin too.

Artin and Hasse were among those who shaped modern algebraic number theory. They were of the same age, born in the year 1898. They belonged to the post-war generation of mathematicians who started their university education towards the end of and immediately after World War I, Artin in Leipzig with Herglotz (after a brief interlude in Vienna 1917 with Furtwängler) and Hasse in Marburg with Hensel (after brief interludes in Kiel 1917 with Toeplitz, and in Göttingen 1918/19 with Hecke). They obtained their Ph.D. in the same year 1921, and their two dissertations were considered as ground breaking contributions to number theory. Artin's thesis contained the theory of hyperelliptic function fields over a finite field of constants, and he formulated the analogue of the Riemann hypothesis for those fields which was later proved by Hasse in the elliptic case and by A. Weil in the case of function fields of arbitrary genus. Hasse's thesis contained the Local-Global Principle for quadratic forms over the rationals which he later, in his *habilitation* thesis, generalized to quadratic forms over arbitrary number fields.

In Germany at that time, one had to pass one's „*Habilitation*" in order to qualify for the position of professor at university. Both Artin and Hasse did their *Habilitation* in short succession, Hasse in 1922 in Marburg and Artin in 1923 in Hamburg. We have already mentioned above that Hasse's *Habilitation* thesis contains the Local-Global Principle for quadratic forms over number fields. Artin's *Habilitation* thesis is his seminal paper on his new L-series, which led him, among other results, to his Reciprocity Law.

The mathematical careers of Artin and Hasse in the 1920s developed quickly and in remarkably parallel steps, from which one can conclude that they were considered by the mathematical community as leading scientists of equal, high standing. Let us explain:

In the fall of 1922 Hasse accepted the position of *Privatdozent* at the University of Kiel which had been offered to him by Toeplitz. Actually, Toeplitz originally wanted to get Artin for this position but the latter was not able to accept; in a letter dated February 27, 1922 Artin wrote to Toeplitz that he had already accepted a stipend, for the summer semester of 1922, from Courant in Göttingen.[1] At that time Artin was in Göttingen as a post-doc. But a little later, in October 1922, Artin accepted a position in Hamburg offered to him by Blaschke. And in 1923, after his *Habilitation*, he became *Privatdozent* at Hamburg University.

In 1923 there appeared the first joint paper of Artin and Hasse.

In 1925 Hasse accepted an offer of a position as full professor at the University in Halle. This time again, Toeplitz had recommended Artin for this position but, for reasons unknown to us, Artin had not been taken into consideration by the nomination committee in Halle.[2] Shortly afterwards, in early 1926, the University in Münster had to fill a vacancy of full professor in Mathematics, and the proposal of the Faculty was, first Hasse and secondly Artin. Since Hasse had just moved to Halle, the position was then offered to Artin who, however, declined since Hamburg matched the offer and he was promoted to full professor in Hamburg. Thus now Artin and Hasse were for a time the youngest Mathematics professors in Germany.

In 1928, the University of Breslau had to find a successor for the retiring Adolf Kneser (the father of Hellmut Kneser and grandfather of Martin Kneser). Like two years earlier in Münster, the Faculty in Breslau also proposed the names of both Artin and Hasse, but this time in the reverse order: first Artin and then Hasse. Neither of the two accepted; Artin remained in Hamburg and Hasse in Halle. In the same year Artin got another offer, this time from the University of Leipzig. Again he declined. At the same time A. Fraenkel, who was in Kiel at that time, tried to get Hasse back from Halle to Kiel. From the Fraenkel–Hasse correspondence one can see that Fraenkel had tried everything in his power to have the ministry of education extend an offer to Hasse for a position in Kiel. However the offer never came since the ministry was of the opinion that, instead, Hasse should be offered the position in Marburg after the retirement of Kurt Hensel, Hasse's academic teacher. Indeed in 1930, Hasse moved from Halle to Marburg. In the same

[1]This has been reported in the article [Rei07] by Karin Reich. In that article one can find more personal information about Artin.

[2]Among the Hilbert papers kept in Göttingen we have found the draft of a letter of Hilbert to the Prussian ministry of education, written in March, 1925, where he recommended, among others, Hasse for the position in Halle but did not mention Artin.

year, Artin obtained an offer from the ETH in Zürich as the successor of Hermann Weyl who had moved to Göttingen[3]. Again, Artin decided to stay in Hamburg.

We have said above that Artin and Hasse were considered by the mathematical community as of equal standing, but this does not mean that they worked closely together, not even that their mathematical interests were identical. We see from their correspondence that they freely exchanged mathematical ideas and informed each other about recent results, mostly about class field theory and Reciprocity Laws which were the prominent topics of their discussion. But at the same time each of them also followed other lines of interest which are not mentioned in their letters, and each kept his own distinctive mathematical style.

Let us point out that both Artin and Hasse belonged to what Yandell[4] has called the „Honors Class", in the sense that each of them had solved one of the famous problems which Hilbert had presented in the year 1900 in his Paris lecture.

Artin solved the 17th Hilbert problem which reads:

> …ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.
>
> *…whether every definite form may be expressed as a quotient of sums of squares of forms.*

Artin obtained the positive answer to this question through the theory of formally real fields which he had developed jointly with Otto Schreier.[5]

Hasse had worked on the 11th Hilbert Problem:

> …Aufgabe, eine quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlencoeffizienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Coefficienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.
>
> *…to solve a given quadratic equation with algebraic numerical coefficients in any number of variables by integral or fractional numbers belonging to the algebraic realm of rationality determined by the coefficients.*

---

[3]See [FS92].
[4]See [Yan02].
[5]See [Art27b].

Hasse obtained a criterion of solvability by means of his Local-Global-Principle which permitted the reduction of the question to the local case where it could be explicitly discussed, thanks to Hensel's results about the p-adics.[6]

There is another Hilbert problem whose solution has to be credited jointly to both Artin and Hasse, namely the 9th problem which concerns class field theory and reciprocity. The problem reads:

> Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reciprocitätsgesetz der ℓ-ten Potenzreste bewiesen werden, wenn ℓ eine ungerade Primzahl bedeutet und ferner, wenn ℓ eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, wie die wesentlichen Hülfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der ℓ ten Einheitswurzeln[7] und meine Theorie[8] des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.
>
> *For any number field the law of reciprocity is to be proved for the ℓ-th power residues, when ℓ denotes an odd prime, and further when ℓ is a power of* 2 *or a power of an odd prime. The law, as well as the means essential to its proof, will, I believe, result from suitably generalizing the theory of the field of ℓ-th roots of unity which I developed, and my theory of relatively quadratic fields.*

The first part, for an odd prime ℓ, had been solved by Furtwängler[9] and also by Takagi.[10] But for the case of higher prime powers there was no general approach in sight before Artin's Reciprocity Law had opened the way. The implementation of Artin's result for the deduction of explicit formulas for the Reciprocity Laws, in case of power residues for an arbitrary exponent, is due to Hasse; it is published finally in the second part of his *Klassenkörperbericht.* The Artin–Hasse correspondence documents that and how they cooperated to achieve this aim. The „*suitable generalization*" of Hilbert's theory of relatively quadratic fields has turned out to be precisely Takagi's class field theory, crowned with Artin's Reciprocity Law.

* * * * *

[6] See [Has24a]. We also refer to [Fre01a] for a detailed description of how Hasse was led to the Local-Global Principle.

[7] In Hilbert's Zahlbericht [Hil97] Part 5.

[8] In [Hil99] and [Hil02].

[9] See the literature mentioned in our *Literaturverzeichnis.*

[10] In his second paper [Tak22].

We do not know when Artin and Hasse met for the first time. It may have been at the annual meeting of the German Mathematical Society (DMV) in September 1922 in Leipzig which both attended. Artin presented a talk on a problem from analysis and geometry which had arisen in a correspondence with his academic teacher Herglotz in Leipzig. Hasse did not give a talk, he just accompanied his academic teacher Hensel to the meeting.

Artin and Hasse certainly met several times during the winter semester 1922/23. As said above, at that time Artin was in Hamburg and Hasse was in Kiel. The towns of Hamburg and Kiel in northern Germany are not too far apart from each other, about 100 km. The mathematicians in Kiel often went to the colloquium in Hamburg which was led by Blaschke and Hecke. On those occasions Hasse and Artin met and there developed a close mutual exchange of mathematical ideas. Artin learned from Hasse how the p-adic methods of Hensel could be successfully applied to number theoretical problems, and Hasse was informed by Artin about the two great papers by Takagi on class field theory and on Reciprocity Laws.

For both Artin and Hasse the encounter with Takagi's papers turned out to be an important stimulus for their future work. They immediately realized the enormous potential of the main discovery of Takagi, namely that every abelian extension of a number field is a class field. In fact their whole correspondence, which centers around class field theory and reciprocity, can be regarded as reflecting their critical preoccupation with Takagi's papers, and their attempt to further simplify, streamline and complete class field theory and to put it to work in number theory.

In the Takagi biography by Honda [Hon76] the story is told how Artin and Hasse got hold of a copy of Takagi's papers. Honda reports that Takagi had heard about a brilliant young mathematician in Göttingen with the name of Siegel. Subsequently Takagi sent to Siegel a reprint of his first great paper [Tak20] on class field theory. And Honda continues:

> *One day, when Siegel was talking with Artin about number fields, he took out the reprint which Takagi had sent to him, and persuaded Artin to read it. This was at the beginning of 1922. Artin borrowed the reprint from Siegel. He spent three weeks in reading it through. Later, in 1962, he told the present author* [Honda]*: I felt strong admiration for it. It was not difficult to understand, since it was written very clearly.*

Somewhat later in Hamburg, Artin showed Takagi's papers to Hasse. This incident was recalled when Honda interviewed Hasse:

> *In 1923 Artin urged him* [Hasse] *to read the two papers of Takagi. Reading the first paper, Hasse was deeply fascinated by its generality, its clearness, its effective methods, and its wonderful results. He was given an even stronger inspiration by the second paper.*

Takagi's second paper [Tak22] deals with the Reciprocity Law for power residues of prime exponent.

Thus, by 1923 there were three young mathematicians in Germany who had read and appreciated Takagi's papers on class field theory: Siegel, Artin and Hasse. Each of them immediately started to integrate Takagi's results into his work with striking results, and in this way these results became quickly known among mathematicians – although 3 years prior to this Takagi had not met with any visible response when he presented his paper at the International Mathematical Congress in Straßburg where German mathematicians had not been admitted.

As to Artin, already his 1923 paper on Galois L-series relied heavily on Takagi. Although his main idea, namely the construction of L-series for Galois extensions, was evidently inspired by the work of Hecke[11], there was one important point where Artin had to use Takagi. This was when Artin tried to identify his new L-series in the abelian case with the classical L-series of Dirichlet and Weber[12]. In order to do this, he had to use Takagi's class field theory which implied that for any abelian extension of number fields there exists an isomorphism of the corresponding ray class group of the base field with the Galois group. But this was not quite sufficient for Artin, for he needed the fact that there is a *canonical* isomorphism given by associating to every unramified prime of the base field its Frobenius automorphism in the Galois group. Artin could not yet prove this in 1923. Only in the special case of a cyclic extension of prime degree (and also of an extension composed of these) could he extract this from Takagi's papers. But that was only temporary. Four years later in 1927, Artin could prove his general Reciprocity Theorem for arbitrary abelian extensions, thus putting his new L-series on a solid base and at the same time completing Takagi's class field theory. This important result was hailed by Takagi as

> *one of the most beautiful results of algebraic number theory.*

---

[11] On the influence of Hecke on Artin's work see [Fre01b].

[12] It was Heinrich Weber who had introduced and studied the L-series for congruence class groups in arbitrary number fields, in generalization of Dirichlet's L-series in the case of $\mathbb{Q}$. See [Fre89].

In fact, Artin's Reciprocity Theorem completely changed our understanding of class field theory which today is seen as the key to much of algebraic number theory. In the Artin–Hasse letters we can observe the exciting story of its discovery, and how it was put to work immediately.

As to Hasse, he realized that Takagi's papers could be put to use in the study of explicit Reciprocity Laws which was his main interest in those days. Already on April 23, 1923 he reported to his academic teacher Hensel:

> ... Außerdem habe ich gerade die Ausarbeitung eines Kollegs über die Klassenkörpertheorie von Takagi vor, die ich mit unseren Methoden sehr schön einfach darstellen kann.
>
> *... Furthermore, I am just preparing the manuscript for a course on Takagi's class field theory, which I can develop quite nicely with our methods.*

Thus Hasse did what mathematicians often do, namely he gave a lecture course since he wished to learn more about the topic. When he mentions „our methods" then he means the p-adic methods of Hensel which he, Hasse, was endeavoring to put into their proper place in algebraic number theory. At the time Hasse was mainly concerned with the theory of norm residues which Hensel had started to investigate with p-adic methods. Norm residues play an important role in class field theory, and so it seems to us that Hasse, in this letter to Hensel, meant that he can develop the theory of norm residues „quite nicely with our methods". This is evident from Hasse's papers from those years, among them the joint paper of Artin and Hasse which is discussed in the first 5 letters of their correspondence. (Later in the early 1930s, Hasse was indeed able to develop class field theory with essential use of p-adic methods but we have no indication whether already at the time of this letter, in 1923, he had definite ideas on how to achieve this.)

Hasse delivered his lecture course on Takagi's class field theory in Kiel in the summer semester 1924. The notes for this course were composed by Reinhold Baer.[13] They provided the basis for Hasse's famous report on Takagi's class field theory which he had been asked to present at the DMV meeting in Danzig in September 1925, and whose Part I went into print in 1926 [14]. This article became known as „*Klassenkörperbericht*" and was regarded in

[13]Later in 1928, Hasse brought Baer as an assistant professor to Halle. There developed a lifelong friendship between the two and their families, surviving the dark years of the Nazi period in Germany when Baer had to emigrate from Germany.

[14]See [Has26a].

line with Hilbert's „*Zahlbericht*" of 1897. Hasse's report was not meant to replace the *Zahlbericht*, as is sometimes claimed. Hasse's aim was to *amplify* the latter by a survey of Takagi's class field theory; he wished to give a useful guide for those who wanted to study the details, so as to avoid unnecessary detours.

Let us cite a postcard from Bessel-Hagen to Hilbert, dated August 17, 1926, as an example of the reception of the *Klassenkörperbericht*:

> ... In dem vor wenigen Tagen erschienenen Hefte des Jahresberichtes der D.M.V. befindet sich ein Bericht von Hasse über die Klassenkörpertheorie, der so vorzüglich klar geschrieben ist und den ganzen Aufbau der Theorie mit einem nur die Hauptgedanken enthaltenden Skelett der Beweise so wundervoll herausschält, daß die Lektüre ein wahres Vergnügen ist und für das Eindringen in die Theorie jetzt wirklich alle Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind ...
>
> *... A few days ago there appeared the latest issue of the Jahresbericht D.M.V. which contains a report by Hasse on class field theory, and which is written in excellent clarity. The design of the whole theory is wonderfully uncovered by presenting the main ideas only while the proofs are reduced to their skeletons. Reading this article is a real pleasure; now all obstacles are eliminated which may have hampered access to the theory...*

The impact of Hasse's report was remarkable. Since the proofs in the report were „*reduced to their skeletons*" (as Bessel-Hagen wrote), Hasse added an additional Part Ia which, responding to demand, contained full proofs. Now a whole generation of mathematicians started to learn class field theory through Hasse's *Klassenkörperbericht*. Their names include Claude Chevalley, Jacques Herbrand, Max Deuring, Arnold Scholz, Olga Taussky, Shokichi Iyanaga, Max Zorn, perhaps Hermann Weyl, and many more, not to forget Emmy Noether. Whereas formerly class field theory was the topic of a select few, Hasse's report brought about its „popularization" among mathematicians. This had the effect that during the next years the proofs of class field theory quickly became streamlined, simplified and shortened. Artin and Hasse took active part in this development; their correspondence provides ample witness for this. Within a decade, and finally with Chevalley's idea to use ideles instead of ideals, class field theory got a new look which was considered more natural.

Subsequent to Parts I and Ia of the *Klassenkörperbericht*, there followed Part II which contained the derivation of explicit Reciprocity Laws on the

basis of Takagi's class field theory. Hasse had almost completed Part II when he obtained the information about the successful proof of Artin's Reciprocity Law. This caused Hasse to completely rewrite Part II where now he included Artin's result and used it as a basis to derive all known Reciprocity Laws for power residues – in the spirit of Hilbert's 11th problem for arbitrary exponents. The story of this is mirrored in the Artin – Hasse correspondence.

* * * * *

The progress of work in Mathematics[15] depends, as we all know, on the facilities for communication between mathematicians. Publication of papers is one way of communication but this is usually the final step only; most mathematicians prefer some amount of communication along the way, during work in progress.

Hasse's main medium of communication was letters. Hasse was an ardent letter writer. The Artin file is only one of many others in the Hasse legacy at the *Handschriftenabteilung* in Göttingen. Besides numerous manuscripts and notes there are more than 1600 letter files in the Hasse legacy. Of course, not all of them are of the same level of interest for the mathematician as is the Artin file, or the Noether file which we edited some time ago. But many are quite interesting, and in the future we intend to edit more from the Hasse legacy. Unfortunately Hasse's own letters, when handwritten, are mostly lost whereas the majority of preserved letters are from his correspondence partners and addressed to him. But as in the case of Artin's or Noether's letters, by carefully reading the replies and considering the mathematical environment of Hasse at the time, one may be able to get a fair picture of how he worked, of his main ideas, aims and hopes, of his relation to colleagues and friends, and about his personality. His letters contain not only information about his results; he freely and openly talked about his ideas and the attempts to realize them, and conversely he asked for the opinions and advice of his correspondence partners. There was no hiding information in the back, and he never brought up questions of priority. We can observe all this in his correspondence with Artin too.

Artin, on the other hand, was not as fond of letter writing; his main medium of communication was teaching and conversation: in groups, seminars and in smaller circles. We have many statements of people near to him describing his unpretentious way of communicating with everybody, demanding quick grasp of the essentials but never tired of explaining the necessary. He

[15] and not only in Mathematics

was open to all kind of suggestions, and distributed joyfully what he knew. He liked to teach, also to young students, and his excellent lectures, always well prepared but without written notes, were hailed for their clarity and beauty. When he wrote letters then most of the time it was in response to a letter received, and not always quickly. This we also observe here. Several times he apologizes to Hasse for his delay in answering, pretending other activities as the cause, but on the whole giving the impression that it took him some effort to take up the pen and write.

In this situation it is quite interesting to read the letters between these two mathematicians which were quite different in temperament, different in mathematical style and different in their attitude towards letter writing. The fact that such an extensive correspondence had come about, sometimes with very high exchange frequency, is due to the fact that they had something to say to each other, upon a subject by which they were both fascinated. We may add that both shared similar ideas of mathematical beauty which they strove to realize in their work as much as possible.

In our time there are numerous workshops, meetings, conferences, symposia, colloquia etc. where people can exchange their knowledge and opinions, the year round all over the globe. And those who cannot attend may use e-mail. It is lucky that Artin and Hasse lived at a time when letter writing was still widely in use, and also that at least one of them, Hasse, had been able to save his correspondence files. This provides us with first hand knowledge about mathematical developments which could have been gathered only partially from the published papers.

* * * * *

The exchange of letters between Artin and Hasse did not proceed evenly; sometimes the letters followed each other in short succession while sometimes there were years with no letters.

The first 5 letters were written within a week, more precisely between July 7 and 12, 1923. Some time earlier Hasse had visited Hamburg and given a colloquium talk on his new results about the explicit Reciprocity Laws; this was on March 1, 1923. On that occasion Artin and Hasse got into a discussion about the so-called 2nd supplement to the Law of Reciprocity, in case of a prime exponent ℓ, and they had agreed to continue this discussion when Artin would visit Hasse in Kiel. Artin's letters were meant to prepare this visit which took place on the weekend July 14-16, 1923. As a result there

emerged their first joint paper, which appeared 1925 in Crelle's Journal.[16]

There followed a period of 2 years without any letter exchanged. This does not mean that there was no communication between Artin and Hasse. On the contrary: Hasse visited frequently the Hamburg seminar and so there were many occasions for discussion and exchange of ideas, on reciprocity and other topics. In Hasse's mathematical diary he refers several times to discussions with Artin.

This period came to an end when Hasse got a professorship in Halle, which was in the summer semester 1925. In the fall of that year Artin wrote again, telling that he had returned to number theory from what he called „going astray on topological roads“ (*auf topologischen Abwegen*). Apparently Artin wished to take up again his discussion with Hasse on reciprocity, looking for ideas towards a proof of his general Reciprocity Law which, as we have mentioned above already, he had formulated already in 1923 in his L-series paper.

The breakthrough came in 1927. Artin proudly informed Hasse on July 17, that recently in a lecture course he had given in Hamburg, his efforts had been successful and he had obtained a proof. Hasse was excited and replied immediately, and next day already Artin sent him the full proof. There followed a period of intense mutual correspondence. Within three weeks Artin wrote 7 letters to Hasse and we may safely assume that there were at least as many letters from Hasse to Artin. They discussed the implications of Artin's Reciprocity Law, in particular the principal ideal theorem, the class field tower problem and the possible generalization of class field theory from the abelian case to arbitrary Galois extensions. Hasse was particularly interested in how to use Artin's Reciprocity Law for the derivation of explicit Reciprocity Laws for power residues. Now, thanks to Artin's result, they could be obtained for an arbitrary exponent, just as Hilbert had envisaged in his Paris lecture.

Their correspondence continued at a little slower pace, but still on a high mathematical level, until November 1932. For the reader of these letters there unfolds the exciting story of the emergence of new insights into class field theory, including the Local-Global-Principle for simple algebras and its use for a new proof of Artin's Reciprocity Law. We see how Hasse, following a question of Artin, discovered local class field theory, first as a consequence of Artin's global Reciprocity Law but later, on the suggestion of Emmy Noether,

[16] The chief editor of Crelle's Journal at that time was Hensel but, from 1923 on, Hasse helped him considerably and did much of the editorial work. It took some years, until 1926, before Hasse was officially named as one of the editors. See [Roh98], [Fre98a].

on a purely local basis. Their attempts to generalize class field theory to the case of non-abelian Galois extensions failed but this led to the beginning of algebraic cohomology which later culminated in the Artin-Tate version of class field theory.

In addition, we see the emergence of Part II of Hasse's *Klassenkörperbericht* developing all known reciprocity formulas and much more, based on Artin's Reciprocity Law. This book constitutes a monumental work marking the completion of an era having its roots deep in the past, back to the early 19th century. When Artin got the proof sheets he replied to Hasse that he had read it „with great pleasure" (*mit großem Vergnügen*) – and he was promptly inspired to look for explicit formulas for the local contributions of his L-series at the ramified primes; this he had avoided in his first L-series paper and it did not appear in Hasse's book. From this emerged Artin's famous paper on conductors and the structure of the discriminant of Galois extensions – in close contact with Hasse whose contribution led to what was later called the Hasse-Arf theorem.

Hecke wrote later about the *Klassenkörperbericht*, in a letter to Hasse dated November 16, 1938:

> Ich habe kürzlich wieder einmal eingehend Ihren Klassenkörper-Bericht studieren müssen und bin wieder ganz von Bewunderung erfüllt, wie Sie diesen riesigen Stoff gemeistert und gestaltet haben.
>
> *Lately I have had occasion to look again into details of your class field report, and again I am filled with admiration how you have mastered and structured this enormous amount of material.*

In November 1932, Hasse gave a colloquium talk in Kiel on the number of solutions of binary diophantine congruences, in generalization of results of Davenport and Mordell. Immediately after this he followed an invitation by Artin to Hamburg and gave a talk at Artin's seminar on the same topic. At this occasion Artin reminded him[17] that the problem was essentially equivalent to the Riemann hypothesis for hyperelliptic function fields over finite fields which Artin had stated in his Ph. D. thesis. Thereafter it took Hasse less than three months to arrive at the proof in the case of elliptic fields. This happened at the end of February 1933.[18] We are inclined to

[17] We know this from a letter of Hasse to Davenport written right after Hasse's visit to Hamburg.

[18] Again, we know this from letters of Hasse to Davenport and Mordell. The whole development is described in a series of papers „*On the Riemann hypothesis in characteristic p*" of which 3 Parts have appeared already [Roq02b, Roq04, Roq06].

believe that Hasse had informed Artin about this result since, after all, it had been Artin who had put Hasse on the track with the zeta function for function fields. However, we have found no letter from Artin to Hasse in the year 1933.

But one year later, on January 17, 1934 Artin invited Hasse again to Hamburg and wrote:

> Sie könnten sprechen worüber Sie Lust haben. Vielleicht die schönen Ergebnisse über die Riemannsche Vermutung? Sie sind doch das schönste, was seit Jahrzehnten gemacht worden ist. Meine Hörer würde das sehr interessieren.
>
> *You can talk about anything you like. Perhaps the beautiful results on the Riemann hypothesis? These belong to the most beautiful things which have been done in decades. The people in my seminar would be very interested in this.*

Of course, Artin did not mean the classical Riemann hypothesis but its analogue for function fields over finite base fields. In a follow-up letter a few days later Artin wrote:

> Ich bin ganz begeistert von Ihren neuen Ergebnissen und ungeheuer gespannt.
>
> *I am thrilled about your new results and I am immensely curious about them.*

Hasse accepted Artin's invitation and gave a compact lecture course of one week in Hamburg, consisting of 4 two-hour lectures, between February 5 and 9, 1934. He reported about his new method of constructing the endomorphism ring of an elliptic function field in characteristic p, and how to prove the Riemann hypothesis by studying the Frobenius operator. Thereafter Hasse wrote to Davenport:

> *Hamburg was a full success from every point of view ... From what Artin and I found when considering the possibilities of generalisation to higher genus, it becomes a matter of patience to do this.*

But it turned out that it took more than patience to arrive at a proof of the Riemann hypothesis for function fields of arbitrary genus.

We see that Artin and Hasse at that time still vividly discussed mathematical problems of common interest. However, there were no more letters exchanged. We do not know the reason for the ensuing silence between the two. One explanation which offers itself is the deterioration of the political situation in Germany which had consequences also in academic life. Artin seemed to be worried because his wife Natascha was of Jewish origin (her father was Jewish) and she had to suffer the harassments of the time. Hasse was deeply concerned about the enforced exodus of so many mathematicians. He considered this as a fatal loss for Germany and did what he could do to act against this, but without much success. When in 1937 Hasse heard about plans of Artin to emigrate, he tried, on the one hand to obtain better and safe working conditions for Artin from the ministry of education, and on the other hand to persuade Artin to stay in Germany. He could not succeed under the circumstances and the Artins left Germany in 1937.[19]

* * *

As said above, we have supplemented Artin's letters by detailed comments. We have given these comments in the language of Artin and Hasse, i.e., in German. Short comments are added in the form of footnotes to the respective letter. More detailed comments are to be found immediately after the letter with specific headings, which also show up in the table of contents.

Most of the letters deal with class field theory and with Reciprocity Laws for power residues. In order to understand the letters it is necessary to recall the state of the art at the time, and the terminology which was used by Artin and Hasse. Therefore we have included in the *Vorspann* two explanatory sections, one for the Reciprocity Laws of power residues (section 4) and the other for class field theory (section 5).

Also, we have included in the *Vorspann* two documents which contain personal recollections to Artin and to Hasse respectively. For Artin, we have chosen the obituary written by Hans Zassenhaus, Artin's doctoral student in Hamburg (section 2). For Hasse, there is in section 3 a report about the early work on the present edition, and this contains personal recollections to Hasse. We believe that those two sections may help the reader to obtain a lively picture of the personalities of Artin and of Hasse whose mathematical ideas he will find in their letters.

[19] For more detailed descriptions of the situation of Artin in those years in Hamburg we refer to, e.g., [Rei06, Rei07, Wuß06]. The situation in Göttingen after Hasse had moved there has been discussed in, e.g., [Fre77, Sch87, Seg03].

The *Zeittafel* in section 6 may be useful to the reader, as an overview of the development of ideas and results which are discussed in the letters.

ACKNOWLEDGEMENT: As reported in section 3, the present book is the outcome of many years' work (with interruptions), based on the first preliminary version back in 1981 [Fre81a]. We would like to thank all people who have given us their advice and encouragement during the writing of the book, and who have helped us with critical comments. Above all we would like to mention *Franz Lemmermeyer* who has followed the preliminary versions of the book and has lent us his invaluable advice and detailed historical knowledge in order to straighten up many important points. Patrick Morton has read the introduction and been of help to streamline our English. Last but not least we are glad that the *Deutsche Forschungsgemeinschaft* and the *Möllgaard-Stiftung* have provided financial support.

We hope that the reader will enjoy the book as we have enjoyed our work. Nevertheless, as in any work of this kind and size, there may have occurred errors, misprints, omissions or other shortcomings. Any comment or correction will be welcomed.

Günther Frei

Peter Roquette

2 Emil Artin, his life and his work

by Hans Zassenhaus; reprinted from the Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 5, 1964 [Zas64].

Emil Artin died from a heartfailure on December 20, 1962. The mathematical community has lost one of its most distinguished members.

Artin was born on March 3, 1898 as son of an art dealer in Vienna. After his father had died and his mother had remarried she went with her family to Reichenberg in Bohemia where Artin, except for a year's stay in France, attended high school and passed the high school examination in Summer 1916. Shortly after his matriculation at Vienna University he was draughted by the Army with which he served until the end of the first world war. After the war he continued his studies at the University of Leipzig where he studied mathematics, mainly under G. Herglotz, and chemistry. In June 1921, at the age of 23, he was promoted Ph. D. Then he went for a year to Göttingen and afterwards to Hamburg University which had been founded after the war. In July 1923 Artin obtained the Venia legendi for mathematics and was appointed Extraordinarius Eastern 1925, Ordinarius in Fall 1926, at the age of 28. For eleven years Artin together with Hecke and Blaschke directed the activities of the Mathematical Seminar of Hamburg University.

In Fall 1937 Artin emigrated with his wife and family to the United States of America where he was teaching for a year at Notre Dame University, thereafter from 1938 until 1946 at Indiana University, Bloomington, and finally from 1946 until 1958 at Princeton University. Since Fall 1958, he was teaching again at Hamburg University where his life suddenly came to an end while he was still active.

He was honored by many scientific societies. A 1962 honorary doctor's degree of the University of Clermont-Ferrant at the occasion of the tercentenary of Blaise Pascal's death was the last honor bestowed on Artin during his lifetime.

In my memory Artin stands out as a great teacher. Among his pupils were mathematicians from many countries who later became leaders in research and teaching as Max Zorn, Chevalley, Iyanaga, Whaples, Thrall, Serge Lang, John Tate and Tim O'Meara.

A teacher in our field can work through many channels of communication: by formal lectures, by research papers, by textbooks, by private conversation, and by generating an infectious spirit of doing research in a large group of

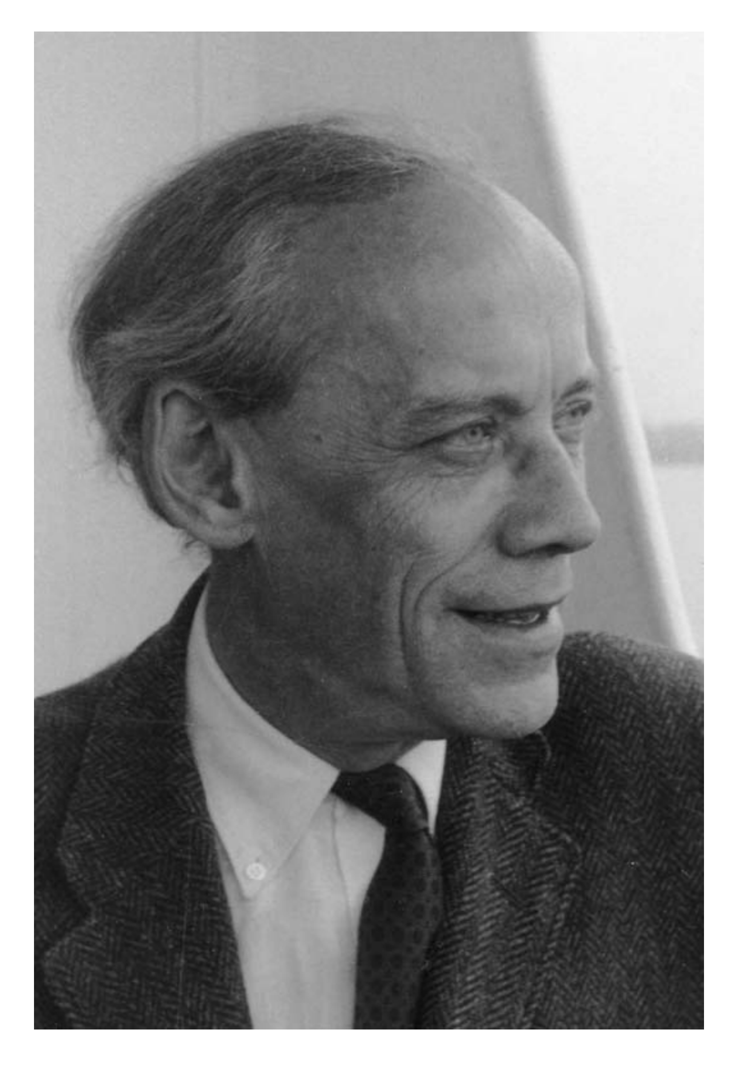


Abbildung 1: Artin: 1960er Jahre

(Foto: P. Halmos)

students, working through a few. Artin was greatest in teaching a graduate class, it was then when he was a professor of mathematics in the most real sense of the word. The influence of Artin's person on the hearer was so powerful and in my memory still is so powerful that it takes a conscious effort to analyze the components of his success both as to the objective as well as to the means.

The saying goes that if Artin said that something was trivial it really was trivial. He coined the expression „enormously simple“ which coming from Artin in reality meant the outcome of a life of commitment to working out the truth by a highly organized and restless intellect. Indeed, the effect of listening to a lecture of Artin was to believe the subject on which he lectured was enormously simple, but upon subsequent reflection it became clear that the simplicity was the result of hard work and a life of dedication to pure mathematics.

The intensity of Artin's desire for simplification and uniting various currents of research in algebra and number theory into one mighty stream was so enormous that it ultimately found its expression also in printed form. There are many lecture notes and manuscripts extant through which Artin's influence on his pupils was extended to a wider audience and which, because of their immediacy, freshness, and clarity of presentation deserve separate publication for the benefit of posterity. Besides this extension of Artin's graduate lectures he influenced decisively the basic organization of the books of van der Waerden on Algebra, Zassenhaus on group theory and Tim O'Meara on quadratic forms, moreover Artin's spirit of abstraction had an admittedly strong influence on the Bourbakists.

I was a witness how Artin gradually developed his best known simplification, his proof of the main theorem of Galois theory.

The situation in the thirties was determined by the existence of an already well developed algebraic theory that was initiated by one of the most fiery spirits that ever invented mathematics, the spirit of E. Galois.

But this state of affairs did not satisfy Artin. He took offense of the central role played by the theorem of the existence of a primitive element for finite separable extensions. This statement has no direct relation to the object of the theory which is to investigate the group of an equation, but it was needed at the time as a prerequisite for the proof of the main theorem. I remember many searching conversations of the years 1936 and 1937 prior to his departure to the United States when he discussed with me various possibilities to overcome the obstacle and rejected all sorts of compromises

that I brought under consideration.

After having ploughed the field for at least a dozen years in as many courses Artin did two things. Firstly he restated the main theorem in the following form:

Given a field E and a finite group G of automorphisms of E, then the elements of E that are fixed by every element of G form a subfield F of E with the property that every automorphism of E over F belongs to G.

Secondly he proved the theorem by an ingenious application of methods of representation theory (see Artin's *Notre Dame Book on Galois theory*) thus initiating the fusion of structural methods and methods of representation theory in modern algebra. In this way Artin transformed the esoteric remarks of a few experts in the then remote field of representation theory into a cornerstone of the whole theory. Artin at several occasions himself analyzed the known methods of communication of scientific ideas and results. Following now already classical concepts of experimental psychology he distinguished between visual, acoustic and kinesthetic methods of communication corresponding to whether they are directed to perception by sight, hearing or sense of motion. Artin realized himself that he predominantly relied on kinesthetic methods of communication meaning that the emphasis of Artin's lectures was on motivation followed by logical deduction and terminated by a searching examination of the steps used in the logical deduction. For the hearer this meant two things: he was not permitted to rest at any stage to perceive the picture obtained, excepting possibly in the beginning of a lecture, and he gained the impression that right during the lecture he discovered and established deep theorems by a sequence of simple operations.

The appeal to the sense of motion and progressing in time was powerfully supported by the external signs of motion. Artin allowed himself to use the whole platform as a substitute for peripathetic motion, he supported the sequence of sentences, carefully sculptured in time, by enormously expressive gestures of his hands, which in his later years occasionally seemed to invite a particular person in the audience to supply the answer and ultimately succeeded in generating true intellectual perception in almost every one of his hearers.

One of his favorite expressions was: this is enormously simple, meaning that he had succeeded in breaking up a complex structure into a sequence of very simple steps. Let us remember that Artin and his pupils Tate and Chevalley developed the methods of cohomology theory in algebra to their highest known pitch, methods that in Hasse's words consist in a systematic

sequence of trivial steps.

I have spoken of Artin's method of communication which largely emphasized kinesthetic perception. However the aim of his demonstration was clarity corresponding to a sharpened vision of the mathematical structures which either he himself had carefully created or which he had recreated from the work of other mathematicians. I remember him often saying: I want you to see this concept in your mind in full clarity (as group, ring, field or ideal). In order to reach his aim, in all his lectures even the ones of merciless abstraction he included numerous carefully worked out examples and ultimately based his speculations on the intimate study of mathematical experience, supported if necessary by electronic computation.

Turning to the influence which Artin had on his colleagues and pupils by his publications it is well known among Artin's pupils that this influence went far beyond what is evident from his papers. For example Artin had produced in 1933 a set of seminar notes on the structure of semi-simple Lie-algebras over the complex field in which he anticipated Dynkin's monograph by 15 years and in some respect gave a superior presentation of the results of E. Cartan and H. Weyl. These never published notes strongly influenced the work of W. Landherr and of myself. His lecture notes on complex multiplication in reality were a modern text book on the subject which influenced greatly Soehngen's work. In geometry of numbers Artin has no research paper to his credit and yet he influenced pupils like Ankeny and MacBeath very much also in that field of research. His highly original lectures on group theory started my own research in group theory as I have explained in the preface of my book on the subject. Together with P. Scherk Artin simplified the proof of Mann's theorem in additive number theory.

The best known example for the preference that Artin gave to the spoken word over the printed word is the influence which he had in the development of class field theory which can be fully understood only by viewing many of the main workers in the field taking instruction from Artin at the formative stage of their career. This is documented for example by the thesis of C. Chevalley which faithfully reflects the state of the theory as expounded by Artin in the early thirties filtered through the original mind of the author.

Among the published non algebraic number theory contributions to the field of algebra by Artin I would like to mention the now famous series of three 1927 papers on: *Algebraische Konstruktion reeller Körper, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate* and *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper* in the Hamburger Abhandlungen in which the Hilbert problem concerning the decomposition of positive definite functions

into the sum of squares of rational functions was solved affirmatively.

O. Schreier's and Artin's ingenious characterization of formally real fields as fields in which -1 is not the sum of squares and the ensuing deduction of the existence of an algebraic ordering of such fields started the discipline of real algebra. Really, Artin and his congenial friend and colleague Schreier set out on the daring and successful construction of a bridge between algebra and analysis. In the light of Artin - Schreier's theory the fundamental theorem of algebra truly is an algebraic theorem inasmuch as it states that irreducible polynomials over really closed fields only can be linear or quadratic.

It is interesting to follow the change of attitude that Artin experienced in regard to the question to which extent the problems of construction solved by Artin and Schreier can be done in a finite number of steps. In the thirties Artin was very much aware of the threat of intuitionism to classical mathematics, several pupils of Artin were working on these questions, one of which (A. Hollkott) anticipated in his thesis part of the later work of Tarski and Henkin. However, when I spoke again with Artin in the fifties on the discoveries of G. Kreisel and A. Robinson that indeed Artin's solution of Hilbert's problem could be turned into a finitistic construction he reacted with philosophical calmness and even went so far as preferring a mere existence proof to a construction that required $2^{2^{100}}$ steps.

The two papers on arithmetics of hypercomplex numbers together with Käthe Hey's dissertation under Artin's direction inaugurated the extension of algebraic number theory to non-commutative rings which still offers many fascinating unsolved problems.

In group theory Artin studied the order of the known finite simple groups in two 1955 papers. Based on this study he conjectured that the structure of a simple group apart from one notable exceptional series may be decoded from the order, a conjecture that begins to be verified, at least for the minimal simple groups, by Thompson.

Artin, since the beginning of his research activity, took a very active interest in topology. He invented the notion of braids in mathematics and established the theory of braids in his now classical papers of 1926 and 1947.

Artin was fond of scientific discussion, many times in this country and in Germany he has worked together with other mathematicians. He has stimulated their work by the clarity of his judgement in scientific questions which he exercised with discretion, great depth of insight and always with benevolence. I know of many pupils and colleagues who fondly remember the hours of their life spent in scientific contact with Artin, who thanks to the

universality of his studies and the originality of his responses to the work of other mathematicians always seemed to give more than he received.

Artin was truly a scientist-philosopher in the undiminished sense of the 17-th century, the century of Blaise Pascal, René Descartes, Newton and Leibniz.

In Hamburg he gave lectures about general mechanics and about relativity theory in which he carefully discussed both the mathematical theory as well as the outcome of the decisive experiments. He owned a microscope with which he made his own observations in biology, and a telescope the mirror of which he himself had polished to perfection. Through his enduring contact with outstanding astronomers he was well familiar with modern astronomical research and cosmological theories.

From the best recipe for cooking rice to the job of tuning a cembalo to the task of building an organ and the significance of medical research for psychoanalysis Artin always attacked the problem freshly and responded with original solutions.

Since the beginning of his academic office Artin took a lively interest in the problems of teaching mathematics on all levels. This interest showed its first fruits in his outstanding courses on analysis in Hamburg and Bloomington. He showed no mercy for donkey bridges, but with wonderful clarity and patience he understood to guide his students to the full appreciation and mastery of the subtle concepts of limit and continuity, differentiability and integral from the beginning of their studies. His introductory course in analysis which I attended at the age of 17 converted me from a theoretical physicist to a mathematician. I know of several law students who attended regularly the first half of the course in appreciation of the clarity of his presentation.

The now classical book on the introduction to the theory of the gamma function is another outcome of these courses, its exposition being an ideal synthesis of research and teaching.

In Princeton Artin gave outstanding honors courses to mathematics freshmen beyond the call of duty and upon his return to Germany he took active interest in world wide modernization of the teaching of mathematics on the high school level by participation in several projects sponsored by European and Indian organizations.

The 1957 book on geometric algebra is the most mature fruit of Artin's ideas how to modernize the teaching of mathematics from the high school level to the senior undergraduate level, inasmuch as it carries out in original fashion his own recommendations: to place the definition and properties of

linear spaces into the center of the theory and to expound geometry and algebra as two sides of a unified structure.

REFERENCE:

Schoeneberg, Bruno. Emil Artin zum Gedächtnis. [Sch63]

3 Erinnerungen an Helmut Hasse

(Zur Vorgeschichte dieser Edition)

von Günther Frei

3.1 Meine erste Begegnung mit Hasse Hasses Vorlesung in Quebec Besuch in Ahrensburg

Helmut Hasse habe ich erstmals im Jahre 1971 am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach getroffen anlässlich der von ihm zusammen mit Peter Roquette vom 22. bis 28. August organisierten Tagung über Algebraische Zahlentheorie. Zuerst machte er auf mich einen eher distanzierten und abweisenden Eindruck, aber diese erste Einschätzung sollte sich alsbald als falsch herausstellen. Als ich ihn gegen Ende der Tagung fragte, ob er für ein Semester nach Quebec an die Universität Laval kommen wolle, um dort eine Vorlesung über Klassenkörpertheorie zu halten, sagte er spontan zu. Im darauffolgenden Briefwechsel mussten alle die formalen, finanziellen und technischen Einzelheiten geregelt werden, welche die Universität und die finanzierenden Institutionen einem solchen Gastaufenthalt auferlegen. Dabei lernte ich Hasse als einen bescheidenen und äusserst pflichtbewussten und liebenswürdigen Menschen kennen, der alle damit zusammenhängenden Fragen geduldig und mit grosser Pünktlichkeit beantwortete.

Am 2. September 1972 traf Hasse in Quebec ein. Seine Vorlesung über Klassenkörpertheorie führte von den Kreiskörpern als Klassenkörper zu den Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie bis zur Theorie von Chevalley, wobei Hasse den Zugang über die Algebrentheorie wählte, der ja hauptsächlich ihm und seinen Arbeiten aus den Jahren 1930 bis 1933 zu verdanken ist. In einem Anhang wurde die Geschlechtertheorie behandelt, zuerst im quadratischen Fall, worüber Hasse auch einen Artikel in Arbeit hatte betreffend die Bestimmung der Struktur der 2-Klassengruppe eines Quadratischen Zahlkörpers (s. [Has75a]), und dann allgemein im abelschen Falle, wobei er der Theorie von Leopoldt folgte (s. [Leo53]),

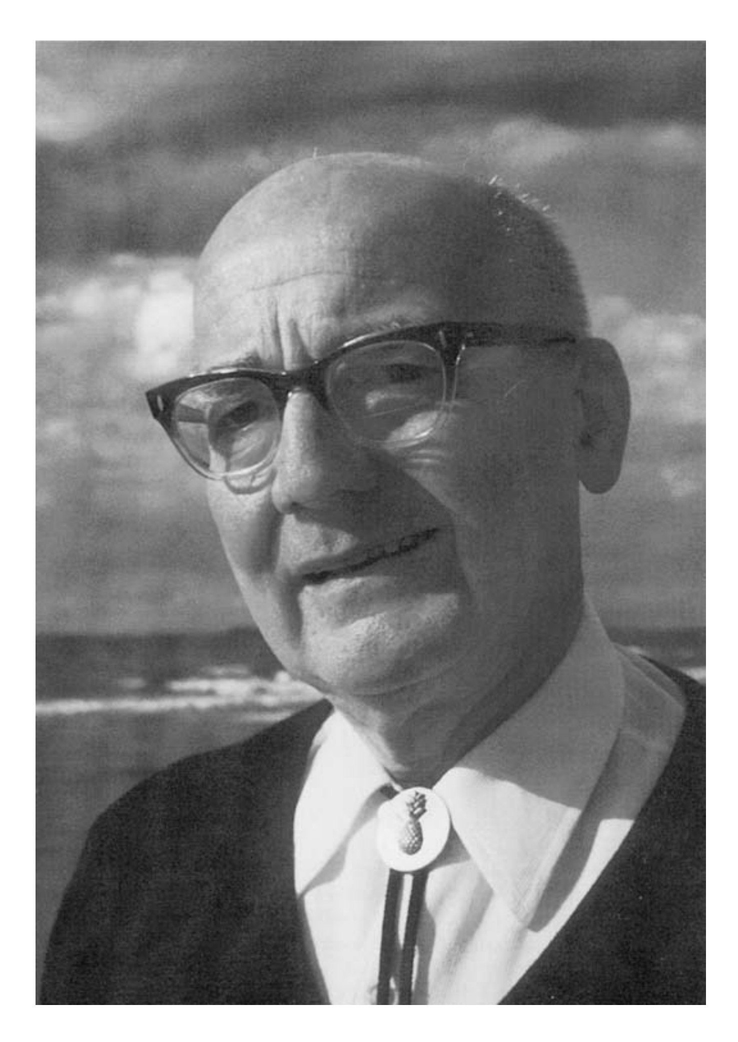


Abbildung 2: Hasse: 1972

(Foto: G. Frei)

die ja ebenfalls auf Hasses Anregung und seine Monographie *„Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper“* zurückgeht (s. [Has52]). Die Notizen zur Vorlesung habe ich im Februar 1973 herausgegeben als No. 11 der Reihe „Collection Mathématique, Département de mathématiques, Université Laval“ unter dem Titel *„Class Field Theory“* (s. [Has73]).

In diesen beiden Monaten September und Oktober 1972 hatte ich das Glück, Hasse sehr persönlich kennenzulernen und ihm sehr nahe zu kommen, da wir praktisch den ganzen Tag zusammen verbrachten. Ich holte ihn morgens vor der Vorlesung im Hotel ab; nach der Vorlesung wurde diskutiert und die Vorlesung weiter vertieft, und dann folgten eine Exkursion in die nähere oder weitere Umgebung von Quebec und schliesslich das Abendessen bei uns zuhause. In höchst gelockerter und entspannter Atmosphäre wurde über vieles diskutiert, wobei wir von Hasses vielen kulturellen Interessen profitierten und uns insbesondere der deutsche Kulturkreis näher gebracht wurde. Diese Abende, die auch immer Musik einbezogen, hat auch Hasse sichtlich sehr genossen. Während und im Anschluss an seinen Gastaufenthalt in Quebec gab Hasse Vorträge an den Universitäten McGill in Montreal und in Sherbrooke, an der Queens's University in Kingston, wo er Paulo Ribenboim besuchte, in Toronto und an der McMaster University in Hamilton.

Im folgenden Frühjahr waren wir vom 10. bis 20. Mai 1973 Gast in Ahrensburg, wo Hasse in einem gemütlichen dreistöckigen Vorstadthaus mit schönem Garten die oberen beiden Stockwerke bewohnte. Wir belegten das oberste Stockwerk, wo sich auch Hasses Arbeitszimmer befand, und wo er seine grosse Separata-Sammlung fein säuberlich geordnet in einem speziellen Separata-Schrank aufbewahrte. Am Tage wurden Ausflüge in die nähere und weitere Umgebung von Ahrensburg und nach Hamburg unternommen, so auch ein Tagesausflug in die Holsteinische Schweiz mit einem Abstecher nach Schillsdorf im Amt Bokhorst, wo wir Paul Ziegenbein in seinem Landhaus besuchten, einen freundlichen, liebenswürdigen Herrn, der sich allerdings nur noch im Rollstuhl bewegen konnte. Ziegenbein war ursprünglich Hasse, als dieser im Jahre 1933 in Göttingen die Leitung des Mathematischen Institutes übernahm, vom Ministerium zur Überwachung zur Seite gestellt worden, da Hasse, der sich gegen jede politische Einflussnahme entschieden wehrte, dem Ministerium nicht genehm war. Hasse hat es dann aber verstanden, Ziegenbein, der Parteimitglied mit einer tiefen Parteinummer war, für sich zu gewinnen. Mit dessen Hilfe vermochte er sich gegen die ständige Einmischung des Ministeriums in die Angelegenheiten des Institutes zur Wehr zu setzen (s. [Fre77]). Nach dem Kriege war Ziegenbein, der das lokale Plattdeutsch sprach, Leitender Verwaltungsbeamter beim Amt Bokhorst.

Von unseren Ausflügen waren wir stets sehr pünktlich zurück, um das von Hasses Haushälterin, Frau Finnern, zubereitete Abendbrot einzunehmen. Pünktlichkeit war auch gefordert, weil genau fünf Minuten vor den Abendnachrichten automatisch das Fernsehgerät sich einschaltete. Mit grossem Interesse verfolgte Hasse die Neuigkeiten. Nach den Nachrichten wurde das Fernsehgerät sogleich wieder abgeschaltet, und man widmete sich wieder der Mathematik und anderen kulturellen Themen. Hasse war damals in regem Briefverkehr mit vielen Mathematikern aus den USA, die er im Jahre 1962 erstmals und dann nach seiner Emeritierung im Jahre 1966 jedes Jahr besucht hatte, und wo er auf das Herzlichste empfangen worden war. Als wir damals in Ahrensburg waren, beschäftigte er sich insbesondere mit Problemen von Leon Bernstein, den er bei dessen Untersuchungen zur Herstellung parameter-abhängiger Scharen quadratischer Grundeinheiten unterstützte (s. [BH75]), Probleme, die an eine gemeinsame Arbeit über Einheitenberechnung mittels des Jacobi-Perron'schen Algorithmus anschlossen (s. [BH65]). Bernstein war nur einer von vielen amerikanischen Mathematikern, die durch Hasse in der mathematischen Forschung geleitet oder überhaupt erst in die Forschung eingeführt worden waren. Bernstein, der sich nach seiner Emeritierung in Israel niederliess, ist ihm auch stets dankbar und freundschaftlich verbunden geblieben.

3.2 Erste Fassung des Briefwechsels Artin-Hasse

Im darauffolgenden Jahr war ich verantwortlich für die Organisation des 28. Kongresses der Kanadischen Mathematischen Gesellschaft (Société mathématique du Canada), der vom 6. bis 8. Juni 1974 an der Universität Laval in Quebec stattfand. Wie jedes Jahr wurde bei diesem Anlass auch der Jeffery-Williams-Preis vergeben, der 1968 von der Gesellschaft geschaffen worden war, um besondere wissenschaftliche Verdienste eines mit Kanada verbundenen Mathematikers auszuzeichnen. Der damalige Preisträger war Hans Zassenhaus von der Ohio State University, der früher Professor an der McGill University in Montreal gewesen war. Zassenhaus trug über die Briefe vor, die Minkowski an Hilbert geschrieben hatte und die Zassenhaus im Jahre zuvor zusammen mit Lily Rüdenberg, der Tochter von Hermann Minkowski, beim Springer-Verlag herausgegeben hatte (s. [RZ73]). In einer an den Vortrag anschliessenden längeren Unterhaltung riet er mir, den Briefwechsel Hilbert - Klein in Göttingen einmal anzusehen, da er wusste, dass ich mich für Hilberts und Kleins Originalarbeiten interessierte. Eine Herausgabe dieses Briefwechsels wäre eine „nützliche und aufschlussreiche“ Aufgabe. Auch

B. L. van der Waerden, den ich zwei Wochen später in Zürich traf, ermunterte mich dazu, dieses Projekt in Angriff zu nehmen. Dazu bot sich nun schon bald eine Gelegenheit. Denn am 30. Juni 1974 machte ich auf dem Wege zu Helmut Hasse in Ahrensburg Halt in Göttingen, wo ich am darauffolgenden Tag auf Anraten und auf Empfehlung von Hasse seinen ehemaligen Doktoranden und damaligen Direktor der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Wilhelm Grunwald, besuchen und bei dieser Gelegenheit Einsicht in den handschriftlichen Nachlass von Klein erhalten konnte. Grunwald ist durch den „Satz von Grunwald-Wang" in seiner von Hasse betreuten Dissertation bekannt geworden (s. [Roq05b], Abschnitt 5.3).

Zwei Tage später in Ahrensburg führte mich Hasse nach einem Besuch beim Rotary-Club in Hamburg und einem Treffen mit Hel Braun, die nach Hasses Emeritierung auf seinen Lehrstuhl gefolgt war, in sein Büro im Mathematischen Institut in Hamburg, wo noch das Schreibpult stand, an dem auch Erich Hecke gearbeitet hatte. Hier befand sich seine viele Ordner umfassende höchst interessante und umfangreiche Korrespondenz, wo ich, angeregt durch den Besuch des Klein'schen Nachlasses in Göttingen, Hasses Erlaubnis erhielt diese durchzusehen. Besonders aufschlussreich fand ich die 49 Briefe von Artin an Hasse zwischen 1923 und 1954. Sie schienen mir ein wichtiges und sehr interessantes Dokument zur Geschichte der Klassenkörpertheorie und der Algebrentheorie zu sein. Hasse hat mir diese auch sogleich gerne überlassen und mir völlig freie Hand gegeben für eine eventuelle Veröffentlichung sowohl für diesen Briefwechsel als auch für weitere, wobei derjenige zwischen Emmy Noether und Helmut Hasse als nächster in Frage kam.

Zurück in Quebec im Herbst, nachdem von der Bibliothek in Göttingen Kopien des Briefwechsels Hilbert-Klein und von Hasse die Briefe von Emil Artin und Emmy Noether eingetroffen waren, konnte ich mir von ihnen ein genaueres Bild machen, auch vom Umfang der Arbeiten, die für die Editionen notwendig waren. Nach der genaueren Lektüre der Briefe entschloss ich mich, je eine Herausgabe des Hilbert-Klein Briefwechsels[20] und dann zunächst der Artin-Briefe vorzubereiten, umso mehr, als Hans Zassenhaus sich bereit erklärte, bei beiden Projekten mitzuwirken. Das war sehr ermutigend, denn Zassenhaus hatte 1934 bei Artin in Hamburg doktoriert und war 1936–37 dessen Assistent gewesen. Dadurch war er auch mit Artins Arbeiten bestens vertraut. Überdies war Zassenhaus mit Natascha Artin, der Frau Artins, sehr

[20]Der Hilbert-Klein Briefwechsel ist dann 1985 erschienen, ebenso wie 1981 eine Biographie über Klein in deutscher Sprache und 1984 in englischer Sprache. Siehe dazu [Fre85a], [Fre81b] und [Fre84].

befreundet, mit der er in Hamburg auf dieselbe Schule gegangen war. Mit Zassenhaus' eventueller Mitarbeit war auch Hasse einverstanden. Auch Zassenhaus fand, dass eine Edition der Briefe von Artin an Hasse eine „wertvolle und wünschenswerte“ Aufgabe wäre.

Gedacht hatten wir damals an ein Buch bei Springer, der sich dafür interessierte, in der Art der Publikation der Briefe Minkowskis an Hilbert durch Rüdenberg und Zassenhaus. Es sollte folgendes enthalten: eine Geschichte der Klassenkörpertheorie bis und mit 1923, eine Biographie von Hasse, eine Biographie von Artin und die Briefe Artins an Hasse mit ausführlichen Kommentaren. So habe ich damals mit der Redaktion einer Biographie von Hasse begonnen, die dann zu den Veröffentlichungen [Fre77], [Fre81c] und [Fre85b] geführt hat. Zassenhaus wollte die Biographie von Artin schreiben, und die Redaktion einer Geschichte der Klassenkörpertheorie bis und mit 1923 habe ich übernommen. Den laufenden Kommentar wollten wir etwa in der Weise gestalten, wie das bei Dedekinds Werken [Ded32] durch Robert Fricke, Emmy Noether und Öystein Ore geschehen war. Ein Problem war nun das Tippen der Briefe, das natürlich nur von einer Deutsch sprechenden Sekretärin bewerkstelligt und daher weder in Ohio noch in Quebec durchgeführt werden konnte. Glücklicherweise verbrachte ich die Zeit von Mai bis August 1975, nachdem uns Hasse im April in Quebec von Orono aus wieder für einige Tage besucht hatte, wie jedes Jahr am Forschungsinstitut für Mathematik der ETH, wo Frau Rahel Boller in den nachfolgenden Monaten freundlicherweise im Wesentlichen die umfangreiche Abschrift der Briefe besorgen konnte. Als sich dann aber im darauffolgenden Jahr der Springer-Verlag aus Angst vor einem finanziellen Risiko für den Briefwechsel nicht mehr interessierte, wurde das Manuskript vorerst einmal beiseite gelegt.

Gegenüber der in der Reihe „Collection Mathématique“ publizierten ersten Fassung der Briefe vom Januar 1981 (s. [Fre81a]) fehlten damals allerdings noch die Kurzbiographien zu Artin und Hasse, die Einleitung, die Kurzübersicht über den Inhalt der Briefe und das Namen- und Sachregister.

3.3 Zu Hasse und zur Hasse-Biographie

Schon beim zweiten Besuch in Ahrensburg vom 2. bis 6. Juli 1974 hatte ich begonnen, mich eingehender mit der Biographie von Hasse zu beschäftigen, insbesondere auch im Hinblick auf die Kommentare zu den Briefwechseln, aber auch weil mich die damit verbundenen vielfältigen Beziehungen zur deutschen Kulturgeschichte interessierten. Zwar hatte ich bis dahin schon sehr viel Persönliches von Hasse selbst über ihn und seine Vorfahren erfahren,

und Hasse, der mir vollstes Vertrauen entgegenbrachte, hatte mir auch über alles bereitwillig und ausführlich Auskunft gegeben.

Relativ wenig wusste ich damals über die Zeit von 1934 bis 1945, als Hasse Direktor des Mathematischen Institutes in Göttingen war. Zuvor hatte ich über diese Zeit von Dritten, Personen in den USA, wo ich die Jahre 1968-1970 verbracht hatte, und in Kanada, wo ich seit 1970 tätig war, gelegentlich eigenartige Aussagen zu hören bekommen, allerdings nur von Leuten, die offensichtlich Dinge weitergaben, die sie auch nur irgendwo einmal von irgendwoher gehört hatten, und die sie ohne genauere Kenntnisse weitertradierten. Solcherlei Behauptungen standen jedenfalls im scharfen Gegensatz zu allem, was ich von ernst zu nehmenden Leuten gehört hatte, die Helmut Hasse wirklich gut gekannt und mit ihm auch zusammen gearbeitet hatten, etwa von Reinhold Baer, Martin Eichler und Olga Taussky, die ich selbst alle sehr gut gekannt habe, und mit denen ich auch freundschaftlich verbunden war. Sie alle sprachen nur mit der höchsten Anerkennung über Hasse als Persönlichkeit und über sein Werk. Martin Eichler betonte mir gegenüber einmal, er könne nur sagen „*Hasse war ein perfekter Gentleman*“. Reinhold Baer und Olga Taussky äusserten sich ähnlich. Hans Rohrbach, der seit 1932 Hasse bei der Redaktion des „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*“ unterstützte und Hasse auch persönlich bestens kannte, schrieb in einem persönlichen Gutachten am 18. 2. 1946: „*Hasse hat einen so lauteren, aufrichtigen und geraden Charakter, dass ihm jede Änderung zum Schlechten unmöglich ist. Wer Hasse anders einschätzt, urteilt oberflächlich oder von einem schiefen Standpunkt aus.*“ Diese Aussage charakterisiert Hasse auf das Treffendste. Abraham Adolf Fraenkel, der wie Hasse bei Hensel in Marburg doktoriert hatte, dann in Kiel sein Kollege war und später Rektor der Hebräischen Universität in Jerusalem, berichtet in seinem Buch [Fra67], p. 153: „*Ich habe persönlich nur Gutes von ihm* [Hasse] *erfahren und fand ihn stets charakterlich einwandfrei*“. Das entspricht auch ganz meinen eigenen Erfahrungen und den Erfahrungen von Personen, denen ich später noch begegnen sollte und die Hasse persönlich gekannt hatten. Sie alle äusserten sich immer wieder in dieser gleichen eindeutigen Weise. In der Tat kann man sich kaum eine liebenswürdigere Persönlichkeit vorstellen als Helmut Hasse. Übrigens hatte ich die Autobiographie von Fraenkel [Fra67] Hasse zu seinem 78. Geburtstag geschenkt, worüber er sich sehr freute und mir berichtete, dass er Fraenkel als Kollegen in Marburg sehr gut gekannt habe und froh sei, über sein weiteres Schicksal durch seine eigene Darstellung Näheres zu erfahren.

Diese Einschätzungen wären nicht vollständig, wenn nicht auch noch ge-

sagt würde, dass auch auf Hasse zutrifft, was van der Waerden in einem Vortrag in Graz und Heidelberg über seine Lehrmeisterin Emmy Noether berichtete: „Sie war durch und durch ein guter Mensch, frei von jedem Egoismus, frei von aller Eitelkeit, frei von Pose, und sie half immer jedem Menschen, wo sie konnte“ (s. [Fre98b], p. 138). In dem Gedenkartikel über B. L. van der Waerden, in welchem ich diese Worte van der Waerdens zitierte, hatte ich weiter geschrieben, dass das Gleiche auch von van der Waerden gesagt werden kann, und hatte angefügt, dass man nie aus seinem Munde Abschätziges über Kollegen vernommen habe und dass er, wo immer er konnte, seine Schüler angespornt und gefördert habe auf der Suche nach Neuem, nach wissenschaftlicher Klarheit und letztlich auf der Suche nach über die Wissenschaft hinausreichender Weisheit. Gleiches muss auch von Hasse gesagt werden. Diese hohe Tugend, nie negativ oder abschätzig oder gar belustigend über andere gesprochen zu haben, die Emmy Noether mit van der Waerden und Hasse verbindet, ist umso höher zu werten, als sie eher selten anzutreffen ist.

Es ist daher erstaunlich, dass Hasse und auch van der Waerden leider immer wieder zur Zielscheibe in, wie es scheint, ideologisch geprägten Artikeln geworden sind. Zu den Unterstellungen gehört, sie hätten die Exzesse und Verfolgungen dieser Zeit toleriert oder gar gutgeheissen. Dazu werden manchmal Briefe oder andere Dokumente zitiert. Es genügt aber nicht, Dokumente aus ihrem Zusammenhang zu reissen, um damit eine vorgefasste Meinung zu bestätigen. Notwendig wäre es, diese Dokumente in ihrem weiteren Zusammenhang zu sehen und die Fähigkeit zu entwickeln, diese den Umständen und der Zeit entsprechend korrekt zu interpretieren und einzuordnen.

Jedenfalls ergaben sich anlässlich meines dritten und vierten Besuches in Ahrensburg vom 21. September bis 3. Oktober 1976 und vom 29. bis 31. Mai 1977 während meines Sabbatjahres am Forschungsinstitut für Mathematik an der ETH in Zürich Gelegenheiten, die Zeit von 1934 bis 1945, als Hasse Direktor des Mathematischen Institutes in Göttingen war, genauer kennenzulernen. Es befanden sich nämlich die diesbezügliche sehr persönliche Korrespondenz und die persönlichen Dokumente, die Hasse neben seiner Separata-Sammlung im Hause aufbewahrte, gerade im obersten Stock des Hauses in Ahrensburg, wo wir wieder in der Gästewohnung logieren durften. Hasse gewährte mir grosszügig freien Zutritt zu allen diesen Dokumenten, liess mich diese Dokumente studieren und gestattete mir auch, davon Kopien zu machen. Bereitwillig beantwortete er mir alle Fragen, die sich aus der Lektüre dieser Dokumente ergaben. Heute befinden sich diese persönlichen

Akten in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

Diese Akten geben nun ein klares Bild von der integren Haltung Hasses in einer äusserst schwierigen Zeit. Sie dokumentieren die Widerwärtigkeiten, denen Hasse von 1933 bis etwa 1948 ausgesetzt gewesen war, von seinem unermüdlichen, aufreibenden und unerschrockenen Bemühen, im Mathematischen Institut in Göttingen für Ordnung zu sorgen, bedrängten Kollegen, Doktoranden und Habilitanden zu helfen, einen geordneten wissenschaftlichen Betrieb aufrechtzuerhalten und die Qualität der Wissenschaft nach Möglichkeit zu fördern. Sie zeugen von einem unerschrockenen Einsatz in einer schwierigen Zeit. Es ist hier nicht der Ort, auf alle Einzelheiten aus dieser Zeit einzugehen. Einiges findet sich in meiner Biographie über Hasse [Fre77] oder ist in einer ausführlicheren Biographie für später geplant.

3.4 Erste Veröffentlichung des Briefwechsels Artin-Hasse

Im Sommer 1977 verbrachten wir zusammen mit Hasse und seiner Altersgefährtin Marion Ritter zwei Wochen vom 17. Juni bis 3. Juli im Unter-Engadin, wo wir seit 1972 ein Ferienhaus besitzen. Hasse hatte als 16-Jähriger die um sieben Jahre jüngere Marion Ritter kurz vor dem Ersten Weltkrieg in den Sommerferien in einer Pension im Thüringer Wald kennengelernt und dann 1971 wieder getroffen. Hasses Frau war schon im Sommer 1967 an den Folgen von Nierenschwund gestorben. Die Zeit im Engadin hat Hasse sehr genossen und auch rüstig verschiedene Wanderungen mitgemacht.

In Anschluss an diese gemeinsamen Tage habe ich die Biographie [Fre77] noch etwas ergänzt und dann im Juli 1978 an verschiedene mit Hasse vertraute Personen versandt, an seine Tochter Jutta Kneser und seinen Sohn Rüdiger Hasse sowie an die Schüler Curt Meyer, Wolfram Jehne, Peter Roquette und Paul Wolf und dazu an Hans Zassenhaus. Eine Kopie ging auch an K. Honda in Japan, der selbst eine kleinere Hasse-Biographie auf Japanisch in Arbeit hatte.

Damals ging es Hasse gesundheitlich noch ordentlich. Er verbrachte im August 1978 nochmals zwei Wochen in der Schweiz, auch „um allem Aufheben um seinen 80. Geburtstag [am 25. August] zu entgehen“. Im Jahr darauf wurde er aber ernsthaft krank, und zu seinem grössten Bedauern konnte er an der Tagung in Oberwolfach über Algebraische Zahlentheorie im August, die er seit vielen Jahren um diese Zeit organisiert hatte, nicht mehr teilnehmen. Er war tieftraurig, dass er seine vielen daran teilnehmenden Schüler

und Freunde nie mehr werde sehen können. Ein Telegrammgruss an die Teilnehmer war für viele die letzte Nachricht. Am 26. Dezember 1979 ist er in Ahrensburg gestorben, nachdem er die letzten Monate trotz grosser Schmerzen geduldig ertragen hatte.

Da nun der erste Teil der Hasse-Biographie [Fre77], noch von Hasse begleitet, zu einem gewissen Abschluss gebracht war und veröffentlicht werden konnte, war es an der Zeit, auch im Hinblick auf den zweiten, Hasses Werk umfassenden Teil, den Briefwechsel Hasse - Artin wieder aufzunehmen. Dieser vor allem die Zeit von 1923 bis 1934 umfassende Briefwechsel war ja auf das Engste mit Hasses Arbeiten zu den Reziprozitätsgesetzen und zur Klassenkörpertheorie verbunden. Zur Wiederaufnahme dieses Projektes hatte mich auch Peter Roquette nach der Lektüre der Hasse-Biographie ermuntert und dafür auch seine Hilfe angeboten, umsomehr als sich jetzt Klaus Peters vom Birkhäuser-Verlag dafür interessierte und telefonisch auch schon die Übernahme des Projektes für diesen Verlag zugesichert hatte. Der ursprüngliche Plan mit Hans Zassenhaus wurde beibehalten, mit dem Peter Roquette und Klaus Peters einverstanden waren, wobei Peter Roquette vorschlug, den Kommentar so ausführlich zu gestalten, dass gleichzeitig eine Einführung in die Klassenkörpertheorie auf historischer Grundlage entstehe. Auch Winfried Scharlau liess mir über Max Knus ausrichten, dass er gerne den Briefwechsel in die Reihe *„Dokumente zur Geschichte der Mathematik"* beim Verlag Vieweg aufnehmen möchte.

Daraufhin verfasste ich die Kurzbiographien zu Artin und Hasse, die Einleitung, die Kurzübersicht über den Inhalt der Briefe und erstellte ein Namen- und Sachregister. So konnten die Briefe von Artin an Hasse in der Reihe „Collection Mathématique" (s. [Fre81a]) im Januar 1981 erstmals der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Dabei ist es dann aber für längere Zeit geblieben. Erst im Jahre 1997 – Hans Zassenhaus war unterdessen am 21. November 1991 in Columbus, Ohio, gestorben – haben Peter Roquette und ich das Projekt wieder aufgenommen mit der Absicht, den Briefwechsel nochmals, aber mit ausführlichen Kommentaren zu veröffentlichen. Dazu wurden zunächst einmal eine Reihe von vorbereitenden Arbeiten publiziert, in denen einzelne Teile des Werkes von Hasse genauer untersucht wurden. Dazu gehören unter anderen [Fre89], [Fre01a], [Fre01b], [Fre04], [Fre06], [Fre07]; [Roq98], [Roq00], [Roq01], [Roq02a], [Roq02b], [Roq05b], [Roq04], [Roq05a], [LR06] und [Roq06], die nun den Kommentaren zugrunde liegen.

4 Reziprozität für Potenzreste

Wir beabsichtigen hier nicht, auf die lange Geschichte der Reziprozitätsgesetze einzugehen; dazu sei auf die zahlreiche einschlägige Literatur verwiesen, z.Bsp. [Lem00] sowie [Fre94]. Unser Ziel ist es, die wichtigsten Resultate zu nennen, auf denen Artin und Hasse aufbauten, und zwar in der Terminologie, wie sie zu Beginn des 20. Jahrhunderts gebräuchlich war und auch von Artin in den Briefen benutzt wurde.

Heute kennen wir das **Artinsche Reziprozitätsgesetz** als eine Isomorphieaussage zwischen der Galoisgruppe einer abelschen Zahlkörpererweiterung $K|k$ und der zugehörigen Strahlklassengruppe (oder Idelklassengruppe) in k. Dieser Isomorphiesatz wurde 1923 von Artin formuliert [Art23b] und 1927 bewiesen [Art27a]. Damals erschien dieser Satz, den Artin sofort als „allgemeines Reziprozitätsgesetz" bezeichnete, vielen Mathematikern zunächst „etwas fremdartig", wie Artin in seiner Arbeit selbst sagte. Vorher verstand man nämlich unter einem „Reziprozitätsgesetz" eine Aussage über Potenzreste, und zwar in solchen Zahlkörpern, welche die einschlägigen Einheitswurzeln enthalten. Wir wollen das nun erläutern.

Es sei $m > 1$ eine vorgegebene natürliche Zahl und k ein algebraischer Zahlkörper, der die m-ten Einheitswurzeln enthält. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von k und $|\mathfrak{p}|$ die Anzahl der Elemente seines Restklassenkörpers, also die Absolutnorm von $\mathfrak{p}$. Es wird vorausgesetzt, dass $\mathfrak{p}$ nicht in m aufgeht. Ist $\alpha \in k$ prim zu $\mathfrak{p}$, so ist das ***m*-te Potenzrestsymbol** $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ definiert als diejenige eindeutig bestimmte m-te Einheitswurzel, welche der Kongruenz genügt:

(1) $$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \alpha^{\frac{|\mathfrak{p}|-1}{m}} \bmod \mathfrak{p}\,.$$

Wenn hervorgehoben werden soll, auf welchen Exponenten m sich das Symbol bezieht, dann schreibt man auch $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ oder $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_{(m)}$.

Genau dann ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, wenn α ein m-ter Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$ ist, d.h. wenn die Kongruenz $x^m \equiv \alpha \bmod \mathfrak{p}$ durch $x \in k$ lösbar ist. Wenn das der Fall ist, so gibt es genau m solche Lösungen modulo $\mathfrak{p}$.

Für Divisoren $\mathfrak{b}$ von k, die zu α und zu m prim sind, wird $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$ erklärt vermöge Multiplikativität bezüglich des Nenners $\mathfrak{b}$. Wenn $\mathfrak{b} = (\beta)$ ein Hauptdivisor ist, so schreibt man $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Dies ist das **Jacobische Symbol** zum Exponenten m.

Als **Allgemeines Reziprozitätsgesetz** für das Jacobische Symbol zum Exponenten m wird meist die folgende Aussage bezeichnet:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \qquad \textit{wenn } \alpha \textit{ primär.} \tag{2}$$

Vorausgesetzt wird natürlich, dass beide Symbole, auf der linken und auf der rechten Seite, auf die angegebene Weise definiert sind, d.h. α, β sollen zueinander und zu m prim sein. Ferner heißt $\boldsymbol{\alpha}$ **primär**, wenn die Diskriminante von $k(\sqrt[m]{\alpha})|k$ prim ist zu m. Das bedeutet, dass jede in m aufgehende Primstelle *unverzweigt* ist in $k(\sqrt[m]{\alpha})$. (Für $m = 2$ ist noch die Zusatzbedingung zu stellen, dass α total positiv ist in k, d.h. jede unendliche Stelle von k soll in $k(\sqrt[m]{\alpha})$ unverzweigt sein.) Wenn der Exponent m hervorgehoben werden soll, so sagt man „α ist m-primär". Wenn $m = \ell$ eine Primzahl ist, dann lassen sich die primären α durch Kongruenzbedingungen nach Potenzen der in ℓ aufgehenden Primstellen $\mathfrak{l}$ von k charakterisieren. Für eine höhere Primzahlpotenz $m = \ell^n$ ist eine solche Charakterisierung schwieriger; in den Briefen Artin–Hasse kommt dieses Problem öfters zur Sprache.[21]

Gelegentlich wird auch der Begriff $\boldsymbol{\alpha}$ **hyperprimär** benutzt; er bedeutet, dass jede in m aufgehende Primstelle *voll zerlegt* ist in $k(\sqrt[m]{\alpha})$.

Wenn $k = \mathbb{Q}$ und $m = 2$ ist, dann handelt es in (2) sich um das gewöhnliche quadratische Reziprozitätsgesetz; die Bedingung „α primär" bedeutet in diesem Falle, dass $\alpha \equiv 1 \bmod 4$ und $\alpha > 0$ ist. Für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper und $m = 2$ hatte Hilbert dieses Reziprozitätsgesetz in seinen Arbeiten behandelt. In seiner Pariser Ansprache 1900 hatte er dann das Problem gestellt, dies für einen beliebigen Exponenten m zu verallgemeinern. Vermöge der Primzerlegung von m kann das Problem auf den Fall einer Primzahlpotenz $m = \ell^n$ zurückgeführt werden. Das 9. Hilbertsche Problem lautete:[22]

> *Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reciprocitätsgesetz der ℓ-ten Potenzreste bewiesen werden, wenn ℓ eine ungerade Primzahl bedeutet und ferner, wenn ℓ eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, wie die wesentlichen Hülfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir ent-*

[21] Die Terminologie „primär" und „hyperprimär" hatte sich im Zusammenhang mit den Reziprozitätsgesetzen eingebürgert. In anderen Bereichen der Mathematik hat „primär" eine andere Bedeutung.

[22] Wir haben diesen Text in englischer Übersetzung schon in der „Introduction" zitiert.

wickelte Theorie des Körpers der ℓ-ten Einheitswurzeln und meine Theorie des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

Für einen ungeraden Primzahlexponenten $m = \ell$ wurde das Hilbertsche Problem in den Jahren bis 1913 durch Furtwängler erledigt. Takagi hat in seiner 1922 erschienenen Arbeit das Reziprozitätsgesetz in den Rahmen der **Klassenkörpertheorie** gestellt, so wie das Hilbert vorausgesehen hatte.[23] Der Zusammenhang mit der Klassenkörpertheorie ergibt sich aus dem Bau der Formel (1). Der Wert von $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ bestimmt nämlich den *Zerlegungstypus* der Primstelle $\mathfrak{p}$ in der abelschen Körpererweiterung $k(\sqrt[m]{\alpha})$; wenn z.Bsp. $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ so zerfällt $\mathfrak{p}$ voll. Ganz allgemein war nun aber die Beschreibung des Zerlegungstypus von Primstellen in abelschen Erweiterungen das Hauptproblem, aus dem sich die Klassenkörpertheorie entwickelt hatte – unabhängig von Voraussetzungen über Einheitswurzeln im Grundkörper. (Vgl. [Fre89].)

Durch seinen klassenkörpertheoretischen Ansatz erhielt Takagi ebenfalls eine Lösung des Hilbertschen 9. Problems für Primzahlexponenten, aber auf anderem Weg als Furtwängler. Der Fall eines beliebigen Primzahlpotenz-Exponenten $m = \ell^n$ konnte jedoch erst durch Artin auf der Basis seines Reziprozitätsgesetzes erledigt werden, unter Verwendung von Ideen von Hasse und Furtwängler. Davon zeugen die späteren Briefe aus dem Jahr 1927.

In Verallgemeinerung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes (2) entsteht die Frage nach der Berechnung des sogenannten **Umkehrfaktors**:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = ? \qquad (3)$$

in denjenigen Fällen, in denen die obige Bedingung des Reziprozitätsgesetzes nicht erfüllt ist, in denen also weder α noch β primär ist. Zur Präzisierung dieser Aufgabe hat Hilbert das nach ihm benannte **Hilbertsche Normsymbol** $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ eingeführt, das in gewissem Sinne schon bei Eisenstein (1850) vorkommt und im wesentlichen auf Gauss (1801) zurückgeht, wo es „Charakter“ genannt wird. Es besitzt die folgenden Eigenschaften:

Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k ist $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ eine bimultiplikative antisymmetrische Funktion in α und β mit Werten aus der Gruppe der m-ten Einheitswurzeln, und zwar derart, dass $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ wenn und nur wenn α eine

[23] Zur Takagischen Klassenkörpertheorie siehe Seite 49.

Norm aus der $\mathfrak{p}$-adischen Komplettierung $k_\mathfrak{p}(\sqrt[m]{\beta})$ ist.[24] Dabei dürfen α, β beliebige Elemente aus k (oder $k_\mathfrak{p}$) sein. Die Definition des Normsymbols war keineswegs einfach, jedenfalls wenn $\mathfrak{p}$ ein Teiler des Exponenten m ist, und sie benutzte insbesondere das allgemeine Reziprozitätsgesetz. Demgemäß konnte Hilbert selbst nur den quadratischen Fall $m = 2$ behandeln; der Fall eines ungeraden Primzahlexponenten $m = \ell$ wurde erst durch Furtwängler und Takagi erledigt. Der Fall eines beliebigen Exponenten m konnte erst von Hasse aufgrund des Artinschen Reziprozitätsgesetzes behandelt werden.

Ohne hier auf die genaue Definition einzugehen, stellen wir lediglich fest, dass die **Produktformel für das Hilbertsche Symbol** gilt:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1\,. \tag{4}$$

(Hierbei sind auch die reellen unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ zu berücksichtigen, falls es welche gibt; das kann nur für $m = 2$ eintreten). In dieser Produktformel hatte Hilbert alle Reziprozitätsbeziehungen für die m-ten Potenzreste in k zusammengefasst.

Wenn $\mathfrak{p}$ kein Teiler von m ist, so lässt sich das Hilbertsche Symbol in einfacher Weise durch das Jacobische Symbol wie folgt ausdrücken:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha^{-b}\beta^{a}}{\mathfrak{p}}\right) \tag{5}$$

wobei $a = v_\mathfrak{p}(\alpha)$ und $b = v_\mathfrak{p}(\beta)$ die Ordnungszahlen von a, b bei der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Exponentenbewertung $v_\mathfrak{p}$ von k bezeichnen. (Wenn m gerade und nicht durch 4 teilbar ist, dann ist auf der rechten Seite noch der Faktor $\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{ab}$ hinzuzufügen.) Wenn α, β zueinander und zu m prim sind, wie es in (3) vorausgesetzt ist, dann ersieht man aus (5), dass $\prod_{\mathfrak{p}\nmid m} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$. Zufolge der Produktformel (4) lässt sich also der **Umkehrfaktor** wie folgt darstellen:[25]

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{l}|m} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{l}}\right)^{-1}, \tag{6}$$

[24] Hilbert selbst hat lokale Körper nicht explizit betrachtet; er formulierte die Norm-Eigenschaft als eine Folge von Kongruenzbedingungen, nämlich: α ist Normenrest aus $k(\sqrt[m]{\beta})$ modulo jeder Potenz von $\mathfrak{p}$. Daher sprach man früher auch von dem Hilbertschen Normen-**rest**-symbol.

[25] Die Primteiler von m werden bei Artin und Hasse fast immer mit $\mathfrak{l}$ bezeichnet, insbesondere dann, wenn $m = \ell^n$ eine Potenz einer Primzahl ℓ ist.

(wobei auf der rechten Seite auch die reellen Primstellen von k zu berücksichtigen sind, was nur für $m = 2$ relevant ist). Oft wird auch diese Formel für den Umkehrfaktor als „allgemeines Reziprozitätsgesetz“ bezeichnet; sie enthält (2) als Spezialfall.

Durch (6) ist zwar die Aufgabe (3) nicht gelöst, weil die (Hilbertsche) Definition der Normsymbole $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für $\mathfrak{l} \mid m$ formaler Natur ist und keinen expliziten Aufschluss über den Wert dieser Symbole liefert. Durch (6) wird aber die Aufgabe für den Umkehrfaktor zurückgeführt auf die Berechnung der Hilbertschen Normsymbole an denjenigen Primstellen $\mathfrak{l}$ in k, die Teiler von m sind (und die unendlichen reellen Primstellen für $m = 2$). Das führt auf die sogenannten **expliziten Reziprozitätsformeln**.

Im Spezialfall $k = \mathbb{Q}$ und $m = 2$ sind diese expliziten Formeln nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz in der Form geläufig:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\beta-1}{2}}\,(-1)^{\frac{\operatorname{sgn}\alpha-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn}\beta-1}{2}}$$

Auf der rechten Seite entspricht der erste Faktor der Primstelle 2, während der zweite Faktor zur reellen Stelle von $\mathbb{Q}$ gehört. (Dieser fällt weg, wenn $\alpha > 0$ oder $\beta > 0$ ist.) In den Jahren 1923-25 hat Hasse versucht, explizite Reziprozitätsformeln mit möglichst großem Gültigkeitsbereich zu finden, und zwar zunächst im Falle eines Primzahlexponenten $m = \ell$. In späteren Jahren – nachdem Artin sein Reziprozitätsgesetz gefunden hatte – dann auch für Primzahlpotenz-Exponenten $m = \ell^n$.

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass die Produktformel (4) und auch (6) auf dem Reziprozitätsgesetz (2) beruhen und somit vor Artin nur im Falle eines Primzahlexponenten $m = \ell$ gesichert waren. Erst auf der Grundlage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes 1927 wurde es schließlich möglich, diese für einen beliebigen Exponenten m zu verifizieren. Demgemäß beziehen sich die ersten 5 Briefe aus dem Jahr 1923, als das Artinsche Reziprozitätsgesetz noch nicht bekannt war, ausschließlich auf den Fall eines Primzahlexponenten.

Neben dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz (2) stehen die sogenannten **Ergänzungssätze**. Traditionsgemäß unterscheidet man zwischen dem „ersten“ und dem „zweiten“ Ergänzungssatz. Der erste Ergänzungssatz bezieht sich auf das Potenzrestsymbol für eine *Einheit* ε des Körpers k und lautet:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = \prod_{\mathfrak{l}\mid m}\left(\frac{\varepsilon,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)^{-1}$$

wenn α zu m prim ist. (Für $m = 2$ sind auf der rechten Seite auch die reellen Primstellen von k zu berücksichtigen.) In dieser Form ist der erste Ergänzungssatz ein Spezialfall von (6), weil nämlich definitionsgemäß $\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) = 1$ ist. Demnach ist der erste Ergänzungssatz lediglich von historischem Interesse und spielt auch in dem Briefwechsel Artin–Hasse keine Rolle.

Der **zweite Ergänzungssatz** bezieht sich auf das Potenzrestsymbol für eine Zahl $\lambda \in k$, die sich nur aus Primteilern des Exponenten m zusammensetzt und lautet:

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \prod_{\mathfrak{l}|m} \left(\frac{\lambda\,,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)^{-1} \tag{7}$$

wenn α zu m prim ist.

Die ersten 5 Briefe beziehen sich auf den zweiten Ergänzungssatz und sein Verhältnis zu dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz (2), und zwar wie bereits gesagt im Falle eines ungeraden Primzahlexponenten ℓ. Der dabei wohl wichtigste Fall ist der, wenn $k = \mathbb{Q}(\zeta)$ der Körper der ℓ-ten Einheitswurzeln ist – unter ζ eine primitive ℓ-te Einheitswurzel verstanden. In diesem Fall gibt es nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{l}$ von k, der ein Teiler von ℓ ist, und dieser besitzt $1 - \zeta$ als Primelement. Also gibt es auf der rechten Seite der Formel (7) nur einen einzigen Faktor, und (7) braucht nur für das eine Element $\lambda = 1 - \zeta$ ausgewertet zu werden.

Schließlich ist noch das sogenannte **Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz** zu erwähnen, das in dem Briefwechsel gelegentlich erwähnt wird. Es bezieht sich zunächst auf einen ungeraden Primzahlexponenten $m = \ell$ und den Körper $k = \mathbb{Q}(\zeta)$ der ℓ-ten Einheitswurzeln. Es handelt sich um eine gewisse Vorstufe des Reziprozitätsgesetzes (2), nämlich unter der einschränkenden Annahme, dass α rational ist und β zu einer rationalen Zahl modulo $\mathfrak{l}^2$ kongruent ist. (Dabei ist $\mathfrak{l}$ der Primteiler von ℓ in $\mathbb{Q}(\zeta)$.) Hilbert bemerkt dazu in seinem Zahlbericht, dass das

> „*Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz ein bisher unentbehrliches Hilfsmittel zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes*“

ist. Takagi sagt dasselbe in seiner großen, dem Reziprozitätsgesetz gewidmeten Arbeit 1922. Bevor Artins Reziprozitätsgesetz etabliert war, hatte man versucht, das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz zu verallgemeinern auf beliebige Primzahlpotenzexponenten $m = \ell^n$, weil man hoffte, auf diese Weise einen Zugang zu dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz zu erhalten. Siehe

dazu Teil II, Abschnitt 6.3. Durch den Artinschen Beweis des Reziprozitätsgesetzes verlor jedoch das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz seine Rolle als „unentbehrliches Hilfsmittel zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes“, d.h. es wurde für diesen Zweck entbehrlich.

5 Klassenkörpertheorie

Wir beabsichtigen hier nicht, auf die Geschichte der Klassenkörpertheorie einzugehen; dazu sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, z.Bsp. [Has66], [Fre89]. Unser Ziel ist es, die wichtigsten Resultate zu nennen, auf denen Artin und Hasse aufbauten, und zwar in der Terminologie, wie sie damals gebräuchlich war und auch von Artin in den Briefen benutzt wurde. Es handelt sich also um die Takagische Klassenkörpertheorie, wie sie in dem Klassenkörperbericht von Hasse [Has26a] dargestellt wurde.

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor von k.

Es bezeichne $A_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren von k. Der „Hauptstrahl modulo $\mathfrak{m}$" besteht aus denjenigen Hauptdivisoren $(\alpha) \in A_{\mathfrak{m}}$, die erzeugt werden können durch ein Element $\alpha \in K^{\times}$, welches total positiv ist und der Kongruenzbedingung $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ genügt. Allgemeiner wird auch jede Untergruppe $H_{\mathfrak{m}} \subset A_{\mathfrak{m}}$, die diesen Hauptstrahl enthält, als eine **Strahlgruppe** modulo $\mathfrak{m}$ bezeichnet; die Faktorgruppe $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ ist die zugehörige **Strahlklassengruppe** modulo $\mathfrak{m}$. Deren Ordnung $h_{\mathfrak{m}} = (A_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}})$ wird **Klassenzahl** genannt.

Zu jeder Strahlgruppe $H_{\mathfrak{m}}$ gehört eine eindeutig bestimmte abelsche Erweiterung $K|k$ welche dadurch gekennzeichnet ist, dass:

(i) die nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primstellen von k unverzweigt sind in K,

(ii) eine nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehende Primstelle $\mathfrak{p}$ genau dann vollzerlegt ist in K, wenn $\mathfrak{p} \in H_{\mathfrak{m}}$.[26]

K heißt der **Klassenkörper** über k mit der zugehörigen Strahlgruppe $H_{\mathfrak{m}}$. Der Grad des Klassenkörpers ist gleich der Klassenzahl:

$$[K : k] = h_{\mathfrak{m}}. \tag{8}$$

Wenn $H_{\mathfrak{m}}$ gleich dem *Hauptstrahl* modulo $\mathfrak{m}$ ist, so spricht man von „dem" **Strahlklassenkörper modulo $\mathfrak{m}$**. Wenn dabei $\mathfrak{m} = 1$ und $H_{\mathfrak{m}}$ aus *allen* Hauptdivisoren besteht, dann spricht man von dem **Hilbertschen Klassenkörper** von k. Er kann gekennzeichnet werden als der maximale

[26] Hierbei sind auch die unendlichen Primstellen von k in gewohnter Weise zu berücksichtigen. Für Details verweisen wir z.Bsp. auf [Has27a]. Zur Vereinfachung der Darstellung werden wir im Folgenden die Einzelheiten, die bei der Berücksichtigung der unendlichen Primstellen zu beachten sind, nicht besonders erwähnen.

unverzweigte abelsche Erweiterungskörper von k. Sein Grad ist gleich der gewöhnlichen Klassenzahl von k.

Die Tatsache, dass zu jeder Strahlgruppe ein zugehöriger Klassenkörper existiert, wird bei Hasse [Has26a] der **Existenzsatz** der Klassenkörpertheorie genannt. Als **Umkehrsatz** bezeichnet man den folgenden, auf Takagi [Tak20] zurückgehenden Satz:

> *Jede abelsche Erweiterung endlichen Grades von k ist Klassenkörper zu einer geeigneten Strahlgruppe $H_{\mathfrak{m}}$.*

Dabei ist der Modul $\mathfrak{m}$ so zu wählen, dass er die in K verzweigten Primstellen von k in hinreichend großer Vielfachheit enthält. Sodann kann $H_{\mathfrak{m}}$ beschrieben werden als diejenige Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$, die erzeugt wird durch den Hauptstrahl und die Normen der Divisoren aus K. Bei Takagi wurde diese Charakterisierung von $H_{\mathfrak{m}}$ in die *Definition* des Klassenkörpers eingebaut, und es ergab sich, dass dies gleichbedeutend ist mit der oben genannten, von Weber stammenden Definition durch die Eigenschaften (i) und (ii).

Es ist möglich, dass verschiedene Strahlgruppen $H_{\mathfrak{m}}$ zu demselben Klassenkörper führen: Sei $\mathfrak{m}'$ ein Vielfaches von $\mathfrak{m}$. Dann ist $A_{\mathfrak{m}'} \subset A_{\mathfrak{m}}$. Der Durchschnitt $H_{\mathfrak{m}'} = H_{\mathfrak{m}} \cap A_{\mathfrak{m}'}$ enthält den Hauptstrahl modulo $\mathfrak{m}'$ und ist also eine Strahlgruppe modulo $\mathfrak{m}'$. Die zugehörigen Strahlklassengruppen sind dabei in natürlicher Weise isomorph: $A_{\mathfrak{m}'}/H_{\mathfrak{m}'} = A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$. In dieser Situation sagt man, das $H_{\mathfrak{m}'}$ und $H_{\mathfrak{m}}$ „gleich“ sind (in Anführungszeichen). Dadurch wird eine reflexive und transitive Relation der „Gleichheit“ in der Menge der Strahlgruppen erzeugt. Und es gilt: *Zwei Strahlgruppen $H_{\mathfrak{m}}$ und $H_{\mathfrak{m}'}$ besitzen dann und nur dann denselben Klassenkörper, wenn sie „gleich“ sind in dem angegebenen Sinne.* Also:

> **Hauptsatz der Klassenkörpertheorie:** *Die abelschen Erweiterungskörper $K|k$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Strahlgruppen von k, wobei letztere im Sinne der oben definierten „Gleichheit“ zu nehmen sind.*

Ist K Klassenkörper zur Strahlgruppe $H_{\mathfrak{m}}$, so nennt man $\mathfrak{m}$ einen **Erklärungsmodul** für K. Der im Sinne der Teilbarkeit kleinste Erklärungsmodul heißt der **Führer** der abelschen Erweiterung $K|k$; jeder andere Erklärungsmodul ist ein Vielfaches dieses Führers.[27] Der Führer ist Teiler der Diskriminante von $K|k$ und enthält dieselben Primdivisoren.

[27] Genau genommen müssen bei der Definition des Führers noch die unendlichen Primstellen berücksichtigt werden. Wir verweisen dazu auf die einschlägige Literatur, z.Bsp. auf Hasses Klassenkörperbericht [Has27a].

Wenn es auf die Wahl des Erklärungsmoduls $\mathfrak{m}$ von $K|k$ nicht ankommt, so schrieb man zu Artins Zeiten einfach H statt $H_{\mathfrak{m}}$ und A/H statt $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$. Das ist sinnvoll, weil es für verschiedene Erklärungsmoduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ einen natürlichen Isomorphismus $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}'}/H_{\mathfrak{m}'}$ gibt.[28]

Auch Artin benutzt in seinen Briefen diese Terminologie: Er sagt „*K sei Klassenkörper nach dem Strahl H*“ und: „*Die Idealklassen von k mögen nach H erklärt werden*“. Manchmal spricht er auch einfach von „*Idealklassen nach K*“ und meint damit die Klassen derjenigen Strahlklassengruppe A/H, die zu K gehört.

Seit Weber und Takagi war bekannt, dass die Strahlklassengruppe A/H als abelsche Gruppe dieselben Invarianten besitzt wie die Galoisgruppe G des zugehörigen Klassenkörpers $K|k$; das impliziert die Existenz eines Isomorphismus $A/H \approx G$. Es war jedoch – außer in Spezialfällen[29] – nicht bekannt, ob und wie ein solcher Isomorphismus kanonisch herstellt werden kann.

Das **Artinsche Reziprozitätsgesetz** *löst nun genau dieses Problem, denn es stellt auf kanonische Weise einen Isomorphismus der Strahlklassengruppe A/H mit der Galoisgruppe von $K|k$ her.*

Und zwar, wie Artin im Brief Nr. 8 darlegt, wird dieser Isomorphismus dadurch gegeben, dass jedem zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Primideal $\mathfrak{p}$ der zugehörige **Frobenius-Automorphismus** in G zugeordnet wird. Allerdings benutzte man damals noch nicht die Terminologie „Frobenius-Automorphismus“. Artin spricht einfach von der „*Substitution, die $\mathfrak{p}$ zugeordnet ist*“, und er bezeichnet sie mit $\sigma_{\mathfrak{p}}$. Definitionsgemäß ist $\sigma_{\mathfrak{p}}$ dadurch gekennzeichnet, dass

$$(9) \qquad \sigma_{\mathfrak{p}}\mathsf{A} \equiv A^{|\mathfrak{p}|} \bmod \mathfrak{p}\,.$$

Hierbei bezeichnet $|\mathfrak{p}|$, wie schon vorher, die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von $\mathfrak{p}$.[30]

Erst Hasse hat im zweiten Teil seines Klassenkörperberichts [Has30a] die Bezeichnung „Frobenius-Symbol“ eingeführt, und er hat dafür die Be-

[28]Heute würden wir A/H als den projektiven Limes der $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ definieren. Im Jahre 1936 erkannte Chevalley [Che36], dass A/H realisiert werden kann als Faktorgruppe der Idelklassengruppe modulo den Normen der Idele aus K.

[29]Siehe dazu Teil II, Abschnitt 5.6, insbesondere Seite 88.

[30]Diese definitorische Relation für den Frobenius-Automorphismus ist nur im Falle einer abelschen Erweiterung $K|k$ korrekt. Im allgemeineren Falle einer galoisschen Erweiterung hat man eine Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ auf K zu wählen, und zu dieser gehört ein Frobenius-Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{P}}$, definiert durch die Kongruenz (9) modulo $\mathfrak{P}$. Verschiedene Fortsetzungen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{p}$ sind konjugiert und daher sind auch die zugehörigen Frobenius-Automorphismen konjugiert, stimmen also im abelschen Falle überein, sodass sich schließlich (9) ergibt.

zeichnung $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ geschaffen[31], in Anlehnung an die klassische, von Legendre stammende Bezeichnung $\left(\frac{q}{p}\right)$ im Zusammenhang mit dem Gaußschen quadratischen Reziprozitätsgesetz.

Die maximale *unverzweigte* abelsche Erweiterung von k wird, wie schon oben gesagt, der **Hilbertsche Klassenkörper** von k genannt, oder auch der **absolute Klassenkörper**. Der zugehörige Erklärungsmodul ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{1}$, und A/H ist die gewöhnliche Idealklassengruppe von k. Das Artinsche Reziprozitätsgesetz stellt einen Isomorphismus der Galoisgruppe mit der Idealklassengruppe her. Ein wichtiges, von Hilbert formuliertes Problem war der Beweis des **Hauptidealsatzes**; dieser besagt, dass jedes Ideal aus k in dem absoluten Klassenkörper zu einem Hauptideal wird. Dieser Satz konnte erst 1927 durch Furtwängler auf der Grundlage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes bewiesen werden; die dahinführende Entwicklung spiegelt sich in dem Briefwechsel Artin-Hasse wider.

[31] Sehr zum Leidwesen der Schriftsetzer mathematischer Arbeiten, die solche Brüche nicht gut in einer Zeile mit normalem Zeilenabstand unterbringen können. In manchen Arbeiten wird daher zur Vereinfachung für den Setzer $(K/\mathfrak{p})$ geschrieben; dies wiederum zum Leidwesen der historisch bewussten Zahlentheoretiker, die den Bezug auf das klassische quadratische Reziprozitätsgesetz auch in der Bezeichnung gewahrt wissen wollen. – Genau genommen ist die Bezeichnung bei Hasse in [Has30a] etwas anders. Den Frobenius-Automorphismus bezeichnet er mit $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]$, wenn $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K ist. Und er führt das „Artin-Symbol" $\left(\frac{K}{\mathfrak{P}}\right)$ als die Konjugationsklasse von $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]$ in der Galoisgruppe ein. Diese Terminologie hat sich jedoch nicht durchgesetzt. In dem hier vorliegenden Fall von abelschen Körper-Erweiterungen stimmt das Artin-Symbol mit dem Frobenius-Symbol überein.

6 Zeittafel

Wir haben nur solche Themen in die Zeittafel aufgenommen, die in dem Briefwechsel Artin–Hasse direkt oder indirekt zur Sprache kommen. Die Jahreszahl bezieht sich auf den Zeitpunkt der Fertigstellung einer Arbeit bezw. des Beweises eines Resultats; dies kann verschieden sein von dem Erscheinungsjahr des Artikels.

1897 **Hilbert:** Zahlbericht.

1898 Geburtsjahr von **Artin** und von **Hasse**.

1899 **Hilbert:** Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers, wobei insbesondere das quadratische Reziprozitätsgesetz als Produktformel für das quadratische Hilbertsche Symbol formuliert wird.

1900 **Hilbert:** Vortrag in Paris, worin er als 9. Problem das Reziprozitätsgesetz für Potenzreste formuliert, zunächst für beliebige ungerade Primzahlexponenten ℓ, dann aber weitergehend auch für eine beliebige Primzahlpotenz ℓ^n als Exponenten.

1902-13 **Furtwängler:** Lösung des Hilbertschen 9. Problems für einen Primzahlexponenten ℓ in mehreren Arbeiten. Dabei auch das Lokal-Global-Prinzip für Normen zyklischer Erweiterungen von Primzahlgrad.

1920-22 **Takagi:** Arbeiten zur Klassenkörpertheorie: In seiner ersten Arbeit (1920) entwickelt Takagi die Klassenkörpertheorie als die Theorie der abelschen Zahlkörper-Erweiterungen. Die zweite Arbeit (1922) zeigt, dass sich auf dieser Grundlage die Resultate von Furtwängler herleiten lassen.

1919-21 **Artin:** Studium in Leipzig (Herglotz); vorher ein Semester 1916/17 in Wien (Furtwängler). 1921 Promotion. Dissertation: Arithmetik der quadratischen Funktionenkörper über $\mathbb{F}_p$ und dabei Formulierung der Riemannschen Vermutung für diese Körper. Nach der Promotion geht Artin für ein Jahr nach Göttingen.

Hasse: Studium in Göttingen 1918/20 (Hecke) und in Marburg 1920/21 (Hensel); vorher ein Semester 1917 in Kiel (Toeplitz). 1921 Promotion. Dissertation: Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ und dabei Formulierung des Lokal-Global Prinzips.

1922/23 **Artin:** Zum WS 1922/23 geht er nach Hamburg als Assistent von Blaschke. 1923 Habilitation in Hamburg. Habilitationsschrift: L-Reihenarbeit.

Hasse: 1922 Habilitation in Marburg. Habilitationsschrift: Quadrati-

sche Formen über Zahlkörpern, einschließlich Lokal-Global-Prinzip. Zum WS 1922/23 geht Hasse nach Kiel als Privatdozent mit Lehrauftrag.

Artin und Hasse treffen sich im September 1922 bei der Jahrestagung der DMV in Leipzig und im März 1923 bei einem Kolloquiumsvortrag von Hasse in Hamburg. Beginn des Briefwechsels Artin–Hasse. Gemeinsame Arbeit: Über den 2. Ergänzungssatz des Reziprozitätsgesetzes bei Primzahlexponent (erschienen 1925).

1924 DMV-Tagung Innsbruck. **Artin:** Theorie der Zöpfe.

Hasse: Explizite Reziprozitätsformeln bei Primzahlexponent. **Emmy Noether:** Primidealzerlegung in Dedekind-Ringen.

1925 **Artin:** a.o. Professor in Hamburg. Er beschäftigt sich jetzt wieder mit Zahlentheorie.

Hasse: o. Professor in Halle. DMV-Tagung in Danzig: Hasses wegweisender Vortrag über die Takagische Klassenkörpertheorie.

1926 **Artin:** o. Professor in Hamburg. Zusammen mit Schreier: Seminar über die Arbeit von Tschebotareff über die Dichte von Primidealen mit gegebener Frobenius-Substitution. Formal reelle Körper. Zyklische Erweiterungen in Charakteristik p.

Hasse: Klassenkörperbericht Teil I. Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz für beliebigen Exponenten m.

1926/27 **Artin:** Vorlesungen über Algebra. Van der Waerden hat die Vorlesung ausgearbeitet und, auf Artins Vorschlag, unter Benutzung dieser Aufzeichnungen das Buch „Moderne Algebra“ geschrieben.

Hasse: Neue Begründung der Theorie der komplexen Multiplikation.

1927 **Artin:** Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Reell abgeschlossene Körper. Beweis seines Reziprozitätsgesetzes, das er schon 1923 in der L-Reihenarbeit formuliert hatte.

Hasse: Klassenkörperbericht Teil Ia (Beweise zu Teil I). Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste als direkte Folgerung aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz, darin Verallgemeinerung des Jacobi-Symbols und des Hilbertschen Normsymbols für beliebigen Exponenten m.

Beginn eines besonders regen Briefwechsels Artin–Hasse über Fragen der Reziprozitätsgesetze. Artin besucht am 13. September 1927 Hasse in Halle. Dabei werden nicht nur Fragen erörtert, die mit Reziprozität und Klassenkörpertheorie zusammenhängen, sondern dies ist auch der Tag, an dem Artin seine berühmt gewordene Vermutung über Primitivwurzeln formuliert.

1928 **Artin:** Drei Arbeiten zur Arithmetik der Algebren: Endliche Schiefkörper, Ringe mit Minimal- und Maximalbedingung, Idealtheorie in Algebren über Zahlkörpern.

Hasse: gemeinsame Arbeit mit Artin über den zweiten Ergänzungssatz für Exponenten ℓ^n.

1929 **Artin:** Hauptidealsatz und gruppentheoretische Verlagerung. Furtwängler: Beweis des gruppentheoretischen Verlagerungssatzes und damit des Hauptidealsatzes.

Hasse: Verallgemeinertes Normsymbol. Lokale Klassenkörpertheorie, zunächst noch als Folge des globalen Reziprozitätsgesetzes von Artin. Führer und Diskriminanten abelscher Körper. (Der Hassesche Teil des Satzes von Hasse-Arf.)

1930 **Artin:** Lokale Beiträge zu den Artinschen L-Reihen. Gruppentheoretische Struktur der Diskriminante bei galoisschen Erweiterungen.

Hasse: Klassenkörperbericht Teil II. Führer und Diskriminanten abelscher Zahlkörper. Lokale Schiefkörper sind zyklisch. Vermutung: Jeder Schiefkörper über einem Zahlkörper ist zyklisch.

1931 **Artin:** Galoisstruktur der Einheiten. Klassifikation der Bewertungen algebraischer Zahlkörper.

Hasse gemeinsam mit **R. Brauer** und **Emmy Noether:** Beweis der Zyklizitäts-Vermutung für Schiefkörper über Zahlkörpern. Lokal-Global-Prinzip für einfache Algebren.

1932 **Artin:** Im Februar Gastvorlesung in Göttingen über das neue Gesicht der Klassenkörpertheorie.

Hasse: Struktur der Brauerschen Gruppe über Zahlkörpern. Die Hasse-Invarianten von einfachen Algebren.

Im Dezember 1932 treffen sich Artin und Hasse in Hamburg. Artin weist Hasse hin auf die Riemannsche Vermutung für Funktionenkörper über endlichen Körpern.

1933 **Hasse:** Im März Beweis der Riemannschen Vermutung im Falle elliptischer Funktionenkörper.

1934 **Hasse:** hält auf Einladung von Artin in Hamburg eine Reihe von Vorträgen über seinen Beweis der Riemannschen Vermutung im Falle elliptischer Funktionenkörper. (Der vollständige Beweis erschien 1936.)

Teil II

Die Briefe

Kapitel 1

1923-1926

1 09.07.1923, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 9. Juli 1923[1]

Lieber Herr Hasse!

Endlich die Antwort werden Sie sagen. Also ich bitte kniefällig um Entschuldigung für mein so spätes Schreiben aber... na Sie kennen mich ja. Ich hatte mir ein so schönes System von Ausreden konstruiert sehe aber, dass das schliesslich keinen Zweck hat.[2] Zunächst meinen besten Dank für Ihre freundliche Einladung. Nun wissen Sie aber, dass ich Samstag Kolleg habe. Ich könnte also erst nachmittag gegen 5 wegfahren, da kein anderer Zug geht. Wenn es Ihnen also passt und ich Sie nicht störe, würde ich nächsten Samstag abends gegen $\frac{1}{2}$ 8^{h} mit dem D-Zug – ich glaube $7^{\mathrm{h}}35$ in Kiel eintreffen. Sollte ich einen früheren Zug finden, so schreib' ich Ihnen noch. Ebenso bitte ich Sie, mir eine Karte zu schreiben, wenn Ihnen etwas dazwischen kommen sollte, wir also die Sache verschieben müssten. Ich komme aber nur wenn ich Ihrer Frau Gemahlin und Ihnen keine Unannehmlichkeiten verursache.

Nun der mathematische Teil.

Zunächst möchte ich zeigen dass man Ihre schöne Formel[3]

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

doch nach meiner Methode[4] herleiten kann und zwar direkt und für beliebige Körper.

k enthalte ζ, ist also Oberkörper vom Kreiskörper $R(\zeta)$. $S_\zeta(\alpha)$ sei die Relativspur von α in bezug auf $R(\zeta)$, S die Absolutspur in k, $\bar{S}$ die in $R(\zeta)$. Dann ist $S(\alpha) = \bar{S}(S_\zeta(\alpha))$.

Nach Takagi (Reziprozitätsgesetz) gilt nun, (§2 Satz 5) unter N_ζ die Relativnorm von α verstanden (in Bezug auf $R(\zeta)$) :

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\ell}{N_\zeta\alpha}\right)$$

[1] Zur Datierung siehe unsere Fußnote 1 in Brief Nr. 2.

[2] Siehe 5.1.

[3] Siehe 5.2, Formel (12).

[4] „Meine Methode“ ist das Umdrehverfahren. Siehe 5.3.

(das rechte Symbol im Kreiskörper genommen).

Nun soll $\alpha \equiv 1 \pmod{\ell\lambda_0}$ sein, also:

$$\alpha = 1 + \gamma\ell\lambda_0 \ .$$

Dann ist

$$N_\zeta\alpha \equiv 1 + S_\zeta(\gamma)\ell\lambda_0 \pmod{\ell^2\lambda_0^2}$$

also:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\ell}{1+S_\zeta(\gamma)\ell\lambda_0}\right) \quad \text{in} \quad R(\zeta) \ .$$

In $R(\zeta)$ gilt aber, wie Sie ja wissen, dass durch das Umdrehverfahren[5]

$$\left(\frac{\ell}{\beta}\right) = \zeta^{\bar{S}\left(\frac{\beta-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

beweisbar ist. So findet man also:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{\bar{S}(S_\zeta(\gamma))} = \zeta^{S(\gamma)} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$$

für beliebige Körper.

Nun aber kommt das Schöne! Die Formel gilt nicht nur für $\alpha \equiv 1 \pmod{\ell\lambda_0}$ sondern sogar schon:

Wenn $\alpha \equiv 1 \pmod{\ell}$ ist, gilt: $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)}$.

Also genau dasselbe. Sie werden sagen, dass im Exponenten keine ganze Zahl steht? Doch! Zunächst ist nach Voraussetzung $\gamma = \frac{\alpha-1}{\ell}$ ganz, also auch $\gamma' = S_\zeta(\gamma)$.

Nach dem Satz von Landsberg hat nun jede Zahl aus dem Ideal $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ ($\mathfrak{d}$ Differente) eine ganze Spur.[6] Also ist $\bar{S}\left(\frac{\gamma'}{\lambda_0}\right) = S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda_0}\right)$ ganz da in $R(\zeta) : \mathfrak{d} = \lambda_0$ ist.

[5] Siehe 5.3.

[6] Heute würden wir dazu auf die Dedekindsche Definition der Differente verweisen. Ende des 19. Jahrhunderts war jedoch eine andere Definition der Differente gebräuchlich, wie sie z.Bsp. Hilbert in seinem Zahlbericht [Hil97] formuliert. Dann ist die Eigenschaft, dass Zahlen aus dem inversen Ideal der Differente ganze Spuren haben, ein Satz. Diesen hat Landsberg [Lan98] bewiesen.

Übrigens stammt diese Formel von Ihnen. Es ist nämlich nach Ihrer zweiten Mitteilung $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{\frac{f'(1)}{a}}$, wenn $\alpha \equiv a \pmod{\ell}$ und α im Kreiskörper liegt. Drücken Sie den Exponenten durch Spuren aus und steigen Sie dann wie vorhin von einem beliebigen Körper zum Kreiskörper herab, so erhalten Sie für beliebige Körper diese Formel. Ist $\alpha \equiv a \pmod{\ell}$ und a rational, so ist einfach α zu ersetzen durch $\frac{\alpha}{a}$. Das ist selbstverständlich.

Um Ihnen noch etwas Neues mitzuteilen: Ich habe jetzt die allgemeinen L-Reihen mit Frobenius'schen Gruppencharakteren gefunden, die bei beliebigen Körpern dasselbe leisten wie die gewöhnlichen L-Reihen bei Abelschen.[7] Mit ihnen die ζ-Relationen in beliebigen Körpern.[8] Nebenbei die Formulierung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes in beliebigen Körpern (ohne dass Einheitswurzel im Körper liegt)[9] und Beweis bei Primzahlgrad. Ferner eine Vermutung (bestimmter Form) über das Zerlegungsgesetz der in der Diskr[iminante] aufgehenden Primzahlen eines Körpers mit einfacher Gruppe – sagen wir mal des Ikosaederkörpers.[10] Die Arbeit ist schon im Druck, vielleicht kann ich Ihnen Samstag schon Fahnen zeigen. Wenn also noch etwas dazwischen kommt – Karte genügt. Mit herzlichen Grüssen und Handküssen an Frau Gemahlin

Ihr Artin

---

[7] Siehe 5.6.

[8] Dies schließt an eine frühere Arbeit von Artin an: [Art23a] wo die Zetarelationen von u.a. den auflösbaren Körpern untersucht wurden.

[9] Siehe Seite 51.

[10] Wir wissen nicht, um welche Vermutung es sich hier handelt. In der Arbeit [Art23b] über L-Reihen haben wir keine Vermutung dieser Art gefunden. Jedenfalls zeigt diese Briefstelle, dass Artin an der Suche nach Zerlegungssätzen für nicht-abelsche Körpererweiterungen interessiert ist. Das wurde damals als eine Hauptaufgabe der algebraischen Zahlentheorie angesehen, und wir werden Hinweise darauf auch in anderen Briefen Artins finden. Zum Ikosaederkörper siehe auch 37.1.

2 09.07.1923, Postkarte von Artin an Hasse

Lieber Herr Hasse! 9. Juli 23[1]

Ich muss durch die Hitze ganz dumm geworden sein. Die Formel in meinem Brief ist natürlich Unsinn; Rechenfehler! Sie lautet vielmehr:

In jedem Körper gilt

Ist $\alpha \equiv 1 \pmod{\ell}$ so ist:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda} - \frac{\alpha-1}{2\ell}\right)}, \qquad \lambda = 1 - \zeta$$

Jetzt ist sie richtig. Die 2 im Nenner des zweiten Bruches schadet nichts $\left(= \frac{\ell-1}{2}\right)$.

Sie bestätigen sie im Kreiskörper leicht auf Grund Ihrer Formel woraus sie sofort nach der in meinem Brief angegebenen Methode für beliebige Körper folgt. Für $\alpha \equiv 1 \pmod{\ell\lambda_0}$ geht sie unmittelbar in ihre vorige Formel über. Eben sah ich dass kein andrer Zug geht. Ich komme also Samstag abends, $7^{\mathrm{h}}35$ mit dem D-Zug. (Knapp vorher kommt ein Personenzug an mit dem ich natürlich nicht fahre.)

Also auf baldiges Wiedersehn.

Herzlichst

Ihr Artin

[1] Es gibt Fragen zur Datierung. Der Poststempel auf dieser Postkarte zeigt das Datum 7.7.23. Auf der Karte selbst ist der 9. Juli 23 eingetragen, aber wie es scheint nicht in der Handschrift von Artin. Vielleicht bedeutet das den Eingang der Karte bei Hasse? Hinzu kommt, dass die Karte offenbar *nach* dem Brief Nr. 1 abgeschickt wurde, dass aber jener Brief von Artin selbst auf den 9. Juli 1923 datiert wurde. Wir halten es für durchaus möglich, dass Artin, der auch bei Datierungen anderer Briefe nicht sehr genau war, im Brief Nr. 1 versehentlich ein falsches Datum eingesetzt hat. Dann hätte er den Brief also mit der unrichtigen Datierung schon am 7.7. abgeschickt und noch am selben Tag, als er seinen Fehler in der Formel für $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ bemerkt hatte, die undatierte Postkarte mit der Korrektur hinterher geschickt, die dann am 9.7. bei Hasse eintraf. (Dazwischen lag ein Sonntag.)

3 Datum unbekannt, Brief von Artin an Hasse

Zum II Ergänzungssatz III.

Lieber Herr Hasse!

Hoffentlich ist diese dritte Mitteilung die letzte! Ich möchte Ihnen aber noch eine Formel mitteilen die wohl die wahre ist:

In jedem Körper gilt für:

$$\alpha \equiv 1 \left(\bmod \lambda^{\frac{\ell+1}{2}}\right),$$

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^{\ell}}\right)}, \qquad \lambda = 1-\zeta\,.$$

Hier ist also der Exponent bis auf $\frac{\ell+1}{2}$ herabgedrückt.

Es genügt, wie aus meinem Brief folgt, die Formel für den Kreiskörper zu beweisen.

I.) $S(\lambda^{\nu}) = \ell$ für $1 \leq \nu \leq \ell - 1$ wie Sie leicht nachrechnen.

II.) Setzen wir $\varepsilon = \frac{\lambda^{\ell-1}}{\ell}$, so ist ε eine Einheit. Nun genügt λ der Gleichung $(\lambda-1)^{\ell}+1=0$. Ausgerechnet und durch $\lambda\ell$ dividiert findet man:

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\ell}\binom{\ell}{\nu}\lambda^{\nu-1} = 0$$

Für $1 \leq \nu \leq \ell-1$ ist nun $\frac{(-1)^{\nu-1}}{\ell}\binom{\ell}{\nu} \equiv \frac{1}{\nu} \pmod{\ell}$. Dies gibt:

$$\sum_{\nu=1}^{\ell}\frac{1}{\nu}\lambda^{\nu-1} \equiv -\varepsilon \pmod{\ell}\,. \qquad \text{Also:}$$

$$\varepsilon \equiv -1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}\lambda^2 - \ldots - \frac{1}{\ell-1}\lambda^{\ell-2} \pmod{\ell}\,.$$

III.) Sei $s \geq \dfrac{\ell+1}{2}$. Dann ist $\left(\dfrac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \zeta^{-1} \quad (s \leq \ell)$.

Beweis:

$$\left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \left(\frac{\varepsilon\lambda^s}{1+\varepsilon\lambda^s}\right)^{-1}\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon\lambda^s}\right)^{s-1+\ell}$$

(Nach Multiplikationsregel)

$$= \left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon\lambda^s}\right)^{s-1}$$ Da der erste Faktor ersichtlich 1 ist (Kongruenz nach Nenner).

$$\begin{aligned}
1+\varepsilon\lambda^s &\equiv 1-\lambda^s-\frac{1}{2}\lambda^{s+1}-\frac{1}{3}\lambda^{s+2}\ldots-\frac{1}{\ell-s+1}\lambda^\ell \pmod{\lambda^{\ell+1}}\\
&\equiv (1-\lambda^s)(\left(1-\frac{1}{2}\lambda^{s+1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\lambda^{s+2}\right)\ldots\\
&\quad\ldots\left(1-\frac{1}{\ell-s+1}\lambda^\ell\right) \pmod{\lambda^{\ell+1}}
\end{aligned}$$

(wegen $s \geq \dfrac{\ell+1}{2}$), also weiter (p -adik !!!)

$$\begin{aligned}
&\equiv (1-\lambda^s)(1-\lambda^{s+1})^{1/2}(1-\lambda^{s+2})^{1/3}\ldots\\
&\quad\ldots(1-\lambda^\ell)^{\frac{1}{\ell-s+1}} \pmod{\lambda^{\ell+1}})\,.
\end{aligned}$$

Demnach, da für $s<\ell$ gilt $\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda^s}\right)^s = \left(\dfrac{\lambda^s}{1-\lambda^s}\right) = 1$, also $\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda^s}\right) = 1$:

$$\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^\ell}\right)^{\frac{1}{\ell-s+1}},$$

folglich:

$$\left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^\ell}\right)^{\frac{s-1}{-s+1}} = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^\ell}\right)^{-1}.$$

Rechte Seite unabhängig von s. Also können wir $s = \ell$ setzen und erhalten nach Ihrer Formel:

$$\left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^\ell}\right) = \zeta^{S(\frac{\varepsilon\lambda^\ell}{\ell\lambda})} = \zeta^{S(\varepsilon^2)} .$$

Nun ist:

$\varepsilon^2 \equiv 1 \pmod{\lambda}$ also $S(\varepsilon^2) \equiv -1 \pmod{\ell}$, $(S(1) = \ell - 1)$.

Demnach:

$$\left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right) = \zeta^{-1} \quad \text{für} \quad s \geq \frac{\ell+1}{2} .$$

IV.) Sei $\alpha \equiv 1(\lambda^\ell)$: $\alpha = 1 + \gamma\lambda^\ell$. Dann ist wie sie sofort bestätigen $\gamma \equiv -S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell}\right) \pmod{\lambda}$, also:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 1 - S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell}\right)\lambda^\ell \pmod{\lambda^{\ell+1}} \\ &\equiv (1+\lambda^\ell)^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell})} \pmod{\lambda^{\ell+1}} . \end{aligned}$$

Nach Ihrer Formel etwa und wegen I folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{1+\lambda^\ell}\right) &= \zeta^{S(\frac{\lambda^\ell}{\lambda\ell})} = \zeta^{\frac{1}{\ell}S(\lambda^{\ell-1})} = \zeta , \quad \text{also:} \\ \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) &= \left(\frac{\ell}{1+\lambda^\ell}\right)^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell})} = \zeta^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell})} . \end{aligned}$$

V.) Sei $s \geq \frac{\ell+1}{2}$, $s \leq \ell - 1$. Es sei bewiesen, dass für $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^{s+1}}$ gilt $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell})}$. (Dies ist der Fall für $s = \ell - 1$ wegen IV. Daher Induktion.)

Nun sei $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^s}$), $\alpha = 1 + \varepsilon\gamma\lambda^s$, wo ε unsere Einheit ist. Es ist:

$$\varepsilon\gamma = \frac{\alpha-1}{\lambda^s} \equiv -S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right) \pmod{\lambda} .$$

Da $\varepsilon \equiv -1 \pmod{\lambda}$, $\gamma \equiv S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)$. Also:

$$\alpha \equiv 1 + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)\varepsilon\lambda^s \pmod{\lambda^{s+1}}.$$

Wir setzen:

$$\beta = \alpha\left(1 - S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)\varepsilon\lambda^s\right) \equiv 1 \pmod{\lambda^{s+1}}.$$

Ferner ist $\beta = \alpha - \alpha S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)\varepsilon\lambda^s \equiv \alpha - S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)\varepsilon\lambda^s \pmod{\lambda^{\ell+1}}$, (wegen $s \geq \frac{\ell+1}{2}$). Also haben wir:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\ell}{\beta}\right) \quad \left(\frac{\ell}{1 - S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})\varepsilon\lambda^s}\right)^{-1} .$$

a.) $1 - S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^s}\right)\varepsilon\lambda^s \equiv (1+\varepsilon\lambda^s)^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})} \pmod{\lambda^{\ell+1}}$, (wegen $s \geq \frac{\ell+1}{2}$) also

$$\left(\frac{\ell}{1 - S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})\varepsilon\lambda^s}\right)^{-1} = \left(\frac{\ell}{1+\varepsilon\lambda^s}\right)^{S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})} = \zeta^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})} .$$

b.) $\left(\frac{\ell}{\beta}\right) = \left(\frac{\ell}{\alpha - S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})\varepsilon\lambda^s}\right)$. Also wegen $\beta \equiv 1\ (\lambda^{s+1})$ nach Voraussetzung

$$= \zeta^{-S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell} - S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})\frac{\varepsilon\lambda^s}{\lambda^\ell}\right)} =$$

$$= \zeta^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell}) + S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})S(\frac{\lambda^{s-1}}{\ell})} .$$

Nach I ist $S\left(\frac{\lambda^{s-1}}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell}S(\lambda^{s-1}) = 1$, also:

$$\left(\frac{\ell}{\beta}\right) = \zeta^{-S(\frac{\alpha-1}{\lambda^\ell}) + S(\frac{\alpha-1}{\lambda^s})} .$$

a.) b.) geben zusammen:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-S(\frac{\alpha - 1}{\lambda^\ell})},$$

wenn $\alpha \equiv 1 \quad (\lambda^s)$. Damit ist alles bewiesen. Die Formel enthält alle vorigen Fälle, wie Sie leicht sehen können.

Recht herzliche Grüsse

Ihr Artin

N.B. Das Rekurieren auf die frühere Formel lässt sich natürlich auch vermeiden. Ebenso ist der Exponent ganz nach dem Satze von Landsberg.[1] $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}^{\ell-2}$.

[1]Siehe Fußnote 6 im Brief Nr. 1.

4 Datum unbekannt, Brief von Artin an Hasse

Zum II Ergänzungssatz VII.[1]

Lieber Herr Hasse!

Zunächst meinen besten Dank für Ihren Brief. Selbstverständlich ist Ihre Herleitung einfacher. Ich bin aber unterdessen zu einer allgemeinen Formel für jedes *semiprimäre* α gelangt, wenn also $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$ (also ebensogut $\equiv$ rat[ionale] Zahl (λ^2).) Damit ist im Kreiskörper der Ergänzungssatz erledigt, da dort jede Zahl durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel semiprimär wird. Die Formel bezieht sich aber nicht auf den Zähler ℓ, sondern auf den Zähler λ. Sie lautet: (Körper beliebig)

Für jedes
$\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$ ist: $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum_{\nu=1}^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} S\left(\zeta \frac{(\alpha-1)^\nu}{\ell\lambda}\right)}$
ζ Einheitswurzel, $\lambda = 1-\zeta$.

Beweis: Ich setze wie bei Ihnen: (Die Entwicklungs*möglichkeit* ist leicht einzusehen)

$$\alpha \equiv (1-\lambda^2)^{c_2}\ (1-\lambda^3)^{c_3} \dots (1-\lambda^\ell)^{c_\ell} \pmod{\lambda^{\ell+1}} .$$

Das Glied $1-\lambda$ kommt nicht vor, da $\alpha \equiv 1\ \ (\lambda^2)$.

Man nehme beiderseits den Logarithmus und entwickle in Reihen. Wir suchen rechts das Glied mit λ^ℓ. Die rechte Seite lautet:

$$-\sum_{n=2}^{\ell} c_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n\nu}}{\nu}\right) .$$

[1]Die vorangegangene Mitteilung trägt die Nummer III, während diese die Nummer VII trägt. Es fehlen also drei Nummern. Wenn man nicht annimmt, dass Artin inzwischen noch drei weitere Briefe geschickt hatte, die verloren gegangen sind, dann ist es nicht unwahrscheinlich, dass die Lücken in der Numerierung sich auf Briefe von Hasse beziehen.

Da $n \geq 2$ ist (hier wird wieder das semiprimär gebraucht) kommen, weil ℓ Primzahl ist, für $n \neq \ell$ nur die Glieder $\frac{\lambda^{2\ell}}{2\ell}, \frac{\lambda^{3\ell}}{3\ell}, \ldots$ in Frage. Sie enthalten aber ersichtlich höhere Potenzen von λ. Bleibt also nur $n = \ell, \quad \nu = 1$. Der Koeffizient rechts von λ^ℓ ist also $-c_\ell$. Die linke Seite sieht so aus:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\alpha - 1)^\nu \ .$$

Für das Glied mit λ^ℓ kommen aber, da $\alpha - 1$ durch λ^2 teilbar ist, nur die Glieder bis $\nu = \frac{\ell - 1}{2}$ in Frage. (Auch $\nu = \ell$ ist nicht notwendig trotz des Nenners.)

$-c_\ell$ ist also das Glied mit λ^ℓ in

$-\beta = \sum_{\nu=1}^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\alpha - 1)^\nu$. (β ist durch λ^2 teilbar, was wir gleich brauchen)

Sei nun:

$$\beta \equiv c'_2\lambda^2 + c'_3\lambda^3 + \ldots + c'_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + c_\ell\lambda^\ell \pmod{\lambda^{\ell+1}}$$

Dann ist:

$$\frac{1}{\ell} S(\frac{\beta}{\lambda}) \equiv c'_2 + c'_3 + \ldots + c'_{\ell-1} + c_\ell \qquad (\text{mod}\, \lambda, \text{ also mod}\, \ell)$$

$$\frac{1}{\ell} S(\frac{\beta}{\lambda}) \equiv c'_2 + c'_3 + \ldots + c'_{\ell-1} \qquad (\text{wegen } S(\lambda^\ell) \equiv 0(\ell^2))$$

[Randnotiz von Artin:] Ich mache langsam Fortschritte in ℓ-adik. Nun logarithmiere ich schon!

Also:

$$c_\ell = S(\frac{\beta}{\ell\lambda}) - S(\frac{\beta}{\ell}) = S\left(\frac{\beta}{\ell\lambda}(1 - \lambda)\right) = S(\zeta\frac{\beta}{\ell\lambda}) \ .$$

Nun ist wie Sie wissen:

$$(\frac{\lambda}{\alpha}) = (\frac{\lambda}{1 - \lambda^\ell})^{c_\ell} = \zeta^{c_\ell}$$

Also:

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum_{\nu=1}^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} S\left(\zeta \frac{(\alpha-1)^{\nu}}{\ell\lambda}\right)}$$

[Randnotiz von Artin:] Als ℓ-adiker können Sie schreiben: $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{-S(\frac{\zeta}{\ell\lambda}\log\alpha)}$ für $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$. Hoffentlich ist nicht wieder ein Rechenfehler passiert, es ist sehr heiss!

Daraus in bekannter Weise in beliebigen Körpern.

Dass Potenzen eine Rolle spielen ist kein Wunder, siehe $\ell = 2$.

Diese Formel scheint mir die endgültige zu sein. Hoffentlich gelingt etwas ähnliches beim allgemeinen Reziprozitätsgesetz.

Ich kann bis Dienstag bleiben, werde also, wenn Sie mich so lange bei Ihnen dulden, etwa Montag abend wegfahren. Ich freu mich schon sehr darauf wieder mal mit Ihnen beisammen zu sein. Hoffentlich ist das Wetter gut.

Mit herzlichen Grüssen an alle Bekannten

Ihr

E. Artin

5 12.07.1923, Postkarte von Artin an Hasse

12. Juli 1923 [1]

Lieber Herr Hasse!

VIII.) [Zur] Umrechnung von $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum\limits_{\nu=1}^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} S\left(\frac{(\alpha-1)^\nu}{\ell\lambda}\zeta\right)}$ für $\alpha \equiv 1(\lambda^2)$ auf $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ bilden Sie $\left(\frac{\lambda_\mu}{\alpha}\right) = \left(\frac{1-\zeta^\mu}{\alpha}\right)$ indem Sie ζ durch ζ^μ ersetzen. $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ ist das Produkt über diese Symbole. Um es zu vereinfachen, ist noch $X = \sum\limits_{\mu=1}^{\ell-1} \frac{\mu\zeta^\mu}{1-\zeta^\mu}$ modulo $\lambda^{\ell-2}$ auszudrücken, wie Sie erkennen, da $\alpha - 1$ durch λ^2 teilbar ist. Nun ist ersichtlich:

$$\begin{aligned} X &= -\zeta\left(\frac{d}{dx}\log\prod_{\mu=1}^{\ell-1}(1-x^\mu)\right)_{x=\zeta} = \\ &= -\zeta\left(\frac{d}{dx}\left[\log\frac{\prod(1-x^\mu)}{\prod(1-x)} + (\ell-1)\log(1-x)\right]\right)_{x=\zeta} \\ &\equiv +\zeta\left(\frac{d}{dx}\log\varepsilon(x)\right)_{x=\zeta} - \frac{\zeta}{1-\zeta} \pmod{\ell}\ , \end{aligned}$$

wo $\varepsilon(x)$ aus $\varepsilon = \frac{\lambda^{\ell-1}}{\ell}$ entsteht, wenn ζ durch x ersetzt wird. Der Ausdruck hängt noch ab von der Art und Weise wie ε durch ζ ausgedrückt werden. Zwei verschiedene $\varepsilon(x)$ sind aber $\mathrm{mod}(x^\ell - 1)$ kongruent, ihre Differentialquotienten unterscheiden sich nur um $x^\ell - 1$ oder $\ell x^{\ell-1}$. Für $x = \zeta$ also kongruent. Nun ist also:

[1] Poststempel vom 12. Juli 1923

$$\begin{aligned}
X &\equiv \frac{+\zeta}{\varepsilon}\frac{d}{dx}\left(-1-\frac{\lambda_x}{2}-\frac{\lambda_x^2}{3}-\ldots\cdot\frac{\lambda_x^{\ell-2}}{\ell-1}\right)_{x=\zeta}-\frac{\zeta}{\lambda} \pmod{\ell}, \\
&\quad \text{wo } \lambda_x = 1-x\ . \\
X &\equiv +\frac{\zeta}{\varepsilon}\left(+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\lambda+\frac{3}{4}\lambda^2+\ldots+\frac{\ell-2}{\ell-1}\lambda^{\ell-3}\right)-\frac{\zeta}{\lambda} \pmod{\ell} \\
&\equiv -\frac{\zeta}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2+\ldots+\frac{1}{\ell-1}\lambda^{\ell-3}-1-\lambda-\ldots-\lambda^{\ell-3}\right)-\frac{\zeta}{\lambda} \\
&\quad \pmod{\ell} \\
&\equiv \frac{\zeta}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon+1}{\lambda}+\frac{1-\lambda^{\ell-2}}{\zeta}\right)-\frac{\zeta}{\lambda} \quad (\text{mod } \frac{\ell}{\lambda}) \\
&\quad \left(\text{wegen } \frac{\varepsilon+1}{\lambda} \text{ nicht modulo } \frac{\ell}{\lambda}, \text{ also nicht modulo } \ell\right) \\
&\equiv \frac{\zeta}{\varepsilon\lambda}+\frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varepsilon\lambda} \pmod{\lambda^{\ell-2}}\ .
\end{aligned}$$

[Also:] $\boxed{X \equiv \frac{1}{\varepsilon\lambda} \pmod{\lambda^{\ell-2}}.}$

Oder: $X \equiv \frac{\ell}{\lambda^\ell} \pmod{\lambda^{\ell-2}}$. So erhalten Sie die Formel:

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda^2} : \boxed{\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{-\sum_{\nu=1}^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} S\left(\frac{(\alpha-1)^\nu}{\lambda^\ell}\right)}}$$

Die Formel ist formal einfacher, rechnerisch aber komplizierter als die andere, der höheren λ-Potenzen (negative) wegen. Sie enthält die im vorletzten Brief gegebene Formel. Sie werden über mein dauerndes Bombardement schon böse sein.

Also auf Wiedersehn und herzliche Grüsse

Ihr Artin

Kommentare zu den Briefen Nr.1-5:

Die ersten 5 Briefe sind innerhalb weniger Tage verfasst worden, und sie beziehen sich alle auf das Konzept der gemeinsamen Arbeit von Artin und Hasse über den zweiten Ergänzungssatz für einen ungeraden Primzahlexponenten ℓ.[2] Sie können daher als eine Einheit betrachtet werden, und sie werden demgemäß gemeinsam kommentiert.

5.1 Die Vorgeschichte

Im Brief Nr. 1 entschuldigt sich Artin als erstes für seine verspätete Antwort. Also gab es vorher einen Brief von Hasse an Artin. Aber die Art von Artins Antwort lässt vermuten, dass es sich nicht um einen ersten Informationsaustausch handelt. Vielmehr gewinnen wir den Eindruck, dass ein intensiver Meinungsaustausch vorangegangen war, und dass dieser Brief, zusammen mit den folgenden 4 Briefen der nächsten Tage, nur die Fortsetzung einer Diskussion ist, die schon vorher begonnen hatte.

Wie bereits in der „Introduction" erwähnt, war Hasse am 1. März 1923, also etwa vier Monate vor dem Brief Nr. 1, zu einem Vortrag im Hamburger Kolloquium eingeladen. Hasses Vortragsthema in Hamburg waren die expliziten Reziprozitätsgesetze für einen Primzahlexponenten ℓ. Wir wissen das aus einem Brief, den Hasse noch am Vorabend seiner Abreise nach Hamburg, also am 28. Februar 1923, an Hensel nach Marburg schrieb:

> *Eben vor meiner Abreise noch die erfreuliche Mitteilung, daß das Reziprozitätsgesetz für ℓ-te Potenzreste sich ebenso schön erweitern läßt, wie ich es Ihnen neulich für die quadratischen Reste schrieb. Näheres bald mündlich ... Morgen trage ich in Hamburg meine Resultate über die Reziprozitätsgesetze vor.*

In den ersten fünf Briefen der Artin–Hasse-Korrespondenz geht es um den sogenannten „zweiten Ergänzungssatz" zum Reziprozitätsgesetz für einen Primzahlexpoenten ℓ. Wahrscheinlich hatte sich dieses Thema im Anschluss an den Hasseschen Kolloquiumsvortrag über Reziprozitätsgesetze ergeben. Es wäre daher wünschenswert, wenn wir genaueres über den Inhalt dieses Vortrages wüssten. Worüber hatte Hasse im einzelnen gesprochen? Hasse hat seine Kolloquiumsvorträge stets sorgfältig vorbereitet; wir haben dazu viele Manuskripte im Nachlass gefunden. Aber leider fand sich darunter kein

[2] Siehe dazu 4, Seite 47.

Manuskript zu seinem Hamburger Vortrag am 1. 3. 1923. So sind wir darauf angewiesen, aus den Hasseschen Publikationen dieser Zeit das Vortragsthema zu rekonstruieren.

5.2 Hasses Vortrag in Hamburg

In den Bänden 193 (1924) und 194 (1924/25) des Crelleschen Journals finden wir acht Arbeiten von Hasse zum Reziprozitätsgesetz. Es ist aber nicht sicher, welche dieser Resultate er wirklich in Hamburg vorgetragen hat. Immerhin dürften uns diese Arbeiten einen gewissen Anhaltspunkt geben, wie denn die Zusammenarbeit, die wir in den ersten fünf Briefen vom Juli 1923 sehen, sich entwickelt haben mag. Im übrigen gibt es ein Manuskript Hasses über seinen Kolloquiumsvortrag in Marburg im September 1923, also einige Monate später. Wir wissen zwar nicht, ob einige der dort erwähnten Resultate erst nach dem 1. März gefunden wurden und also im Hamburger Vortrag noch nicht zur Sprache gekommen waren. Aber wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir uns auch an jenem Manuskript orientieren.

Die in Rede stehenden Arbeiten Hasses sind motiviert durch das Bestreben, das Hilbertsche Normsymbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ *lokal im Rahmen der Henselschen* $\mathfrak{p}$*-adischen Theorie* zu verstehen, d.h. zu definieren, die charakteristischen Eigenschaften herzuleiten und daraufhin auch explizite Formeln zu gewinnen. Wenn $\mathfrak{p}$ kein Teiler des Exponenten m ist, dann lässt sich das Hilbert-Symbol auf Grund der Formel (5) auf Seite 45 unmittelbar auf das lokal definierte Jacobi-Symbol (1) auf Seite 42 zurückführen. Das eigentliche Problem entsteht also für diejenigen Primdivisoren, die Teiler von m sind. In diesen Fällen wurde bislang das Hilbertsche Symbol indirekt definiert, mit Hilfe des globalen allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. Hasse aber will, wie gesagt, die Untersuchung rein lokal führen.

Hasse diskutiert in diesen Arbeiten nur den Fall eines Primzahlexponenten $m = \ell$; das entsprach dem damaligen Wissensstand bevor Artins Reziprozitätsgesetz gefunden wurde. Der Fall $\ell = 2$ ist ein Sonderfall, der einige zusätzliche überlegungen erfordert; der Einfachheit halber wollen wir uns hier auf den Fall $\ell > 2$ beschränken. Es wird angenommen, dass der zu untersuchende Körper k die ℓ-ten Einheitswurzeln enthält. Die Primteiler von ℓ im Körper k werden bei Hasse und auch in den Briefen von Artin stets mit $\mathfrak{l}$ bezeichnet; wir wollen das hier auch tun. Das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ setzt sich vermöge $\mathfrak{l}$-adischer Stetigkeit auf die komplette Hülle fort und daher kann, soweit die Diskussion lokal verläuft, k durch den zugehörigen

Henselschen Körper ersetzt werden, d.h. durch seine $\mathfrak{l}$-adische Komplettierung $k_{\mathfrak{l}}$.

In den ersten 3 Arbeiten [Has24c, Has25c, Has25f] versucht Hasse das Hilbertsche Symbol durch lokale Eigenschaften festzulegen. Es sei ζ eine primitive ℓ-te Einheitswurzel. Hasse setzt das Hilbertsche Symbol in der Form $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta^L$ an, sodass es nun auf die Festlegung von $L = L(\alpha,\beta)$ ankommt. Zunächst stellt Hasse fest, dass $L(\alpha,\beta)$ eine schiefsymmetrische Form auf dem $\mathbb{F}_\ell$-Vektorraum $k_{\mathfrak{l}}^\times/k_{\mathfrak{l}}^{\times\ell}$ ist, und zwar nichtausgeartet, d.h. mit nichtverschwindender Determinante. Die Dimension dieses Vektorraums ist $2+r$, wobei r der Grad von $k_{\mathfrak{l}}$ ist; dies Resultat ist im wesentlichen Hensel zu verdanken, der bereits 1916 in [Hen16] explizit eine Basis der multiplikativen Gruppe $k_{\mathfrak{l}}^\times$ angegeben hatte. Durch Transformation auf eine Normalform stellt Hasse fest, dass die Form L bis auf einen konstanten Faktor *eindeutig bestimmt* ist, d.h. bis auf eine Normierung der gewählten Einheitswurzel ζ. Ihm gelingt diese Normierung in [Has25f] durch rein lokale Überlegungen im Falle, dass die absolute Verzweigungsordnung von $k_{\mathfrak{l}}$ nicht durch ℓ teilbar ist, also insbesondere für den Körper der ℓ-ten Einheitswurzeln. Wenn das nicht der Fall ist, dann bleibt dies Problem offen, d.h. zur Normierung muss Hasse zunächst noch das globale Reziprozitätsgesetz heranziehen.

Nach diesen allgemeinen Sätzen kommt Hasse in [Has24b] auf *explizite Formeln* zu sprechen. Zunächst erhält er für den *Umkehrfaktor*:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\cdot\frac{\beta-1}{\lambda}\right)} \tag{10}$$

$$\text{wenn} \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & \equiv & 1 \bmod \ell \\ \beta & \equiv & 1 \bmod \lambda \end{array} \right\} \text{und}\,(\alpha,\beta) = 1$$

wobei:

ζ eine primitive ℓ-te Einheitswurzel im Körper k,
$\lambda = 1-\zeta$,
S die Spur von $k|\mathbb{Q}$.

Und dann weiter für den *ersten Ergänzungssatz*:

$$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell}\right)} \qquad \text{wenn} \qquad \alpha \equiv 1 \bmod \ell \tag{11}$$

und für den *zweiten Ergänzungssatz*:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda}\right)} \qquad \text{wenn} \qquad \alpha \equiv 1 \bmod \ell\lambda\,. \tag{12}$$

Der auf der rechten Seite bei ζ jeweils auftretende Exponent $S(\cdots)$ ist eine ganze Zahl, auf die es nur modulo ℓ ankommt.

Hasse führt die Beweise durch Heranziehung der bereits oben erwähnten Henselschen Basis von $k^\times/k^{\times\ell}$ und detaillierte Diskussion der Eigenschaften dieser Basiselemente.

Diese Arbeit [Has24b] erschien erst 1924 in Band 154 des Crelleschen Journals. Hasse hat aber darüber bereits im September 1923 in Marburg vorgetragen, wie sein Vortragsmanuskript ausweist. Anscheinend hatte er diese Ergebnisse schon am 1. März 1923, als er in Hamburg vortrug, aber vielleicht noch nicht alle ausgearbeiteten Beweise.

Für uns ist der zweite Ergänzungssatz (12) von Interesse, weil sich die in Rede stehenden fünf Briefe von Artin darauf beziehen.

5.3 Artins Umdrehverfahren

In dem Beweis von (12) in Hasses Arbeit [Has24b] findet sich eine Stelle, wo es heißt:

> *Das Symbol $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ läßt sich nun unter Verwendung einer im Prinzip von Herrn E. Artin herrührenden Schlußweise folgendermaßen bestimmen...*

Und am Schluss der Arbeit findet sich ein Anhang, betitelt „Anmerkung", wo es heißt:

> *Herr E. Artin teilte mir kürzlich ein einfaches Rekursionsverfahren mit, das gestattet, im Falle des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im rationalen Körper und des kubischen im Kreiskörper der dritten Einheitswurzeln den zweiten Ergänzungssatz aus dem allgemeinen Gesetz zu erschließen, und somit andeutet, dass der in der Hilbert-Furtwänglerschen Theorie stets besonders schwer zu beweisende zweite Ergänzungssatz auch im allgemeinen als nicht tieferliegend anzusehen ist, als das allgemeine Reziprozitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz. In einer gemeinsamen Besprechung konnten wir dann dies Verfahren auf den Kreiskörper der ℓ-ten Einheitswurzeln übertragen. Des Interesses halber teile ich die einfachen Überlegungen, denen der Hauptschluss bei meinem obigen Beweis entnommen ist, hier mit ...*

Demgemäß stellen wir uns die Situation so vor:

Ob nun Hasse im Hamburger Kolloquium am 1. März schon einen Beweis von (12) vorgetragen hat, oder ob er in privater Diskussion lediglich seine Beweisidee erläuterte, jedenfalls hat er wohl darauf hingewiesen, dass der zweite Ergänzungssatz besonders schwer zu beweisen sei. Daraufhin hat ihm Artin erzählt, dass es in den Fällen $\ell = 2$ und $\ell = 3$ ein Verfahren gibt, das er „Umdrehverfahren" nannte, und das es gestattet, den zweiten Ergänzungssatz (12) in einfacher Weise auf das allgemeine Reziprozitätsgesetz (10) und den ersten Ergänzungssatz (11) zurückzuführen. In der anschließenden Diskussion stellten dann beide fest, dass dieses Umdrehverfahren für einen beliebigen Primzahlexponenten ℓ funktioniert, jedenfalls wenn es sich um den Einheitswurzelkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ handelt. Später, bei der Anfertigung des Manuskripts [Has24b] gelang es Hasse, dieses Verfahren in seinen Beweis einzubauen, der sich ja nicht nur auf den Einheitswurzelkörper bezieht, sondern auf einen beliebigen Oberkörper $k \supset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$. Als er dann dieses Manuskript an Artin schickte, antwortete dieser ihm, wie wir das in dem Brief Nr. 1 lesen:

> „*Zunächst möchte ich zeigen dass man Ihre schöne Formel doch nach meiner Methode herleiten kann und zwar direkt und für beliebige Körper.*"

Daraus entnehmen wir:

1. Weil Artin von „*Ihrer schönen Formel*" spricht, womit er offenbar (12) meint, hatte Hasse diese Formel schon erhalten und sie Artin mitgeteilt.
2. „*meine Methode*" bedeutet das Artinsche Umdrehverfahren.
3. Wenn Artin schreibt, dass man seine Methode „*direkt*" benutzen kann, so bedeutet das, dass kein Umweg über eine andere Theorie nötig ist. Vielleicht betrachtete Artin zunächst die Anwendung der Henselschen lokalen Methode, die sich bei Hasse findet, als einen solchen Umweg.
4. „*für beliebige Körper*" bedeutet genauer: beliebige Zahlkörper, welche die ℓ-ten Einheitswurzeln enthalten. Offenbar gab es vorher eine Diskussion darüber, ob das Umdrehverfahren wirklich alle solchen Körper erfasst oder nur bei dem Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ anwendbar ist.

Die Zurückführung von einem „beliebigen" Körper k auf den Einheitswurzelkörper erledigt Artin in seinem Brief einfach durch einen Verweis auf Takagi, der das funktorielle Verhalten des Jacobischen Symbols bei änderung des Grundkörpers durch die angegebene Formel beschrieben hat. Der

schlichte Verweis auf Takagi zeigt, was wir schon in der „Introduction“ erwähnt haben, dass Artin damals die Arbeiten von Takagi kannte und dies auch bei Hasse voraussetzen konnte. Artin schreibt sodann:

> *In $\mathbb{Q}(\zeta)$ gilt aber, wie Sie ja wissen, dass durch das Umdrehverfahren $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{S(\frac{\alpha-1}{\ell\lambda})}$ beweisbar ist. . .*[3]

Dies zeigt, was wir schon oben aus der „Anmerkung“ in der Arbeit [Has24b] gefolgert hatten, dass Hasse und Artin sich in gemeinsamem Gespräch das Umdrehverfahren für den Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ überlegt hatten.

Worin besteht denn nun eigentlich das sogenannte Umdrehverfahren? Artin erwähnt zwar im Brief Nr. 1 dieses Verfahren, führt es aber nicht direkt aus. Wir können jedoch aus Hasses Arbeit [Has24b] folgendes entnehmen:

Wie bereits gesagt, erlaubt das Verfahren, den Beweis von (12) allein unter Benutzung von (10) und (11) zu führen, ohne noch einmal auf die Details des Hilbertschen Symbols eingehen zu müssen. Dabei wird (10) nur in solchen Fällen benutzt, in denen beide $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \ell$; dann verschwindet die rechte Seite von (10) und es ist also $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, d.h. das Symbol kann „umgedreht“ werden. Daher der Name des Verfahrens. Wir wissen nicht, wer diesen Namen geprägt hatte; vielleicht war es Artin selbst gewesen.

Gegeben sei ein Term $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$, wie er auf der linken Seite von (12) vorkommt. In einem ersten Schritt soll dieser zu einem Term $\left(\frac{\ell}{\alpha'}\right)$ verwandelt werden, wobei α' in gewisser Weise von einfacherer Bauart ist.

Da es wegen $\ell > 2$ im Jacobischen Symbol auf ein Minuszeichen nicht ankommt, kann ℓ durch $-\ell$ ersetzt werden. Weiter kommt es im Jacobischen Symbol nur auf die Restklasse des „Zählers“ modulo „Nenner“ an, es kann also $-\ell$ im Zähler durch $\alpha - \ell$ ersetzt werden. Demgemäß kann $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ wie folgt transformiert werden:

$$(13) \qquad \left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{-\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha-\ell}{\alpha}\right) \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{\alpha}{\alpha-\ell}\right) = \left(\frac{\ell}{\alpha-\ell}\right) = \left(\frac{\ell}{\alpha'}\right).$$

wobei wir die Stelle des „Umdrehens“ mit einem Pfeil $\uparrow$ gekennzeichnet haben. Inwiefern ist nun $\alpha' = \alpha - \ell$ von einfacherer Bauart als α?

Da $\alpha \equiv 1 \bmod \ell$ können wir schreiben:

$$\alpha = 1 + \ell\gamma = 1 + \ell(c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_{\ell-2}\zeta^{\ell-2})\,;$$

[3]Wir benutzen hier unsere Bezeichnungen. Artin schreibt z.Bsp. $R(\zeta)$ statt $\mathbb{Q}(\zeta)$.

die Koeffizienten c_i von $\gamma = \frac{\alpha-1}{\ell}$ sind ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$.[4] Für $\alpha' = \alpha - \ell$ gilt

$$\alpha' = 1 + \ell\gamma' = 1 + \ell(c_0 - 1 + c_1\zeta + \ldots + c_{\ell-2}\zeta^{\ell-2})$$

Wenn also $c_0 > 0$, dann besitzt γ' einen kleineren Koeffizienten $c_0' = c_0 - 1$ als γ. Durch Iteration dieses Verfahrens kann dann dieser Koeffizient c_0 zum Verschwinden gebracht werden. Sollte aber ursprünglich $c_0 < 0$ gewesen sein, so führe man die ganze Konstruktion mit $-\ell$ statt ℓ durch; anstelle von (13) erhalten wir dann

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) \cdots \underset{\uparrow}{=} \cdots \left(\frac{\ell}{\alpha+\ell}\right)$$

und wir sehen, dass dann der Koeffizient c_0 durch $c_0 + 1$ ersetzt wird; durch Iteration wird also auch in diesem Falle der konstante Koeffizient von γ zum Verschwinden gebracht. Um weiter den Koeffizienten c_1 zum Verschwinden zu bringen, führt man die Umdrehungsoperation (13) für $\zeta\ell$ anstelle von ℓ durch:

$$\left(\frac{\zeta\ell}{\alpha}\right) \cdots \underset{\uparrow}{=} \cdots \left(\frac{\zeta\ell}{\alpha \mp \zeta\ell}\right) = \left(\frac{\zeta\ell}{\alpha'}\right)$$

und jetzt ist der Koeffizient c_1' von $\gamma' = \frac{\alpha'-1}{\ell}$ betragsmäßig um 1 kleiner als c_1. Das ergibt für $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ eine Umwandlung, bei der noch Faktoren der Form $\left(\frac{\zeta}{\star}\right)$ hinzutreten:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta\ell}{\alpha'}\right) = \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\zeta}{\alpha'}\right)\left(\frac{\ell}{\alpha'}\right)$$

Durch Iteration kann jetzt c_1 zum Verschwinden gebracht werden, wobei endlich viele Produkte der Form $\left(\frac{\zeta}{\star}\right)$ hinzutreten. Ersetzt man ζ durch ζ^i so kann auf dieselbe Weise auch der i-te Koeffizient c_i zum Verschwinden gebracht werden, wobei ein Produkt von Faktoren der Form $\left(\frac{\zeta}{\star}\right)^i$ hinzutritt. Wenn schließlich alle Koeffizienten c_i zum Verschwinden gebracht worden sind, so bleibt $\left(\frac{\ell}{1}\right) = 1$, also

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \left(\frac{\zeta}{\omega}\right).$$

wobei ω in genau angebbarer Weise von α abhängt. Die rechte Seite kann mit Hilfe des ersten Ergänzungssatzes (11) ausgewertet werden, wodurch sich dann die Formel (12) des zweiten Ergänzungssatzes ergibt.

[4] Es wird angenommen, dass α eine ganzalgebraische Zahl in $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist.

Wir haben dieses Umdrehverfahren hier etwas genauer ausgeführt, um zu erläutern, wovon Artin im ersten Brief spricht. In den folgenden vier Briefen von Artin spielt es jedoch keine Rolle mehr, weil es sich schließlich ergibt, dass die Henselschen ℓ-adischen Methoden (Logarithmus) wohl doch übersichtlicher sind.

Übrigens war das Artinsche Umdrehverfahren nicht neu. Es findet sich in den wesentlichen Grundzügen schon in der alten Arbeit [Eis50b] von Eisenstein aus dem Jahre 1850. Diese wird sowohl bei Hasse [Has24b] als auch in der gemeinsamen Arbeit [AH25] zitiert. Offenbar war es Artin gewesen, der Hasse auf die Eisensteinsche Arbeit aufmerksam gemacht hatte, denn in einem späteren Artikel [Has29] bedankt sich Hasse bei Artin für den Hinweis auf jene Arbeit.

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf 7.1 und 10.4.

5.4 Zweiter Ergänzungssatz

Die Formel (12) ist zwar vom Typus des zweiten Ergänzungssatzes, aber sie stellt noch nicht die schärfste Form dieses Satzes dar. Denn *erstens* erscheint die dortige Kongruenzbedingung $\alpha \equiv 1 \bmod \ell\lambda$ zu stark; gewünscht ist eine Formel, die im „Nenner“ des Jacobischen Symbols beliebige zu ℓ prime Elemente α zulässt. Und *zweitens* sollte im „Zähler“ ein beliebiges Element zugelassen sein, das sich nur aus Primteilern $\mathfrak{l}$ von ℓ zusammensetzt.

In den ersten 5 Briefen Artins erleben wir die Suche nach solcherart Verallgemeinerung. Und zwar zunächst für den ℓ-ten Einheitswurzelkörper $k = \mathbb{Q}(\zeta)$. In diesem gibt es nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{l}$ von ℓ. Dies ist ein Hauptdivisor $\mathfrak{l} = (\lambda)$, erzeugt von dem Primelement $\lambda = 1 - \zeta$, und es ist $(\lambda)^{\ell-1} = (\ell)$.

Schon im ersten Brief wird es klar, dass Artin es nicht bei der „schönen Formel“ (12) von Hasse belassen will. Sondern er versucht, die in (12) auftretende Kongruenzbedingung $\alpha \equiv 1 \bmod \ell\lambda$ abzuschwächen, indem er nur $\alpha \equiv 1 \bmod \ell$ verlangt. Er ist so angetan von seinem Ergebnis, dass er mit Emphase ausruft: „*Nun aber kommt das Schöne!*“ und das Ergebnis einrahmt. Allerdings muss er bald nach Absendung des Briefes einsehen, dass in seiner Rechnung ein Fehler steckte, und er sendet noch am selben Tag eine Postkarte hinterher mit der richtigen Formel.

Aber auch diese ist noch nicht endgültig. An einem der nächsten Tage (der Brief trägt kein Datum) schickt Artin eine Formel für $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda^{\frac{\ell+1}{2}}$ statt $\alpha \equiv 1 \bmod \ell$. Nun ist keine Rede mehr von dem Umdrehverfahren; die

Rechnungen sind kunstvoll, langwierig und unübersichtlich. Es tauchen dabei Reihen auf, die als Anfänge von Logarithmen-Reihen gedeutet werden können. Artin hofft, dass diese dritte Mitteilung die letzte ist; gemeint ist natürlich die letzte vor seinem Wochenend-Besuch bei Hasse in Kiel, zu dem er am Samstag, den 14. Juli 1923 fahren will. Aber Hasse hatte offenbar sofort auf Artins Brief geantwortet, und so gibt es daraufhin doch noch eine weitere Mitteilung (wiederum ohne Datum).

Wir wissen nicht, was Hasse geschrieben hatte. Wir lesen aber in Artins Brief, dass Hasses „*Herleitung selbstverständlich einfacher*“ ist. Und wir bemerken, dass Artin jetzt ℓ-adische Logarithmen verwendet. Er schreibt, dass er Fortschritte in ℓ-adik macht. Daraus kann man vielleicht schließen, dass Hasse ihn auf die Vorzüge des ℓ-adischen Rechnens und insbesondere auf den ℓ-adischen Logarithmus aufmerksam gemacht hatte, der ja implizit schon in den Artinschen Rechnungen des vorangegangenen Briefes vorkam.

Die neue Formel von Artin gilt für $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda^2$. Es war ihm also gelungen, die Kongruenzbedingung noch weiter herunterzudrücken. Im Zähler des Jacobischen Symbols steht jetzt nicht ℓ sondern λ. Wir erinnern daran, dass λ ein Primelement für den einzigen Primteiler $\mathfrak{l}$ von ℓ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist. Also ist jede Zahl μ aus $\mathbb{Q}(\zeta)$, die sich nur aus Primteilern von $\mathfrak{l}$ zusammensetzt, bis auf einen Einheitsfaktor eine Potenz von λ, und im Prinzip lässt sich daher das Symbol $\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)$ mit Hilfe von $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ berechnen.

Insbesondere gilt das für $\mu = \ell$. In einer weiteren Mitteilung, welche jetzt die Nummer VIII trägt, führt Artin dies für $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ im Detail aus. Vielleicht hatte ihn Hasse danach gefragt? Diesmal handelt es sich um eine Postkarte, und aus dem Poststempel können wir das Absendedatum ersehen: es war am Donnerstag, dem 12. Juli 1923, zwei Tage vor Artins Besuch bei Hasse am Samstag.

Aber auch diese Ergebnisse waren noch nicht endgültig. Während Artins Besuch bei Hasse in Kiel wurden offenbar die Details noch einmal durchgesprochen und es stellte sich eine Formel heraus, die für beliebige $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda$ gilt. Diese Kongruenzbedingung ist jedoch nicht einschneidend, denn für eine beliebige, zu ℓ prime Zahl α aus $\mathbb{Q}(\zeta)$ gilt $\alpha^{\ell-1} \equiv 1 \bmod \lambda$ und $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \left(\frac{\lambda}{\alpha^{\ell-1}}\right)^{-1}$.

Die endgültigen Formeln stehen in der gemeinsamen Arbeit [AH25][5] und

[5] Die Arbeit erschien in Band 154 von Crelles Journal. In dem *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* wird diese Arbeit mit dem Erscheinungsdatum 1925 referiert, aber andere Arbeiten aus demselben Band 154 mit 1924. Das mag daran liegen, dass einige Hefte dieses Bandes noch im Jahre 1924 erschienen sind, aber die letzten erst 1925.

lauten wie folgt. Die Situation ist dieselbe wie in (12).

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \zeta^{\,-S(\frac{\zeta \log \alpha}{\ell\lambda})} \qquad \text{wenn} \qquad \alpha \equiv 1 \bmod \lambda \tag{14}$$

und:

$$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right) = \zeta^{\,-S(\frac{\zeta \log \alpha}{\lambda^\ell})} \qquad \text{wenn} \qquad \alpha \equiv 1 \bmod \lambda\,. \tag{15}$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, dass in diesen Formeln der ℓ-adische Logarithmus vorkommt, der für $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda$ definiert ist.

In einer Fußnote zu dieser Arbeit heißt es:

> *Die Ergebnisse dieser Arbeit sind im Sommer 1923 in einem Briefwechsel und mündlichen Besprechungen zwischen den beiden Verfassern entstanden. Ausarbeitung und Darstellung übernahm der jüngere von ihnen.*

Der jüngere war Hasse.

Die Formeln (14) und (15) sind im Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ als die feinstmögliche Formulierung des zweiten Ergänzungssatzes und somit als endgültig zu betrachten. Sie gelten wörtlich auch in Oberkörpern $k \supset \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$, worauf in [AH25] eigens hingewiesen wird; S bedeutet dann die Spur von k nach $\mathbb{Q}$. Die Zurückführung auf den Einheitswurzelkörper erfolgt mit der bereits im Brief Nr. 1 von Artin mit Hinweis auf Takagi erwähnten funktoriellen Eigenschaft des Jacobischen Symbols, die Erweiterung des Grundkörpers betreffend.

Aber in einem solchen Oberkörper k ist (14) i.allg. nicht mehr die feinstmögliche Formulierung, weil ja in k der Primdivisor $\lambda = 1-\zeta$ von $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ noch zerfallen kann und dann noch diejenigen Potenzrestsymbole auszudrücken bleiben, deren Zähler einen Primfaktor $\mathfrak{l}$ von λ nur einmal enthalten. Dieser Aufgabe hat sich Hasse in einer weiteren Arbeit [Has25b] unterzogen, die noch im selben Band des Crelleschen Journals erschienen ist. Allerdings hat Hasse dabei nur solche Körper k in den Griff bekommen, in denen der Primdivisor λ von $\mathbb{Q}(\zeta)$ unverzweigt ist.

5.5 Allgemeines Reziprozitätsgesetz

Die Formel (14) der gemeinsamen Arbeit von Artin und Hasse betrifft den zweiten Ergänzungssatz und liefert eine Verschärfung von (12), weil sie für

alle $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda$ gültig ist. Eine entsprechende Verschärfung für das Allgemeine Reziprozitätsgesetz (10) wurde zur selben Zeit von Hasse allein entwickelt. Artin scheint davon zu wissen, denn er erwähnt im Brief Nr. 4:

> *Hoffentlich gelingt etwas ähnliches beim allgemeinen Reziprozitätsgesetz.*

In Band 154 des Crelleschen Journals, unmittelbar vor der gemeinsamen Arbeit mit Artin, erschien nun die Arbeit [Has25d] von Hasse mit der folgenden Formel (16) für den Umkehrfaktor. Die Formel sieht ziemlich kompliziert aus; bemerkenswert ist die Tatsache, dass darin die ℓ-adischen Logarithmen vorkommen, so wie es schließlich auch in der Artin–Hasse Formel (14) der Fall ist.

Die Situation in (16) ist dieselbe wie in (14) und (15) und braucht daher nicht mehr erläutert zu werden. Die Formel gilt für alle $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \lambda$.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^L \tag{16}$$

wobei:

$$L = \sum_{1 \le i \le \ell-1} i \frac{S(\zeta^{-i} \log \alpha)}{\ell} \cdot \frac{S(\zeta^{-i} \log \beta)}{\ell} + S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)\frac{S \log \beta}{\ell} + S\left(\frac{\beta-1}{\lambda}\right)\frac{S \log \alpha}{\ell}$$

Die Formel gilt nicht nur im Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}(\zeta)$ sondern genauso auch in jedem Oberkörper $k \supset \mathbb{Q}(\zeta)$, und S bedeutet die Spur von k nach $\mathbb{Q}$.

Hasse hat die Formel (16) schon in Marburg im September 1923 vorgetragen. Jedoch ist er dabei nicht stehengeblieben. Denn entsprechend wie im Falle des zweiten Ergänzungssatzes gilt auch hier, dass im Falle eines echten Oberkörpers k von $\mathbb{Q}(\zeta)$ die Formel (16) noch nicht die feinstmögliche Formulierung ist, weil sich λ in k zerlegen kann. Dazu publizierte Hasse noch eine weitere Arbeit [Has25e], in der er diese Zerlegung berücksichtigt, doch er kann das nur wenn λ in k unverzweigt ist – so wie es auch im Falle des zweiten Ergänzungssatzes der Fall war. Die Arbeit erschien ebenfalls in Band 154 des Crelleschen Journals [Has25a], so wie die oben zitierten Arbeiten Hasses zum Reziprozitätsgesetz und auch die gemeinsame Arbeit Artin–Hasse.

Über dieses neue Ergebnis trug Hasse dann am 25. September 1924 auf der DMV-Jahrestagung in Innsbruck vor.

5.6 Die L-Reihenarbeit

Am Ende des ersten Briefes, vom 9. 7. 1923, lesen wir die folgende kurze Notiz:

> *Ich habe jetzt die allgemeinen L-Reihen mit Frobenius'schen Gruppencharakteren gefunden, die bei beliebigen Körpern dasselbe leisten wie die gewöhnlichen L-Reihen bei Abelschen ...*

Eigentlich gehörten die Artinschen L-Reihen nicht direkt zu dem Hauptthema der frühen Artin-Briefe, nämlich dem zweiten Ergänzungssatz. Wenn Artin dennoch diese Notiz seinem Brief an Hasse anfügte, dann kann man daraus wohl schließen, dass er seine L-Reihenarbeit für wichtig hielt und daher seinen Briefpartner unverzüglich informieren wollte. Hier also, in Hamburg im Sommer 1923, wurden die Artinschen L-Reihen konzipiert, die schnell einen prominenten Platz in der algebraischen Zahlentheorie erlangten.

Später, ab Brief Nr. 30 im Jahre 1930, spielen die Artinschen L-Reihen auch in der Korrespondenz Artin-Hasse eine dominierende Rolle. Hier, im ersten Brief 1923, gibt es nur eine kleine Notiz. Dennoch ist für uns die Artinsche L-Reihenarbeit [Art23b] schon hier wichtig, weil sie nämlich direkt auf das Artinsche Reziprozitätsgesetz führt, das in der Artin-Hasse-Korrespondenz ab 1926 eine prominente Rolle spielt. Wir gehen daher etwas näher auf diese Arbeit ein.

Artin hat der Arbeit den Titel gegeben: „*Über eine neue Art von L-Reihen*". Schon durch die Wahl dieses Titels wird deutlich gemacht, dass Artin seine Arbeit in das Umfeld von Heckes Arbeiten stellen wollte[6]; erst kurz zuvor hatte nämlich Hecke zwei Arbeiten publiziert mit dem Titel: „*Eine neue Art von Zetafunktionen ...*" [Hec18, Hec20]. Was Hecke in seinem Titel mit „Zetafunktionen" bezeichnet, sind die heute unter dem Namen „L-Reihen mit Größencharakteren" bekannten Funktionen. Somit hatten sowohl Hecke als nun auch Artin jeweils eine neue Art von L-Reihen vorgestellt; Hecke in Bezug auf Größencharaktere und Artin in Bezug auf Charaktere der Galoisgruppe. Beide gehören inzwischen zum Standard-Handwerkszeug des Zahlentheoretikers. Obwohl Artin in seiner Arbeit nicht direkt auf Hecke Bezug nimmt[7], so erscheint es evident, dass Artin zu dieser Arbeit durch die Be-

[6] Schon einmal, in seiner Dissertation, hatte Artin den Titel bewusst so gefasst, dass dadurch der Bezug auf die historische Quelle sichtbar wurde. Die Dissertation hieß nämlich: „*Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen*"; dies bezog sich auf die Arbeit von Dedekind: „*Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen ...*" aus dem Jahre 1857.

[7] Nur an einer einzigen Stelle spricht er von „*einer bekannten Schlussweise von Herrn Hecke*" und zitiert dabei [Hec17].

gegnung mit dem Werk von Hecke angeregt worden war.

Was aber hat das Artinsche Reziprozitätsgesetz, das ja dem Gedankenkreis der Takagischen Klassenkörpertheorie angehört, mit den neuen Artinschen L-Reihen aus dem Gedankenkreis von Hecke zu tun?

Den Nachweis der fundamentalen funktionentheoretischen Eigenschaften seiner neuen L-Funktionen, wie z.Bsp, ihrer Funktionalgleichung, kann Artin in seiner L-Reihenarbeit nicht direkt führen. Er stellt jedoch aufgrund der funktionalen Eigenschaften seiner L-Reihen fest, dass es genügt, das Problem für den Fall einer *abelschen* Galoisgruppe zu lösen. Eine abelsche Erweiterung $K|k$ ist nun nach Takagi der Klassenkörper zu einer wohlbestimmten Strahlklassengruppe A/H des Grundkörpers k; siehe Seite 50. Und zwar derart, dass die Galoisgruppe G isomorph ist zu A/H. Bei einem solchen Isomorphismus entsprechen die Charaktere χ der Galoisgruppe den Charakteren ψ der Strahlklassengruppe. Für die Letzteren gibt es nun die klassischen, von Weber eingeführten L-Reihen, die im Falle des rationalen Grundkörpers auf Dirichlet zurückgehen, der sie für den Satz von Primzahlen in einer arithmetischen Progression geschaffen hatte. Auch für einen beliebigen Grundkörper enthalten sie wichtige Informationen über Primideale; erst einige Jahre vorher hatte Hecke die Funktionalgleichung für diese L-Reihen $L(s,\psi)$ zeigen können. Wenn es gelingt, die Artinschen L-Reihen mit den Dirichlet-Weberschen L-Reihen in Verbindung zu bringen, dann würden sich die funktionentheoretischen Eigenschaften der Letzteren, die bekannt sind, auf die Ersteren übertragen lassen.

Nimmt man nun einen Isomorphismus von A/H nach G, und sind dabei χ und ψ einander entsprechende Charaktere von G bezw. A/H, so entsteht also die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den zugehörigen Artinschen L-Reihen $L(s,\chi)$ und den Dirichlet-Weberschen $L(s,\psi)$. Haben diese dieselben funktionentheoretischen Eigenschaften, oder ist vielleicht gar $L(s,\chi) = L(s,\psi)$ in dieser Situation? Diese Frage ist nur dann sinnvoll, wenn das auf der Arithmetik beruhende Bildungsgesetz dieser Funktionen in Betracht gezogen wird. Wir gehen darauf hier nicht weiter ein, stellen nur fest, dass es natürlich auch auf den gewählten Isomorphismus $A/H \approx G$ ankommt. Artin stellt in [Art23b] fest, dass der Isomorphismus so zu wählen sei, dass dabei *jedem unverzweigten Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* k *sein Frobenius-Automorphismus* $\sigma_{\mathfrak{p}} \in G$ *entspricht.*[8] Der Homomorphismus $\mathfrak{p} \mapsto \sigma_{\mathfrak{p}}$ wird heute nach Chevalley die *Artin-Abbildung* genannt.

[8]Mehr über Artins L-Reihen in 30.1 im Zusammenhang mit dem Brief Nr. 30 und den darauf folgenden Briefen.

Das Artinsche Reziprozitätsgesetz ist nun gerade die Aussage, dass auf die angegebene Weise wirklich ein Isomorphismus von A/H auf G definiert wird. Siehe Teil I, Abschnitt 5, Seite 51.

Wir sehen also, dass Artin sein Reziprozitätsgesetz als einen Hilfssatz in der Theorie seiner neuen L-Reihen aufgestellt hatte. Er war sich aber von vorneherein bewusst, dass die Bedeutung seines Reziprozitätsgesetzes nicht nur „nebenbei" als Hilfssatz zum Studium der L-Reihen liegt, sondern dass es sich um einen wichtigen Satz handelt, der die Takagische Klassenkörpertheorie in gewissem Sinne zu einem Abschluss bringt. Dies war wohl der Grund, dass Artin in seinem Brief Nr.1 vom 9. 7. 1923 Hasse von seiner L-Reihenarbeit berichtete, wobei er auch mitteilte, dass er

> „*nebenbei die Formulierung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes in beliebigen Körpern* (*ohne dass Einheitswurzel im Körper liegt*)"

gefunden habe. In der L-Reihenarbeit selbst schreibt Artin darüber:

> *Der Satz ist auch an sich von Interesse ... Im relativ zyklischen Falle ist ferner unser Satz vollkommen identisch mit dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz (falls in k die zugehörige Einheitswurzel liegt), und zwar ist die Übereinstimmung eine so offensichtliche, daß wir den Satz als die Formulierung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes in beliebigen Körpern (auch ohne Einheitswurzel) auffassen können, wenn uns auch der Wortlaut auf den ersten Blick etwas fremdartig anmutet.*

„Fremdartig" deshalb, weil man bislang unter „Reziprozitätsgesetz" eine Aussage über das Jacobische Symbol der Potenzreste verstand.

Damals, also 1923, konnte Artin jedoch sein neuartiges Reziprozitätsgesetz noch nicht in voller Allgemeinheit beweisen, sondern nur in Spezialfällen, nämlich wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

1. $K|k$ ist eine zyklotomische Erweiterung.[9]
2. $K|k$ ist zyklisch von Primzahlordnung, oder
3. $K|k$ ist komponiert aus solchen Körpern.

Das Reziprozitätsgesetz im Fall 1. gehört zur klassischen algebraischen Zahlentheorie des 19. Jahrhunderts. Artin liefert dazu kurze Beweise, die jedoch

[9] Eine zyklotomische Erweiterung von k ist definitionsgemäß ein Teilkörper eines Einheitswurzelkörpers $k(\sqrt[m]{1})$.

nur darin bestehen, dass Bekanntes im Rahmen der neuen Sichtweise der Artin-Abbildung interpretiert wird. Beim Beweis im Fall 2. bezieht sich Artin auf die zweite Arbeit von Takagi [Tak22], der die Reziprozitätsgesetze im Rahmen der Klassenkörpertheorie zyklischer Erweiterungen von Primzahlgrad behandelt hatte. Der Beweis im Falle 3. ergibt sich aus den funktoriellen Eigenschaften des Frobenius-Automorphismus. Aber, wie gesagt, für den allgemeinen Fall hatte Artin damals noch keinen Beweis gefunden.

Von Anfang an war er jedoch so überzeugt von der Allgemeingültigkeit seines Reziprozitätsgesetzes, dass er es in seiner L-Reihenarbeit nicht als Vermutung, sondern schon als Satz formulierte (es handelt sich um den dortigen Satz 2). Dies hat in der Tat manchmal zu Missverständnissen geführt, da ein oberflächlicher Leser hätte glauben können, das Artinsche Reziprozitätsgesetz sei in der Arbeit [Art23b] schon in voller Allgemeinheit bewiesen. (Und das ist tatsächlich passiert; siehe dazu 6.5.)

Bei dieser Gelegenheit ist es vielleicht angebracht, ein weiteres mögliches Missverständnis in der L-Reihenarbeit auszuräumen. Auf den ersten Blick scheint nämlich Artin in seiner L-Reihenarbeit außer den obigen Fällen 1.-3. noch einen weiteren Fall zu behandeln, nämlich den Fall wo $K|k$ Primzahlpotenzgrad ℓ^n besitzt und k die ℓ^n-ten Einheitswurzeln enthält. Diesen Fall behandelt er auf Seite 100/101 in [Art23b] in Punkt 5. Bei der Diskussion beruft er sich auf das Reziprozitätsgesetz für Potenzreste bei Takagi [Tak22]. Takagi konnte aber dort nur den Fall eines Primzahlgrades ℓ behandeln, sodass der Fall eines beliebigen Primzahlpotenzgrades bei Takagi und nun auch bei Artin offenblieb. Natürlich war sich Artin dessen bewusst; in der Tat benutzte er das Ergebnis von Punkt 5. später in der Arbeit nur in dem Fall eines Primzahlgrades. Es entsteht die Frage, weshalb Artin in Punkt 5. den Fall von Primzahlpotenzgrad mit eingeschlossen hat, ohne explizit anzumerken, dass er nur im Falle von Primzahlgrad (unter Berufung auf Takagi) zu einem Resultat führt; durch eine solche Bemerkung hätten doch Missverständnisse ausgeschlossen werden können. Wir vermuten, dass Artin seine Formulierung deshalb in dieser Form gewählt hat, um darzulegen, was er in dem oben zitierten Passus gesagt hatte, nämlich dass in dem Falle, wo die zugehörigen Einheitswurzeln in k liegen, die Übereinstimmung seines abstrakten Reziprozitätsgesetzes mit dem Reziprozitätsgesetz der Potenzereste „*offensichtlich*“ sei. Er wollte also seine Diskussion in Punkt 5. der Arbeit nicht als einen Beweisschritt sondern als *Folgerung* aus seinem Reziprozitätsgesetz verstanden wissen – ohne allerdings noch einmal explizit darauf hinzuweisen, dass das Letztere bislang nur im Falle eines Primzahlexponenten gesichert war.

5.7 Die Lücke 1923–1926

Der Brief Nr. 5 ist datiert am 12. Juli 1923 und der nächste Brief Nr. 6 am 10. Februar 1926. Diese Lücke in der Korrespondenz bedeutet jedoch nicht, dass es in dieser Zeit keinen Kontakt zwischen Artin und Hasse gegeben hat. In der Tat zeigt das mathematische Tagebuch von Hasse, dass sich beide öfter persönlich getroffen haben.[10] Wir haben schon oben gesagt, dass Hasse von Kiel häufig in das benachbarte Hamburg fuhr, um dort an dem von Hecke, Blaschke und Artin geführten mathematischen Seminar teilzunehmen. Bei diesen Anlässen ergab sich auf natürliche Weise Gelegenheit zur Diskussion und zum Austausch von Informationen; es war daher nicht nötig, Briefe zu schreiben.

Aus dem Hasseschen Tagebuch (und nicht nur daraus) kann man entnehmen, dass sich Hasse während dieser Zeit durch den Kontakt vor allem mit Artin, aber auch mit Schreier und mit Hecke, über den Einflussbereich von Hensel hinaus mehr und mehr dem abstrakten und strukturellen Denken zuwandte. Hasse hielt im Herbst 1923 in Kiel eine Vorlesung über Galois-Theorie, und angeregt durch Artins L-Reihen Arbeit, die jener schon im Juli 1923 eingereicht hatte und von der Hasse schon bald Korrekturfahnen und dann einen Separatdruck erhalten hatte, begann sich Hasse für Darstellung von Gruppen zu interessieren und sich zusammen mit Artin und Schreier Gedanken zu einem Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes zu machen. Daher auch Hasses Studien (in seinem Tagebuch) zu den Arbeiten von Frobenius, Matrizen und charakteristische Gleichung, abstrakte Gruppen mit definierenden Relationen (nach einem Vortrag von Schreier im März 1924), Darstellung von Gruppen durch Matrizen (Juni 1924), Basissatz über abelsche Gruppen und über hyperkomplexe Zahlen (Juli 1924).

Im Jahre 1924 auf der DMV-Tagung in Innsbruck erhielt Hasse eine besonders intensive Anregung in Richtung zur abstrakten und damals „modernen“ Algebra, nämlich durch Emmy Noether. Wie wir bereits oben einmal erwähnt haben, hielt Hasse dort einen Vortrag über explizite Reziprozitätsformeln. In derselben Sektion und zwar unmittelbar nach seinem eigenen Vortrag hatte er dann Gelegenheit, Emmy Noether zu hören. Zwar war er Emmy Noether schon 1918 in seinem ersten Göttinger Studiensemester begegnet, hatte damals jedoch keine Vorlesung von ihr gehört.[11] Nun war er

[10] Das Tagebuch wird im Hasse-Nachlass in der Handschriftenabteilung der Göttinger Universitätsbibliothek aufbewahrt.

[11] In [Fre77] wird berichtet, dass Hasse damals die erste Stunde einer Vorlesung von Emmy Noether über Elementarteiler besucht, diese aber aufgegeben hatte, nachdem sich herausgestellt hatte, dass es sich nicht wie erwartet um eine elementare Theorie der Teiler

beeindruckt von ihrer Art, Mathematik zu treiben.

Emmy Noether berichtete in Innsbruck über die von ihr entwickelte axiomatische Kennzeichnung der heute so genannten Dedekind-Ringe, als Grundlage für die Arithmetik der Zahlkörper. Die Noethersche Sichtweise ist eine ganz andere, als es Hasse aus dem Umkreis von Hensel gewohnt war. Es geht Noether nicht um formelmässige Beherrschung der mathematischen Gesetze, sondern um die Offenlegung der zugrundeliegenden Strukturen. Davon beeindruckt, begann Hasse mit Emmy Noether eine rege und mathematisch fruchtbare Korrespondenz, die bis zu Noethers Tod 1935 anhielt[12]. Im Laufe der Zeit machte er sich die Sichtweise von Emmy Noether zu eigen und brachte sie auch in seinen Arbeiten zur Geltung. Insbesondere versuchte er, die Noetherschen Methoden für einen neuen, strukturellen Aufbau der Klassenkörpertheorie zu verwenden; davon legen die Hasseschen Arbeiten in den nächsten Jahren beredtes Zeugnis ab, und das spiegelt sich auch in seiner Korrespondenz mit Artin wider.[13] Allerdings führte seine Idee, die Klassenkörpertheorie nach dem Vorbild der Noetherschen Axiomatik zu axiomatisieren, zunächst zu keinem Ergebnis; erst später legten Artin und Tate eine axiomatische Klassenkörpertheorie vor, wobei die Axiome im Rahmen der Kohomologietheorie formuliert wurden [AT68].

Hasses Vortrag auf der DMV-Tagung in Prag 1929 mit dem Titel „Die moderne algebraische Methode“ [Has30b] kann als eine Art Werbung für die Noethersche abstrakte Algebra gesehen werden. Siehe auch Hasses Göschen-Bändchen über „Höhere Algebra“, von denen es in einer Besprechung heißt, dass es „*insofern bahnbrechend war, als darin zum ersten Male die Steinitzsche Körpertheorie folgerecht in einem Lehrbuch durchgeführt wurde ...*“ [Has27c].

Somit war Hasse auch durch den Kontakt mit Emmy Noether darauf vorbereitet, das Artinsche Reziprozitätsgesetz in seiner Bedeutung für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie voll zu erkennen und zu würdigen – obwohl es in seiner Formulierung total von den früheren Reziprozitätsgesetzen abwich, denen doch Hasse seine ersten mathematischen Arbeiten gewidmet hatte. Denn das Artinsche Reziprozitätsgesetz postuliert einen kanonischen Isomorphismus zwischen algebraischen Strukturen im Sinne der

---

handelte.

[12]Die Briefe zwischen Hasse und Emmy Noether sind publiziert; siehe [LR06]

[13]Die endgültige, heute akzeptierte Form der Klassenkörpertheorie wurde dann schließlich von Chevalley im Rahmen der Theorie der Idele gegeben. Chevalley hatte engen Kontakt mit Hasse gehabt und auch als Rockefeller-Stipendiat ein Semester bei ihm in Marburg verbracht. Die Bezeichnung „Idel“ war von Hasse vorgeschlagen worden an Stelle des von Chevalley zunächst benutzten Namens „ideales Element“.

modernen Algebra, und nicht etwa eine Rechenformel zur Bestimmung von Potenzresten. Wenn auch Hasse aufgrund seiner bisherigen Arbeitsrichtung vielleicht anfangs zu denen gehören mochte, denen das Artinsche Reziprozitätsgesetz zunächst „*etwas fremdartig*" erschien (wie es Artin in [Art23b] formulierte), so änderte sich das schnell und spätestens seit der Innsbrucker Tagung. Hasse betrachtete das Artinsche Reziprozitätsgesetz als einen „*Fortschritt von der allergrößten Bedeutung*".

Das bedeutete allerdings nicht, dass Hasse vollkommen auf die Noethersche Linie einschwenkte und seine ursprüngliche Wertschätzung von expliziten Formeln aufgab. Seine Einstellung zu diesen Fragen schildert er selbst in einem Brief, den er später, nämlich 1931, an Hermann Weyl geschrieben hat. Hasse und Weyl hatten sich zum ersten Mal auf der Innsbrucker Tagung 1924 getroffen. Weyl hatte damals den Vorsitz geführt in der Sitzung, in der Hasse und danach Emmy Noether ihren Vortrag hielten. Es scheint, dass Weyl damals gegenüber dem jungen Hasse die Meinung geäußert hatte, dass seit Hilbert die expliziten Reziprozitätsformeln nicht mehr ein solch großes Interesse beanspruchten, und dass er ihm stattdessen die Beschäftigung mit „modernen", strukturellen Fragen der Zahlentheorie nahegelegt hatte. Nunmehr aber, im Jahre 1931, hatte Weyl ihn in einem Brief beglückwünscht zu seinen Erfolgen in der Strukturtheorie der Algebren über Zahlkörpern und den Auswirkungen auf die Klassenkörpertheorie. Weyl hatte dabei an ihr erstes Zusammentreffen in Innsbruck erinnert. In seinem Antwortbrief führt Hasse u.a. aus:

> *Auch ich erinnere mich sehr gut an Ihre ersten Worte zu mir anläßlich meines Vortrages über die erste explizite Reziprozitätsformel für höheren Exponenten in Innsbruck. Sie zweifelten damals ein wenig an der inneren Berechtigung solcher Untersuchungen, indem Sie ins Feld führten, es sei doch gerade Hilberts Verdienst, die Theorie des Reziprozitätsgesetzes von den expliziten Rechnungen früherer Forscher, insbesondere Kummers, befreit zu haben. . . . Ich kann aber natürlich gut verstehen, daß Dinge wie diese expliziten Reziprozitätsformeln einem Manne Ihrer hohen Geistes- und Geschmacksrichtung weniger zusagen, als mir, der ich durch die abstrakte Mathematik Dedekind-E. Noetherscher Art nie restlos befriedigt bin, ehe ich nicht zum mindesten* auch *eine explizite, formelmäßige konstruktive Behandlung daneben halten kann. Erst von der letzteren können sich die eleganten Methoden und schönen Ideen der ersteren wirklich vorteilhaft abheben.*

Der Klassenkörperbericht Teil II ist ein gutes Beispiel für diese Haltung Hasses.[14] Neben dem Artinschen Reziprozitätsgesetz, dem Hauptidealsatz und der Theorie der Artinschen Führer findet sich die nach dem damaligen Kenntnisstand wohl vollständigste Darstellung der daraus folgenden expliziten Reziprozitätsgesetze. Die schrittweise Entstehung dieses Berichtes können wir in dem Briefwechsel Artin–Hasse beobachten.

[14]Hierzu siehe auch 10.1.

6 10.02.1926, Brief von Artin an Hasse

Hamburg 36,
Pilatuspool 11^{III} [1] 10. Febr. 1926 [2]

Lieber Herr Hasse!

Ich glaube dass bisher jeder meiner Briefe mit einer langen Epistel von Entschuldigungen, Selbstanklagen, Besserungsversprechungen ect. begann – eben musste ich in gleichem Sinne an Courant schreiben – Ihnen gegenüber aber kann ich den Geschäftsgang vereinfachen, ich sage einfach siehe letzter Brief Einleitung. Nur die dort sicher vorhandenen Besserungsversprechungen muss ich erneut besonders betonen, denn es wäre schon ganz schlimm mit mir, wenn sogar die wegfielen. Sonst bin ich leider unverbesserlich.[3]

Meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrer schönen Darstellung der komplexen Multiplikation[4]. Im Detail habe ich die Sache noch nicht nachrechnen können – ich habe leider in diesem Semester mit meinen Kollegs viel zu tun – aber ich sehe im Grossen Ganzen wie die Sache läuft und dass es einfach geht. Sie schreiben an einer Stelle, man könne die Multiplikatorgleichung in der Theorie des Klassenkörpers oder sogar Ringklassenkörpers nicht umgehen. Ich habe daraufhin meine früheren Aufzeichnungen revidiert und kann nicht sehen wo man sie brauchen sollte. Was jedenfalls die Zerlegungsgesetze betrifft, so kommt man allein mit der Transformationsgleichung für $j(\omega)$ aus. Ihre Bemerkung bezieht sich also doch wohl auf den Satz, dass im Klassenkörper die 24te (meinetwegen 12-te) Potenz jedes Ideals des Grundkörpers Hauptideal wird. Ich muss allerdings sagen, dass ich mit Vergnügen

[1]Eintrag von Artin's Adresse durch Hasses Hand.

[2] Artin scheint sich bei der Niederschrift des Datums geirrt zu haben. Er hat nämlich diesen Brief für den 10. Februar **1925** datiert, aber aufgrund des Inhalts ist es evident, dass er diesen Brief später geschrieben haben muss. Wir gehen davon aus, dass er **1926** gemeint hat. Denn er erwähnt in dem Brief seine Vorlesungen über Mechanik und über Analytische Zahlentheorie. Diese Vorlesungen hat Artin aber erst im Wintersemster 1925/26 gehalten, wie das Vorlesungsverzeichnis der Universität Hamburg zeigt. Es gibt noch eine Reihe anderer Anzeichen für eine irrtümlich falsche Datierung; vgl. 6.1, 6.5 und Fußnote 11.

[3]Die vorangegangenen Briefe dieser Sammlung sind alle datiert im Juli 1923, also fast drei Jahre vor diesem Brief. Und nur einer davon – der erste – enthält eine „Epistel“ von Entschuldigungen, wie sie hier von Artin erwähnt wird. Wenn also Artin in diesem Zusammenhang von „jedem meiner Briefe“ spricht, so könnte man daraus vielleicht schließen, dass es zwischen Juli 1923 und Februar 1926 noch weitere Briefe von Artin an Hasse gegeben hat. Wenn ja, dann sind sie uns nicht bekannt. – Zu der „Lücke“ 1923-1926 siehe 5.7.

[4]Siehe 6.1.

auf diesen Satz verzichte, wenn es sich nicht um die Ideale selbst handelt.

Sehr interessant sind auch Ihre Bemerkungen am Schlusse zu der Frage, ob man mit den Teilwerten der $\wp$-Funkt[ion] allein auskommt. In seinem Vorwort verspricht ja Fueter im zweiten Bande „zum *ersten* Mal“ diese Tatsache zu beweisen. Es scheint mir so, als ob er eben nur einen ersten Beweisversuch wird liefern können. So wie es schon früher mit dem Jugendtraum war.

Wie Sie wissen, war ich eine Weile lang auf topologischen Abwegen[5]. Nun hab' ich aber wieder Lust reumütig zurückzukehren. Da man sich aber nicht von heute auf morgen umstellen kann, so habe ich erst mal in einigen kleineren Sachen herumprobiert.

Da ist zunächst das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für Kreiskörper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln[6]. Wissen Sie näheres darüber? Die Sache läuft natürlich wieder auf Lagrange'sche Wurzelzahlen hinaus, ist aber ungleich schwerer da ja, das Hindernis kennen Sie ja wohl auch, $\varphi(\ell^n)$ durch ℓ^{n-1} teilbar ist. Sie haben sicher selbst mindestens ebenso oft wie ich über diesen fatalen Umstand geschimpft. Leider wird es aber dadurch nicht besser. Zur Orientierung nahm ich zunächst den Fall 4 vor. Da erhält man erst dann etwas über biquadratische Reste, wenn man in den Körper der 8-ten Einheitswurzeln hineinsteigt. Ich habe noch nicht probiert, ob das sonst auch geht. Wissen Sie also was davon?

Bei der Gelegenheit habe ich mir die Lagrange'schen Wurzelzahlen für $\ell = 3$ angesehen, also die Verallgemeinerung der Vorzeichenbestimmung für Gauss'sche Summen. Kummer hat darüber viel gerechnet. Ich lege Ihnen auf einem Zettel das Kummersche Resultat bei, wobei ich noch die Zerlegungen der Primzahlen im Kreiskörper $R(\varrho)$ hinzufüge. Können Sie irgend ein Gesetz der Tabelle entnehmen? Vielleicht sind Sie glücklicher als ich. Die Zerlegungen A, B in $R(\varrho)$ habe ich hinzugefügt, da diese ja doch eine Rolle bei der Einteilung spielen werden. Auffallend ist, wie wenig Primzahlen in die dritte Kategorie fallen. Kummer selbst vermutet, dass die Anzahlen im Verhältnis 3:2:1 stehen werden. Jedenfalls eine rätselhafte Angelegenheit.[7]

Haben Sie die Arbeit von Tschebotareff in den Annalen Bd 95 gelesen? Ich konnte sie nicht verstehen und mich auch aus Zeitmangel noch nicht richtig dahinterklemmen. Wenn die richtig ist, hat man sicher die allgemeinen Abelschen Reziprozitätsgesetze in der Tasche. Das Studium der Arbeit haben

[5]Siehe 6.2.

[6]Siehe 6.3. Artin schreibt p^n, aber einige Zeilen weiter wieder ℓ^n gemäß der bei Artin und Hasse sonst üblichen Schreibweise.

[7]Siehe 6.4.

wir hier auf das nächste Semester verschoben. Vielleicht haben Sie sie schon gelesen und wissen also ob falsch oder richtig? [8]

Wie Sie sehen, habe ich nichts als Fragestellungen zu „berichten". Um den Gauss'schen Summen näherzukommen habe ich mich noch mit der Funktion

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^3 \pi t}$$

beschäftigt. Sie hat zwar keine Transformationsformel, man kann aber $f(\frac{1}{t})$ entwickeln in eine Reihe nach Besselfunktionen. Bis jetzt ist es mir aber noch nicht gelungen, dies auf das Problem der Gauss'schen Summen anwenden zu können.[9]

Wie geht es Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin in Halle? Ich kenne ja leider diese Stadt noch gar nicht und bin nur hie und da mit der Bahn daran vorbei gekommen. Ist die Lage schön? [10]

Vorhin sprach ich zweimal vom Zeitmangel. Ich habe mich nämlich zu einem Mechanikkolleg verleiten lassen, und da ich noch nie Mechanik gehört hatte, musste ich sie selbst lernen, was ja recht nützlich aber auch recht zeitraubend ist. Dazu noch analytische Zahlentheorie, was ja etwas einfacher ist. Jedenfalls haben mir die beiden Kollegs die ganze Zeit weggenommen und ich komme augenblicklich nicht dazu, mich mit einer Frage eingehend zu befassen.

Was lesen Sie denn dieses Semester?

Nun hoffe ich meine grossen Briefsünden etwas verringert zu haben.

Ach, eine Sache muss ich Ihnen noch erzählen, meine Sommerreise.

Ich hatte den Spleen nach Island zu fahren. Das war aber auch wirklich eine lohnende Sache.[11]

Anfang August ging es mit dem Schiff nach Bergen und von dort an die Nordküste von Island. Der erste Teil der Reise war eine Wanderung zum

---

[8] Siehe 6.5.

[9] Die Verbindung des Kummerschen Problems mit Reihen von der Art $f(t) = \sum e^{-2\pi\nu^3 t}$, wie sie Artin erwähnt, erscheint naheliegend, hat jedoch nicht weiter geführt. Die Theorie dieser Reihen war wenige Jahre vorher (1920) von Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit zum Waringschen Problem [HL20] begründet worden.

[10] Zum Sommersemester 1925 hatte Hasse eine Professur an der Universität Halle angetreten.

[11] Die Islandreise Artins fand vom 8. August bis zum 3. Oktober 1925 statt. Dies wird in [Ode07] berichtet. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass Artin den vorliegenden Brief nicht im Februar 1925 geschrieben haben kann.

Mývatn, dem „Mückensee". Der Mývatn ist einer der schönsten Punkte der Insel und ist das vulkanische Zentrum. Von dort nach Akureyri, der grössten „Stadt" im nördlichen Island, und von hier eine Wanderung durch die Basaltberge des Skagafjörds. Dann mit dem Schiff nach Reykjavik, von dort Ausflüge nach Thingvellir, der alten Thingstätte. Im ganzen 450 km Fussmarsch, der mir sehr gut getan hat. Es war über alle Massen schön. Wenn wir uns das nächste Mal sehen, werde ich Ihnen noch ausführlich darüber berichten. Von Reykjavik zurück nach Bergen dann mit der Bahn nach Oslo und von dort mit dem Schiff nach Fredericshagen.

Sie als ehemaliger Seeoffizier werden natürlich mich Landratte verlachen. Aber, nie wieder Skagerak. Es war furchtbar. Im Atlantik, auf der ganzen Islandfahrt war ich nicht seekrank und im Skagerak hat es mich erwischt. Der Zustand war schrecklich. Brr!

Also von meinen zahlreichen Islanderlebnissen, wenn wir uns das nächste Mal sehen. Nur eines:

Wissen Sie wie man in Island die Eier kocht? Man geht zu einem Geysir mit den Eiern und einer Schüssel kaltem Wasser. Dann wartet man bis der Geysir einen Ausbruch hat und wirft die Eier in den Wasserstrahl. Sie tanzen dann auf der Höhe des kochend heissen Strahls auf und ab. Da der Ausbruch genau 3 Minuten dauert, sind sie dann schön pflaumenweich gekocht. Der Strahl sinkt langsam herab, die Eier mit ihm und man nimmt nun die Schüssel kalten Wassers und fängt darin die weichgekochten Eier auf, um sie gleich abzuschrecken. So wirds gemacht! Tja! Nichts für ungut.

Bitte meine besten Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin zu übermitteln.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr Artin

Beilage zum Brief Nr. 6:

Sei $R(\varrho)$ der Körper der dritten Einheitswurzeln[12], $p \equiv 1 \pmod 3$ Primzahl und $p = \varpi \cdot \varpi'$ die Zerlegung von p in $R(\varrho)$, wobei ϖ in dem genaueren Sinne semiprimär ist, dass $\varpi \equiv -1 \pmod 3$ sei.

Man setze:

$$S(\varpi) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{\varpi}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} .$$

Dann zeigen elementare Rechnungen dass:

$$S(\varpi) \cdot S(\varpi') = p \quad \text{und} \quad (S(\varpi))^3 = p\,\varpi$$

ist, wobei man die letztere genaue Formel so beweist, dass man rechts zunächst nur $p\,\varpi$ oder $p\,\varpi'$ herausbekommt und dabei

$$\varpi \;\text{ oder }\; \varpi' = \sum_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{\nu(\nu+1)}{\varpi}\right) \quad \text{ist. Daraus folgt unmittelbar}$$

$$\varpi = \sum_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{\nu(\nu+1)}{\varpi}\right) \quad \text{also } p\,\varpi \text{ und nicht } p\,\varpi'.$$

Dies ist ganz elementar und liefert wie Ihnen ja bekannt ist, in wenigen Zeilen das kubische Reziprozitätsgesetz.

Nunmehr möge ν_i diejenigen Zahlen durchlaufen für die

$$\left(\frac{\nu_i}{\varpi}\right) = \varrho^i$$

ist und es werde

$$\eta_i = \sum_{\nu_i} e^{\frac{2\nu_i\pi i}{p}}$$

gesetzt. Dann ist also:

$$S(\varpi) = \eta_0 + \varrho\eta_1 + \varrho^2\eta_2 \qquad\qquad (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1) .$$

Setzt man $\zeta_i = 3\eta_i + 1$ und wird $\varpi = \dfrac{A + 3B\sqrt{-3}}{2}$ gesetzt, so findet man:

$$(\zeta_0 - \zeta_1)(\zeta_0 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_2) = 27pB$$

[12] Siehe 6.4.

so dass also das Vorzeichen dieses Produkts bestimmt ist, bei etwa positiv gewähltem B (d.h. passendem ϖ) also nur eine der folgenden Anordnungen für die reellen ζ_i möglich ist:

$$\zeta_2 < \zeta_1 < \zeta_0 \quad \text{oder} \quad \zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2 \quad \text{oder} \quad \zeta_0 < \zeta_2 < \zeta_1 \; .$$

Die ζ_i sind nun Wurzeln der Gleichung

$$\zeta^3 - 3p\,\zeta - p\,A = 0 \; .$$

Wegen $4p = A^2 + 27B^2$ sieht man leicht, dass die Wurzeln durch die Zahlen

$$-2\sqrt{p}, \; -\sqrt{p}, \; \sqrt{p}, \; 2\sqrt{p}$$

vollständig getrennt werden. Es genügt also zu wissen wohin ζ_0 fällt um dann schon wegen der Diskriminantenbedingung ζ_1 und ζ_2 angeben zu können.

Nun ist

$$\zeta_0 = 1 + 3 \sum_{(\frac{\nu}{\omega})=1} e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} = \sum_{\nu=0}^{p-1} e^{\frac{2\nu^3\pi i}{p}} \; .$$

Nach **Kummer** gilt nun

Für $p < 500$ fällt ζ_0:

I. Ins Intervall $\sqrt{p} < \zeta_0 < 2\sqrt{p}$ für

p	A	B
7	1	1
31	4	2
43	−8	2
67	−5	3
73	7	3
79	−17	1
103	13	3
127	−20	2
163	25	1
181	7	5
223	28	2

p	A	B
229	22	4
271	−29	3
277	−26	4
307	16	6
313	−35	1
337	−5	7
349	37	1
409	31	5
421	19	7
439	28	6
457	10	8
463	−23	7
499	−32	6

II. Ins Intervall $-\sqrt{p}, \; \sqrt{p}$ fällt ζ_0 für

p	A	B
13	-5	1
19	7	1
37	-11	1
61	1	3
109	-2	4
157	-14	4
193	-23	3

p	A	B
241	-17	5
283	-32	2
367	-35	3
373	13	7
379	-29	5
397	34	4
487	25	7

III. Ins Intervall $-2\sqrt{p},\ -\sqrt{p}$ fällt ζ_0 für

p	A	B
97	19	1
139	-23	1
151	19	3
199	-11	5
211	13	5
331	1	7
433	-2	8

Kommentare zum Brief Nr.6:

Der Grund zu diesem Brief scheint hauptsächlich der zu sein, dass Artin einen neuen Anlauf zum Beweis seines Reziprozitätsgesetzes genommen hat, das er im Juli 1923 in seiner Arbeit über seine neuen L-Reihen vermutet hatte und bisher nur in speziellen Fällen hatte beweisen können. (Siehe Brief Nr. 1, sowie 5.6.) Offenbar hatte er inzwischen das Problem beiseite gelegt und sich anderen Gebieten zugewandt (auf den „topologischen Abwegen"; siehe 6.2). Jetzt aber kommt er wieder auf das Problem zurück und hofft, dass sich aus der Korrespondenz mit Hasse neue Ideen dafür ergeben werden. Wir erinnern daran, dass Hasse seit Ostern 1925 eine Professur in Halle angetreten hatte, also nicht mehr in Kiel war. Seitdem nahm also Hasse nicht mehr an den Seminaren in Hamburg teil, und er traf nicht mehr, wie früher, häufig mit Artin zusammen. Demgemäß wird jetzt der Briefverkehr wieder aufgenommen.

Artin nahm offenbar das Hasse'sche Manuskript über komplexe Multiplikation, das ihm von Hecke gezeigt worden war, zum Anlass für diesen Brief. Artin wollte mitteilen, mit welchen Ideen er sich jetzt beschäftigt. Das Thema der späteren gemeinsame Arbeit über den zweiten Ergänzungssatz für den Exponenten ℓ^n kommt in diesem Briefe noch nicht zur Sprache. (Dazu siehe 7.1 und 14.2.)

6.1 Komplexe Multiplikation

Wenn Artin seine „*herzlichen Glückwünsche zur schönen Darstellung der komplexen Multiplikation*" ausspricht, dann bezieht er sich auf einen Brief, den Hasse vor kurzem, nämlich am 22. Dezember 1925 an Hecke geschrieben hatte. Zwar war der Brief direkt an Hecke adressiert, aber aus dem Brief selbst ist zu entnehmen, dass er auch zur Kenntnis von Artin gelangen sollte. Es heißt dort nämlich:[13]

> *Lieber Herr Hecke! In meiner großen Freude über ein nunmehr endlich meinen Anforderungen genügendes Resultat in der komplexen Multiplikation fühle ich mich gedrungen, Ihnen davon Mitteilung zu machen. Denn ich weiß, daß Sie, und auch Herr Artin diesem Gegenstande großes Interesse entgegenbringen. . .*

[13] Dieser Brief ist erhalten und befindet sich im Nachlass Hecke an der Universität Hamburg.

In seinem Antwortbrief vom 6. Februar 1926 entschuldigt sich Hecke zunächst dafür, dass er sich nicht schon vorher für Hasses Brief bedankt habe. Weihnachten, eine Reise und die „Bohr-Woche“ in Hamburg (offenbar zu Ehren von Harald Bohr) hätten ihn daran gehindert. Und weiter:

> *...Artin ist übrigens von Ihrer Arbeit auch sehr entzückt, ich habe sie ihm zur Einsicht gegeben, in der Annahme, dass Sie damit einverstanden sind.*

Und vier Tage darauf, also am 10. Februar 1926, schreibt nun Artin an Hasse und gratuliert ihm zur gelungenen Darstellung der komplexen Multiplikation.

Wir haben also in diesem Falle, anders als bei der übrigen Artin–Hasse-Korrespondenz, Kenntnis von dem Brief, den Hasse geschrieben hatte und auf den sich Artin bezieht. Jener Brief, adressiert an Hecke, umfasst 12 eng beschriebene Seiten. Hasse beschreibt darin seinen neuen Ansatz zur Begründung der komplexen Multiplikation. Zu Beginn heisst es darin:

> *...Mein Ziel war, wie ich es Ihnen schon ausführte, zu einer funktionentheoretischen Konstruktion des Strahlklassenkörpers mod* $\mathfrak{m}$ *nach einem beliebigen Ideal* $\mathfrak{m}$ *eines imaginär–quadratischen Zahlkörpers k mittels einer elliptischen Funktion 1. Stufe zu gelangen, ohne irgendwie in die Theorie der elliptischen Funktionen 2. Stufe eindringen zu müssen, womit ja notwendig gewisse Unregelmässigkeiten und Beschränkungen für die zu 2 nicht primen* $\mathfrak{m}$ *verbunden sind. In der Ihnen neulich auseinandergesetzten Skizze war dieses Ziel nur teilweise erreicht, indem zu den Beweisen der auf* $\wp(u)$ *bezüglichen Sätze doch noch die Jacobischen elliptischen Funktionen 2. Stufe heranzuziehen waren. Davon habe ich mich jetzt ganz frei gemacht. Überdies habe ich das wenig elegante Additionstheorem von* $\wp(u)$ *völlig vermieden und stütze die ganze Theorie allein auf Reihenentwicklung ...*

Eine ausführliche Darstellung mit eben dieser Zielsetzung publizierte Hasse dann 1927 in seiner Arbeit „Neue Begründung der komplexen Multiplikation“ im Crelleschen Journal [Has27d]. Diese Arbeit, die u.a. einen Beweis des sog. *Kroneckerschen Jugendtraums* (in der heute akzeptierten Version) enthält, wurde grundlegend für die weitere Entwicklung der Theorie der komplexen Multiplikation. Die Tatsache, dass die Theorie „allein auf die Reihenentwicklung“ gestützt wird, bedeutet im wesentlichen, dass die elliptischen Kurven als abelsche Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden; das ist

der Gesichtspunkt, der heute vorherrschend ist. Es ist hier nicht der Ort, darauf im Detail einzugehen; wir beabsichtigen, das später an anderer Stelle zu tun. Hier stellen wir nur fest, dass Hasse den Entwurf zu seiner Arbeit vor Fertigstellung der endgültigen, zur Publikation bestimmten Fassung Hecke und Artin vorgelegt hat.

Dass Hasse zuerst an Hecke und nicht direkt an Artin schrieb, hatte seinen Grund wohl darin, dass er schon vorher mit Hecke über gewisse Einzelfragen der komplexen Multiplikation korrespondiert hatte. Jene Korrespondenz ist zumindest teilweise erhalten. Während seiner Studienzeit in Göttingen 1919/20 hatte Hasse bei Hecke Vorlesungen über komplexe Multiplikation gehört, die ihn sehr beeindruckten.[14] Hasse hat Hecke stets als seinen zweiten akademischen Lehrer angesehen. (Der " erste", obwohl nicht in zeitlicher Reihenfolge, war Hensel.)

Artins Kommentare zu Hasses Brief zeigen, dass er mit der Theorie der komplexen Multiplikation auch im Detail vertraut war. Das lag sicherlich auch an seiner Nähe zu Hecke als Kollege in Hamburg. (Allerdings ist Artin in seinen Publikationen niemals darauf eingegangen.)

Als Artin am Wochenende 14.-17. Juli 1923 einen Besuch bei Hasse in Kiel machte[15], da haben sie sich auch über komplexe Multiplikation unterhalten. Denn wir haben im Hasseschen Tagebuch eine Eintragung unter dem Datum vom 17. 7. 1923 gefunden mit dem Titel:

Bemerkungen über komplexe Multiplikation (*Dr. Artin 17. VII. 23*).

Die Eintragung betrifft die Erzeugung des Strahlklassenkörpers zu einem Ideal eines imaginär quadratischen Zahlkörpers, also genau die Fragestellung, die Hasse nach seinem oben zitierten Brief an Hecke behandelt hat. Hierzu siehe auch 22.5, insbesondere Seite 279.

Wenn Artin die Multiplikatorgleichung erwähnt, so bezieht er sich auf eine Fußnote in Hasses Brief. Es handelt sich um folgendes: Ω ist ein imaginär quadratischer Körper und $\mathfrak{w}$ ein Ideal des Ringes der ganzen Elemente in Ω. Der durch Adjunktion des „singulären" Wertes $j(\mathfrak{w})$ der j-Funktion entstehende Körper $\Omega(j(\mathfrak{w}))$ ist identisch mit dem absoluten Klassenkörper von Ω. Um das nachzuweisen, zeigt Hasse die Gültigkeit der Kongruenz

$$j\left(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{w}\right) \equiv j(\mathfrak{w})^p \bmod \mathfrak{p}$$

[14] Diese Vorlesung wird wohl dieselbe oder zumindest ähnlich gewesen sein, die Hecke ein Jahr später im Hamburg gehalten hat. Von der letzteren ist eine Ausarbeitung erhalten und 1987 publiziert worden [Hec87].

[15] Siehe Brief Nr. 5 vom 12. 7. 1923.

für Primideale $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 aus Ω. (Dabei ist p die Norm von $\mathfrak{p}$.) Eigentlich würde es genügen, diese Kongruenz modulo einem Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in $\Omega(j(\mathfrak{w}))$ zu verifizieren. Aber Hecke hatte Hasse darauf aufmerksam gemacht, dass die Kongruenz am besten modulo $\mathfrak{p}$ bewiesen wird, was aus mancherlei Gründen sinnvoll ist. Hecke hatte ihm auch einen Beweis geliefert, jedoch ist Hasses Beweis anders, er benutzt die sog. Multiplikatorgleichung und schreibt dazu in einer Fußnote:

> *Da man die Multiplikatorgleichung doch in der Theorie des absoluten Klassenkörpers braucht, dürfte dieser Weg zum Nachweis des Zerlegungssatzes in K wohl der einfachste und zugleich weittragendste sein. Er überträgt sich übrigens auch auf den Ringklassenkörper.*

Es ist anzunehmen, dass Artin den Heckeschen Beweis vor Augen hatte als er schrieb, dass man allein mit der Transformationsgleichung für die $j(\omega)$ auskommt. (Dabei ist $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ der Quotient einer Basis von $\mathfrak{w}$.) Hasse hat übrigens sein Manuskript daraufhin *nicht* geändert; der publizierte Beweis läuft im wesentlichen so, wie es in seinem Konzept vorgesehen war.

Die Aussage, dass die 12-te Potenz eines Ideals im Klassenkörper Hauptideal wird, kommt in der Tat in einem Hilfssatz im Hasseschen Konzept vor (und auch in der publizierten Fassung). Es handelt sich um ein Teilresultat des *Hauptidealsatzes* welcher besagt, dass schon jedes Ideal selbst, und nicht erst seine 12-te Potenz, im absoluten Klassenkörper zu einem Hauptideal wird. Dieser Hauptidealsatz gilt ganz allgemein in der Klassenkörpertheorie, war jedoch zur Zeit der Abfassung des Artinschen Briefes noch nicht bewiesen. (Der Beweis wurde erst 1928 von Furtwängler gegeben, im Rahmen des von Artin entwickelten gruppentheoretischen Formalismus der Verlagerung [Fur29], vgl. 13.1.3.) Im vorliegenden Falle geht es um den Beweis des Hauptidealsatzes im Spezialfall der komplexen Multiplikation. Artin war anscheinend mit dem Teilresultat aus dem Hasseschen Manuskript nicht zufrieden und steuerte auf den vollen Hauptidealsatz zu. Siehe hierzu auch 47.1.

Am Schluss seines Briefes an Hecke stellt Hasse die Frage, ob man vielleicht zur Erzeugung der über Ω abelschen Körper mit den Teilwerten der Weberschen τ-Funktion (in der Hasseschen Normierung) auskommt, ohne die singulären Werte $j(\mathfrak{w})$ der j-Funktion, die die Ringklassenkörper erzeugen. Er bezeichnet dies als ein „*sehr tiefliegendes Problem*" und kommt zu dem Schluss, nachdem er das Problem von verschiedenen Seiten beleuchtet hat:

> *Ich habe sie* [die Frage] *von keiner dieser vielen Perspektiven aus anpacken können. Ich wage daher auch nicht die Richtigkeit zu vermuten.*

Artin findet also diese Frage „sehr interessant". (Er spricht jedoch nicht von τ sondern von der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion, von der sich τ durch einen Normierungsfaktor unterscheidet.) Im Jahre 1933 beantwortete Sugawara [Sug33] die Hassesche Frage im positiven Sinne. Die weitergehende Frage jedoch, ob sich jeder relativ abelsche Körper über einem imaginärquadratischen Körper allein durch *einen einzigen* singulären Wert der Weberschen τ-Funktion erzeugen lässt, konnte in der Arbeit von Sugawara nicht überzeugend erledigt werden (sein Beweis enthielt einen Fehler). Später, im Jahre 1936 konnte er dann zeigen [Sug36a], [Sug36b], dass dies für die Strahlklassenkörper „fast immer" der Fall ist. Diese beiden Arbeiten von Sugawara wurden von Hasse für das Crellesche Journal angenommen.

6.2 Topologie

Wenn Artin von „topologischen Abwegen" spricht, so bezieht er sich offenbar auf seine beiden Arbeiten über Topologie, die 1925 in den Hamburger Abhandlungen erschienen waren.

Die erste, nur kurze Note [Art25b], behandelt die Isotopie zweidimensionaler Flächen im vierdimensionalen Raum. Artin diskutiert „verknotete" Kugelflächen, das sind solche, die sich nicht ohne Selbstdurchdringung in eine gewöhnliche, im $\mathbb{R}^3$ gelegene Kugelfläche deformieren lassen. Eine entsprechende Definition wird für Flächen beliebigen Geschlechts gegeben. Artin schreibt:

> *Da nun häufig die Existenz verknoteter Flächen bezweifelt wird, ist es vielleicht angebracht, auf einige Beispiele hinzuweisen.*

Artin gibt keine Anhaltspunkte für den Anlass oder die Motivation zu dieser Arbeit.

Die zweite, offenbar gewichtigere, ist die *Theorie der Zöpfe* [Art25a], die in enger Zusammenarbeit mit Otto Schreier entstanden war. Schreier war 1924 aus Wien, wo er bei Furtwängler promoviert hatte, nach Hamburg gekommen und arbeitete bis zu seinem Tod 1928 eng mit Artin zusammen. Schreier war Gruppentheoretiker, und in der Tat ist die vorliegende Arbeit gruppentheoretisch orientiert. Es geht um die Beschreibung eines Zopfes

durch eine Gruppe, die durch Erzeugende und Relationen dargestellt ist, und um die Aufstellung eines finiten Verfahrens, das gestattet, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Zöpfe sich ineinander deformieren lassen.

Übrigens hatte Hasse an diesen „topologischen Abwegen“ Artins und Schreiers gelegentlich selbst teilgenommen. In seinem Tagebuch findet sich unter dem Datum des 2. 5. 1927 eine Eintragung über die Beschreibung einer Gruppe durch Erzeugende und definierende Relationen, wobei verwiesen wird auf einen Vortrag von Schreier in Hamburg im März 1924, den Hasse offenbar besucht hatte. Und im September 1924 nahmen beide, Artin und Hasse, an der DMV-Tagung in Innsbruck teil. Artin hielt dort einen Vortrag mit dem Titel „Das Zopfproblem“ und es kann wohl angenommen werden, dass Hasse diesen Vortrag gehört hat.

Später, im Jahre 1947, ist Artin noch einmal auf die Theorie der Zöpfe zurückgekommen, in einer Arbeit in den Annals of Mathematics [Art47]. Er sagt dort über seine frühere Hamburger Arbeit:

> *Most of the proofs are entirely intuitive. That of the main theorem is not even convincing. But it is possible to correct the proofs.*

Artin entwickelt dort also seine Theorie der Zöpfe noch einmal mit stärkeren Methoden und gelangt zu weiterführenden Verallgemeinerungen.

6.3 Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz

Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz[16] bildete bislang, d.h. im Falle eines Primzahlexponenten $m = \ell$, ein „unentbehrliches Hilfsmittel“ zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. Wenn also Artin in diesem Brief das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für einen Primzahlpotenz-Exponenten $m = \ell^n$ anspricht, dann geschieht das wohl in der Annahme, dass auch in diesem Falle das Eisensteinsche Gesetz für den allgemeinen Beweis nötig sei. Artin hatte sein Reziprozitätsgesetz ja schon im Jahre 1923 formuliert [Art23b], konnte es aber damals im wesentlichen nur für abelsche Körpererweiterungen von Primzahlexponent beweisen, sowie aus den daraus komponierten Körpern. Es blieb noch der Fall eines Primzahlpotenz-Exponenten zu erledigen – und das erklärt vielleicht, weshalb er sich gerade jetzt mit dem Eisensteinschen Gesetz für Primzahlpotenz-Exponenten beschäftigt, nämlich als Vorstufe zu seinem allgemeinen Reziprozitätsgesetz.

[16] Siehe Seite 47.

Es scheint so, dass Artin noch nicht recht weiß, wie denn im Falle eines Primzahlpotenz-Exponenten die Verallgemeinerung des Eisensteinschen Gesetzes auszusehen habe, denn er fragt Hasse, ob dieser schon Näheres darüber weiß.

In dem vorliegenden Brief teilt er lediglich mit, dass er sich darüber Gedanken macht. Und dass er für den Fall $\ell^n = 4$ nur dann etwas erhält, wenn man die 8-ten Einheitswurzeln heranzieht. Er fragt Hasse wiederum, ob dieser etwas davon weiß.

Wir wissen nicht, ob und wie Hasse darauf geantwortet hat. Tatsache ist, dass Hasse ein halbes Jahr später, im September 1926, den *Mathematischen Annalen* ein Manuskript einreichte, in welchem er sich mit dem Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz für einen beliebigen Exponenten m befasst [Has27b]. Es gelingt ihm, das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz in dieser Allgemeinheit zu beweisen, mit Ausnahme des Falles, in dem m durch 8 teilbar ist. In dem letzteren Falle gelingt es ihm lediglich, das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für den Exponenten $\frac{m}{4}$ zu beweisen (unter der Voraussetzung, dass die m-ten Einheitswurzeln im Grundkörper liegen). Diese Schwierigkeit entspricht der Beobachtung von Artin, die er in diesem Brief berichtet, über biquadratische Reste im Körper der 8-ten Einheitswurzeln.

Wir werden auf diese Arbeit von Hasse später noch einmal zurückkommen; siehe 9.4.

Allerdings stellte sich ein Jahr später heraus, dass Artin seine neue Fassung des Reziprozitätsgesetzes schließlich unabhängig von dem Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz gewinnen konnte; siehe Brief Nr. 8 vom 10. 7. 1927.

Im nächsten Brief Nr. 7 vom 10. 09. 1926 ist zu sehen, dass Artin seine Untersuchungen über das Reziprozitätsgesetz für Primzahlpotenz-Exponenten ℓ^n weitergeführt hat, jetzt in Richtung des zweiten Ergänzungssatzes und zunächst für den Exponenten ℓ^2. In der Tat wird der Gedankenaustausch schliesslich wieder zu einer gemeinsamen Arbeit führen, nämlich über die beiden Ergänzungssätze im Falle eines Primzahlpotenz-Exponenten ℓ^n; siehe 17.1.

Richard Brauer meint in seinem Nachruf auf Artin [Bra67], dass das Thema der beiden gemeinsamen Arbeiten, also die Ergänzungssätze, vielleicht näher an dem Interessengebiet Hasses gelegen habe als an demjenigen von Artin. Jedenfalls entnehmen wir aus dem Briefwechsel Artin–Hasse, dass sich nicht nur Hasse, sondern auch Artin lebhaft für dieses Thema interessiert hat. Artin hat vehement und mit Nachdruck an der Ausarbeitung der expliziten Formeln für die Ergänzungssätze teilgenommen.

6.4 Kubische Gauss'sche Summen

Artin benutzt die Terminologie „Lagrangesche Wurzelzahlen", die auch Hilbert in seinem Zahlbericht [Hil97] verwendet. Heute spricht man wohl meist von „Gauss'schen Summen".

Bei dem Beweis des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes für Einheitswurzeln von Primzahlordnung ℓ spielen die Gauss'schen Summen eine wichtige Rolle. Dies erklärt, warum Artin jetzt sagt, auch für höhere Exponenten ℓ^n laufe das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz wieder auf Gauss'sche Summen (oder Lagrangesche Wurzelzahlen) hinaus, aber diesmal eben für Einheitswurzeln von höherer Ordnung ℓ^n. Das sei, so Artin, ungleich schwieriger.

Weshalb er sich dann jedoch ausgerechnet mit kubischen Gauss'schen Summen beschäftigt, also mit $\ell = 3$, ist in diesem Zusammenhang nicht ganz einsichtig. Wahrscheinlich war es das wichtige und tiefliegende, im quadratischen Falle auf Gauss zurückgehende Problem der „Vorzeichenbestimmung", das im kubischen Falle noch nicht gelöst war, was Artin gereizt hat, sich damit zu beschäftigen. Im kubischen Fall geht es nicht um das Vorzeichen, sondern um den Winkelsextanten, in den eine Gauss'sche Summe fällt. Für den Beweis des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes spielt das zwar keine Rolle, denn dort geht es nach den üblichen Beweisen um die ℓ-te Potenz der Gausschen Summe. Aber für sich genommen ist die Vorzeichenbestimmung ein interessantes Problem.

Dieses von Artin angesprochene Problem ist alt und wurde von Kummer in den Jahren 1842-1846 im Crelleschen Journal gestellt. Nur aus dem vorliegenden Brief weiß man, dass sich Artin damit beschäftigt hat; in den Publikationen von Artin erscheint das Problem nicht.

Um den von Artin als Beilage beigefügten Zettel zu lesen, beachte man, dass in seiner Bezeichnungsweise R den Körper der rationalen Zahlen bedeutet, und ϱ die analytisch normierte primitive dritte Einheitswurzel. Ferner bezeichnet $\left(\frac{\nu}{\varpi}\right)$ den normierten kubischen Charakter modulo einer Primzahl ϖ von $R(\varrho)$, definiert durch die Kongruenz

$$\left(\frac{\nu}{\varpi}\right) \equiv \nu^{\frac{p-1}{3}} \bmod \varpi\,.$$

Dabei ist ϖ derjenige von den beiden Teilern von p, der normiert ist wie in der Artinschen Beilage angegeben.[17] Mit $S(\varpi)$ bezeichnet Artin die zugehörige Gauss'sche Summe. Das Kummersche Problem besteht darin, herauszufin-

[17] Das Zeichen ϖ wird in der englischen Literatur öfter verwendet und wird „curly-pi" ausgesprochen.

den, wie groß der Anteil derjenigen Primzahlen p ist, für welche $S(\varpi)$ in einen bestimmten Winkelsextanten fällt, oder, damit gleichbedeutend, für welche eine bestimmte Anordnung für die reellen Zahlen $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ vorliegt (in der Bezeichnungsweise von Artin).

Es erscheint bemerkenswert, dass Artin auf dem Zettel, den er dem Brief an Hasse beilegt, das Kummersche Problem ausführlich beschreibt, unter Beifügung der Tabellen von Kummer. Diese Beilage enthält eigentlich nur das, was ohnehin bekannt war, abgesehen vielleicht von den Tabellen für A und B, die aber ganz elementar zu berechnen sind. Hatte Artin angenommen, dass Hasse das Kummersche Problem nicht kannte? Das Problem wird doch im Hilbertschen Zahlbericht zumindest erwähnt, und der Zahlbericht war Artin und Hasse wohlbekannt. Vielleicht hatte Artin die Tabellen von Kummer nachgerechnet und wollte nunmehr Hasse das Ergebnis seiner Rechnungen präsentieren? Das erscheint allerdings unwahrscheinlich. Wie uns Prof. S. Patterson schreibt „*sind die Summen mit der Hand etwas unangenehm zu berechnen, weil man mit langen Dezimalzahlen arbeiten muss*“. Patterson fährt fort:

> *Ich nehme an, dass er* [Artin] *die Werte der kubischen Summen nicht nachgerechnet hat - er hat die Primzahlen* $p \equiv 1 \bmod 6$ *von Kummer übernommen und die Werte von* A *und* B *nachgerechnet. Er behauptet ja auch nicht, dass er alles nachgerechnet hat. Kummer listet die Primzahlen p zu den drei Klassen auf. Ich nehme an, dass Artin versucht hat, diese zu interpretieren, um die Beobachtungen von Kummer mit den Sätzen von Frobenius (und ggfs. Tschebotareff) zu erklären. Es ist ihm natürlich nicht gelungen, aber dies war von vornherein nicht klar.*
>
> *Ich glaube nicht, dass Artin sich öffentlich zu dem Kummer-Problem geäussert hat. Das Problem fand im späten 19.Jh. und frühen 20.Jh. in der Literatur wenig Beachtung. Es gab überhaupt keine Methoden – sogar die klassischen Methoden der analytischen Zahlentheorie wurden erst gegen 1900 etabliert. Auch Hilbert geht nicht darauf ein, obwohl er die Arbeiten von Kummer zitiert. Mein Eindruck ist, dass Hasse derjenige war, der die Aufmerksamkeit der Zahlentheorie-Gemeinde auf dieses Problem gelenkt hat.*

In der Tat hat Hasse später, im Jahre 1950, das Kummersche Problem ausführlich dargestellt, nämlich in seinem Buch „Vorlesungen über Zahlentheorie“ [Has50]. Dort berichtet er über das von Kummer an seinem numerischen

Material gefundene Verhältnis 3 : 2 : 1 das Artin in seinem Brief als „rätselhaft“ bezeichnet, und er stellt fest, dass sich dieses Verhältnis auch in den Primzahl-Zerlegungstypen der nichtabelschen, kubischen Zahlkörper findet. Jedoch hält Hasse es nicht für wahrscheinlich, dass es sich bei der Kummerschen Klasseneinteilung um die Widerspiegelung eines Zerlegungsgesetzes handelt. Jedenfalls bezeichnet Hasse in seinem Buch „*die Inangriffnahme der Kummerschen Vermutung als eine lohnende, reizvolle Aufgabe.*“

Die Lösung des Kummerschen Problems wurde erst 1979 von Heath-Brown und Patterson gefunden [HBP79]. Und zwar anders, als es die numerischen Experimente von Kummer suggerieren. Statt des Verhältnisses 3 : 2 : 1 stellte sich nunmehr heraus, dass in Wahrheit *Gleichverteilung* vorliegt.

6.5 Die Arbeit von Tschebotareff

Heute wird in der Literatur der russische Name in Transkription meist als „Chebotarёv“ oder „Čebotarev“ geschrieben. Wir benutzen hier jedoch die von Artin und Hasse verwendete Transkription „Tschebotareff“, die damals im deutschsprachigen Raum üblich war.[18]

Die von Artin zitierte Arbeit enthält den bekannten „Dichtigkeitssatz von Tschebotareff“. Der Satz handelt von dem Zerlegungsverhalten der Primdivisoren in einer galoisschen Zahlkörper-Erweiterung. Zu jeder Konjugationsklasse der Galoisgruppe, so zeigt Tschebotareff, gibt es unendlich viele Primdivisoren des Grundkörpers, deren zugehöriger Frobenius-Automorphismus in dieser Konjugationsklasse liegt. Und die Menge dieser Primdivisoren besitzt eine Dichte, die übereinstimmt mit der Dichte der Konjugationsklasse innerhalb der Galoisgruppe. Dieses Problem war im Jahre 1896 von Frobenius [Fro96] gestellt worden.[19] Frobenius selbst konnte damals nur ein schwächeres Ergebnis beweisen, indem er nicht direkt die Konjugationsklassen sondern nur die *Abteilungen* der Galoisgruppen behandeln konnte. Die Abteilung eines Gruppenelements σ besteht aus den Konjugierten aller Potenzen σ^m deren Exponent m teilerfremd ist zur Ordnung von σ.[20]

Artin hatte die Arbeit von Tschebotareff [Che26] für die Mathematischen Annalen referiert. Wir wissen das aus den Lebenserinnerungen von Tsche-

[18]Tschebotareff selbst hat in seinen (deutsch geschriebenen) Briefen an Hasse mit „Tschebotaröw“ unterschrieben.

[19]Die Arbeit von Frobenius war angeregt worden durch eine programmatische Arbeit von Kronecker im Jahre 1880.

[20]Für die symmetrische Gruppe stimmen die Begriffe „Abteilung“ und „Konjugationsklasse“ überein.

botareff [Tsc50]. Darin berichtet Tschebotareff, dass er im Jahre 1925 die DMV-Tagung in Danzig besucht habe, die vom 11.-17. September stattfand. Dort traf er u.a. Emmy Noether, die ihm erzählte, dass sein den Mathematischen Annalen eingereichtes Manuskript (es war am 5. 9. 1924 dort eingegangen) zunächst ihr (also Emmy Noether) zum Referieren übergeben worden sei, dass sie aber abgelehnt und nun Artin das Referat übernommen habe.[21] Artin nahm nicht an der Danziger DMV-Tagung teil.

Nach Erscheinen der Arbeit wurde sie im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" referiert, und es wird dort angegeben, dass sie in den Mathematischen Annalen Band 95 (1925) enthalten ist. Andererseits wird das Erscheinungsjahr des Bandes 95 in der Literatur mit 1926 angegeben. Da jeder Band der Mathematischen Annalen in mehreren Heften ausgegeben wurde, so wird es wohl so gewesen sein, dass das Heft mit der Arbeit von Tschebotareff schon 1925 herausgekommen war, aber das letzte Heft des Bandes 95 erst im Jahre 1926. Jedenfalls war die Arbeit von Tschebotareff im Februar 1926, also zur Zeit der Abfassung des Artinschen Briefes, bereits erschienen, sonst hätte Artin wohl nicht gefragt, ob Hasse die Arbeit gelesen habe. Mithin hatte Artin als Referent die Arbeit schon vorher zum Druck empfohlen. Dies scheint im Widerspruch zu stehen zu der Äußerung von Artin in seinem Brief an Hasse, nämlich dass er die Arbeit „nicht verstehen" könne. Es hat den Anschein, dass Artin die Arbeit empfohlen hatte, ohne die Details im einzelnen nachgeprüft zu haben, denn Artin fragt ja an, ob vielleicht Hasse schon die Richtigkeit bestätigen könne. Es ist natürlich auch möglich, dass sich Emmy Noether geirrt hatte, als sie Artin als Gutachter für die Tschebotareffsche Arbeit genannt hatte.

Wenn Artin schreibt: „*Das Studium der Arbeit* [von Tschebotareff] *haben wir auf das nächste Semester verschoben . . .*" dann ist unter „*wir*" wohl hauptsächlich das Duo Artin und Schreier zu verstehen. Wir wissen, dass Artin mit Otto Schreier in Hamburg (bis zu dessen Tod 1929) engen wissenschaftlichen Kontakt hatte. Jedenfalls erschien schon 1926, also im selben Jahr wie dieser Brief von Artin, eine Arbeit von Schreier [Sch26b] mit einem sehr vereinfachten Beweis des Dichtigkeitssatzes. Tschebotareff schreibt in

[21] Übrigens berichtet Tschebotareff auch, dass er in Danzig mit einer Reihe anderer Mathematiker zusammengetroffen sei. U.a. mit Hensel, der ihn viel über D. A. Grave, den damals führenden Mathematiker in Kiew, ausfragte. Tschebotareff hatte bei Grave studiert, und Grave hatte im Jahre 1912 einen seiner besten Schüler, Alexander Ostrowski, zu Hensel nach Marburg geschickt (weil Ostrowski als Jude im damaligen Russland keine guten Aussichten als Akademiker habe). Tschebotareff traf in Danzig auch Hasse; diesen beschreibt er als einen 27-jährigen Schüler von Hensel, der bereits ordentlicher Professor in Halle sei.

seinen Erinnerungen [Tsc50] dazu:[22]

> *Bald nach dem Erscheinen meines Artikels in den Mathematischen Annalen erhielt ich die Korrektur eines Artikels eines jungen Hamburger Mathematikers, Schreier: „Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff". In seinem Brief schrieb Schreier, seine Arbeit sei die Frucht eines Referats in einem Hamburger Seminar und habe das Ziel, den Beweis zu vereinfachen und damit mein Resultat für einen größeren Kreis von Mathematikern zugänglich zu machen.*

Dies bestätigt, dass Artin und Schreier gemeinsam sich in einem Seminar damit beschäftigt hatten, die Arbeit von Tschebotareff zu verstehen, so wie das Artin in seinem Brief ankündigt. Sicherlich war auch van der Waerden ein Teilnehmer dieses Seminars, denn in [vdW75] schreibt er, dass er im Sommer 1926 nach Hamburg gegangen war.

Übrigens berichtet Tschebotareff in seinen Lebenserinnerungen, dass er seinen Dichtigkeitssatz schon 1922 erhalten hatte. B. N. Delone in Moskau, dem er sein Manuskript vorgelegt hatte, sei davon begeistert gewesen. Tschebotareff hatte eine erste Version seines Manuskripts schon 1922 an das Crellesche Journal geschickt, aber die Sendung kam dort offenbar nie an. Wäre die Postbeförderung von Russland nach Deutschland damals zuverlässiger gewesen, so hätte die Arbeit von Tschebotareff schon 1922 oder 1923 erscheinen können – und vielleicht hätte dann Artin schon 1923 in seiner L-Reihenarbeit einen Beweis seines Reziprozitätsgesetzes gegeben!

1924 schickte Tschebotareff dann eine neue Version seiner Arbeit an die Mathematischen Annalen, wo das Manuskript, wie bereits oben gesagt, begutachtet und danach im Jahre 1925/26 publiziert wurde.

Wir können nachvollziehen, weshalb Artin sich so sehr für die Arbeit von Tschebotareff interessiert hat. Denn im Jahre 1923, in seiner L-Reihenarbeit, hatte Artin selbst schon einen „Beweis" des Tschebotareffschen Dichtigkeitssatzes gegeben.[23] Dieser „Beweis" war jedoch nicht vollständig, weil er auf dem Artinschen Reziprozitätsgesetz beruhte, das damals ja noch nicht allgemein bewiesen war. Der Artinsche „Beweis" in seiner L-Reihenarbeit ist also nur der Nachweis, dass der Dichtigkeitssatz sich aus seinem (damals noch unbewiesenen) Reziprozitätsgesetz als natürliche Folgerung ergibt.

[22] Übersetzung aus dem Russischen durch Frau K. Hansen-Matyssek. Dies gilt auch für unsere anderen Zitate aus [Tsc50].

[23] Siehe 5.6. Natürlich konnte Artin damals noch nicht Tschebotareff erwähnen; er sprach von der „Vermutung von Frobenius", wobei er sich auf die klassische Arbeit [Fro96] bezog.

Das war durchaus sinnvoll. Schon in seinem Brief Nr.1 hatte Artin, als er Hasse über seine Konstruktion der neuartigen L-Reihen informierte, darauf hingewiesen, dass diese „*bei beliebigen Körpern dasselbe leisten wie die gewöhnlichen L-Reihen bei Abelschen.*“ Im abelschen Falle leisteten nun die gewöhnlichen L-Reihen mit der klassischen Methode von Dirichlet den Beweis der Dichtigkeitssätze für Primideale in Strahlklassen. Es war nun das Anliegen Artins in seiner L-Reihenarbeit, explizit vorzuführen, dass im allgemeinen galoisschen Fall seine neuen L-Reihen mit derselben klassischen Methode zu den von Frobenius vermuteten Dichtigkeitssätzen führten – sobald der Übergang von den Strahlklassen zur Galoisgruppe mit Hilfe des Artinschen Reziprozitätsgesetzes gesichert ist.

Artin hoffte nun, wie aus seinem Brief hervorgeht, durch das Studium der Tschebotareffschen Arbeit Anregungen zu erhalten, wie er sein allgemeines Reziprozitätsgesetz beweisen könne. Wie wir wissen, gelang ihm schon anderthalb Jahre später, im Juli 1927, der Beweis, wobei er eine Methode benutzte, die Tschebotareff angewandt hatte (jedoch erst nach geeigneter Modifikation; siehe 9.2).

Von Anfang an war Artin so überzeugt von der Gültigkeit seines Reziprozitätsgesetzes, dass er schon in seiner L-Reihenarbeit [Art23b] dieses Gesetz als „Satz“ formulierte, nicht etwa als Vermutung, wie es doch nahegelegen wäre, weil er damals noch keinen Beweis hatte. Dies führte offenbar manchmal zu der irrigen Annahme, dass Artin sein Reziprozitätsgesetz und damit auch den Dichtigkeitssatz in seiner L-Reihenarbeit schon bewiesen habe.

Das berichtet jedenfalls Tschebotareff in seinen Memoiren [Tsc50]. Wie bereits oben erwähnt, nahm er im Jahre 1925 an der Jahrestagung der DMV in Danzig teil; anschließend besuchte er noch einige deutsche Universitäten. In Berlin traf er I. Schur und dieser habe ihm tatsächlich gesagt, so schreibt Tschebotareff, dass sein Dichtigkeitssatz bereits von Artin bewiesen war. In Göttingen traf er Ostrowski, der ihm dasselbe sagte. In Göttingen jedoch hatte Tschebotareff Zugang zur Bibliothek und er fand dort ein Exemplar der Hamburger Abhandlungen mit der Artinschen L-Reihenarbeit; er konnte sich davon überzeugen, dass darin sein Dichtigkeitssatz zwar formuliert war, aber noch keineswegs bewiesen – denn die Gültigkeit des Artinschen Reziprozitätsgesetzes war damals ja noch nicht gesichert.

Wir haben oben gesagt. dass der Artinsche Beweis des Dichtigkeitssatzes, nachdem das Artinsche Reziprozitätsgesetz 1927 bewiesen war, als besonders „natürlich“ anzusehen ist, da er direkt die originellen Ideen von Dirichlet verfolgt, die jener zum Beweis der Primzahldichte in einer arithmetischen Progression entwickelt hatte. Allerdings ist inzwischen eine wesentliche Ver-

kürzung des Beweises durch Deuring [Deu35b] entstanden. Deuring erkannte, dass das Problem mit Hilfe der Zerlegungsgesetze der Primideale auf den zyklischen Fall reduziert werden kann, ohne den Formalismus der Artinschen L-Reihen zu benutzen. Im zyklischen Fall benutzte er dann das Artinsche Reziprozitätsgesetz, um den Übergang von Substitutionen der Galoisgruppe zu den Strahlklassen des Körpers zu bewältigen.

Die Leistung von Tschebotareff ist darin zu sehen, dass er seinen Satz unabhängig von der Klassenkörpertheorie gewinnen konnte. In diesem Sinne ist sein Beweis als ein „einfacherer“ Zugang zum Dichtigkeitssatz anzusehen. Siehe dazu die Äußerung von S. Patterson, die wir in 9.2 (Seite 147) zitieren. Eine Kombination dieses Gedankens mit der Deuringschen Idee findet sich in dem Buch von Fried-Jarden [FJ86].[24]

[24] In [FJ86] wird darauf hingewiesen, dass sich bei Tschebotareff ein Beweis für „a small piece of Artin's Reciprocity Law for cyclotomic extensions“ findet. Das ist zwar richtig, es ist jedoch zu berücksichtigen, dass das Artinsche Reziprozitätsgesetz für zyklotomische Erweiterungen zum etablierten Standardwissen der Zahlentheorie des 19. Jahrhunderts gehörte. Auch Artin hat das offenbar so gesehen. Siehe 5.6, Seite 89.

7 10.09.1926, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, 10. Sept. 1926

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief. Den von Ihnen eingeschlagenen Weg habe ich (leider Gottes) in den Spezialfällen $2^2, 2^3, 3^2$, angewendet. Für ℓ^2 macht das aber zu viel Rechnung. Deshalb zog ich es vor, eine Methode von Eisenstein (die bekannte Crelle-Arbeit) zu verwenden:

Ich setze $\tau_a = 1 - \lambda_n^a$. Dann gilt: $\tau_{a+b} - \lambda^a \tau_b = \tau_a$. Dies zieht die drei Kongruenzen:

$$\tau_{a+b} \equiv \lambda^a \tau_b \pmod{\tau_a}; \quad \tau_{a+b} \equiv \tau_a \pmod{\tau_b}; \quad \tau_a \equiv -\lambda^a \tau_b \pmod{\tau_{a+b}}$$

nach sich, so dass man findet:

$$\left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_a}\right) = \left(\frac{\lambda^a}{\tau_a}\right)\left(\frac{\tau_b}{\tau_a}\right) = \left(\frac{\tau_b}{\tau_a}\right), \quad \text{wegen} \quad \left(\frac{\lambda^a}{\tau_a}\right) = 1\ ;$$

$$\text{ferner} \quad \left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_b}\right) = \left(\frac{\tau_a}{\tau_b}\right) \qquad \text{und} \quad \left(\frac{\tau_a}{\tau_{a+b}}\right) = \left(\frac{\lambda^a}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{\tau_b}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{-1}{\tau_{a+b}}\right).$$

Schreiben wir nun zur Abkürzung für den Umkehrfaktor:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \left(\frac{\tau_a}{\tau_b}\right)\left(\frac{\tau_b}{\tau_a}\right)^{-1}, \qquad \text{so findet man:}\\
(a,b) &= \left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_b}\right)\left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_a}\right)^{-1} = (a+b,b)\left(\frac{\tau_b}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_a}\right)^{-1}\\
&= (a+b,b)\left(\frac{\tau_a}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{\lambda^{-a}}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{-1}{\tau_{a+b}}\right)\left(\frac{\tau_{a+b}}{\tau_a}\right)^{-1}\\
&= (a+b,b)(a,a+b)\left(\frac{\lambda}{\tau_{a+b}}\right)^{-a}\left(\frac{-1}{\tau_{a+b}}\right).
\end{aligned}$$

Da $\left(\frac{\lambda^{a+b}}{\tau_{a+b}}\right) = 1$ ist, kann man auch schreiben:

$$(a,b) = (a,a+b)(a+b,b)\left(\frac{\lambda}{\tau_{a+b}}\right)^b\left(\frac{-1}{\tau_{a+b}}\right).$$

Sei ℓ ungerade. Dann gilt einfacher:

$$(a,b) = (a,a+b)(a+b,b)\left(\frac{\lambda}{\tau_{a+b}}\right)^b.$$

Sei nun $n = 2$. Man setze $a = 1,\ b = \ell^2 - 1$. Es wird:

$$(1, \ell^2 - 1) = (1, \ell^2)(\ell^2, \ell^2 - 1)\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right)^{-1} .$$

Nun ist $\left(\frac{\lambda^a}{\tau_a}\right) = 1 = \left(\frac{\lambda}{\tau_a}\right)^a$.

Ist also a prim zu ℓ so wird $\left(\frac{\lambda}{\tau_a}\right) = 1$. Nun wende man die gleiche Formel an auf den einen Faktor:

$$(\ell^2, \ell^2 - 1) = (\ell^2, 2\ell^2 - 1)(2\ell^2 - 1, \ell^2 - 1)\left(\frac{\lambda}{\tau_{2\ell^2-1}}\right)^{-1}, \quad \text{wo} \quad \left(\frac{\lambda}{\tau_{2\ell^2-1}}\right) = 1 .$$

Da $\tau_{2\ell^2-1} = 1 - \lambda^{2\ell^2-1}$ wegen $\lambda^{2\ell^2-1} = \ell^2\lambda_1\lambda^{\ell-1}$ sicher primär ist, folgt $(\ell^2, \ell^2 - 1) = 1$. Also bleibt:

$$(1, \ell^2 - 1) = (1, \ell^2)\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right)^{-1} \qquad \text{woraus}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right) = (1, \ell^2)(1, \ell^2 - 1)^{-1} \qquad \text{folgt.}$$

Nun ist:

$$(1, a) = \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^a}\right)\left(\frac{1-\lambda^a}{1-\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{\zeta}{1-\lambda^a}\right) = \zeta^{\frac{N(1-\lambda^a)-1}{\ell^2}} .$$

Also:

$$\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right) = \zeta^{\frac{N(1-\lambda^{\ell^2})-1}{\ell^2} - \frac{N(1-\lambda^{\ell^2-1})-1}{\ell^2}} =$$

$$= \zeta^{\frac{N(1-\lambda^{\ell^2}) - N(1-\lambda^{\ell^2-1})}{\ell^2}} .$$

Hierin sind die Exponenten λ^{ℓ^2} bezw. λ^{ℓ^2-1} hoch genug, um bei der Darstellung durch die symmetrischen Grundfunktionen dieser Potenzen beim 3-ten Glied abzubrechen. Drückt man die Grundfunktionen durch die Potenzsummen aus und lässt überflüssiges weg, so bleibt gerade der Anfang der gewünschten logarithmischen Entwicklung stehen von dem man sich auch überzeugt dass er ausreicht. Ich brauche das wohl nicht weiter auszuführen.

Ich komme also Dienstag und zwar mit dem Zug 13^{02} wie Sie vermutet haben. Bis dahin mit herzlichen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr.7:

7.1 Die Methode von Eisenstein.

In diesem Brief geht es um den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz für das Potenzrestsymbol, und zwar zum Exponenten ℓ^n, wobei ℓ eine (ungerade) Primzahl ist; es wird im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln gerechnet. In den früheren Briefen aus dem Jahre 1923 ging es um den Fall $n = 1$. Die damals von Artin und Hasse gewonnenen Resultate fanden ihren Niederschlag in einer gemeinsamen Arbeit [AH25] aus dem Jahre 1925. Nun soll der Fall $n > 1$ behandelt werden, und zwar zunächst offenbar $n = 2$.

Wir wissen nicht, welches der von Hasse vorgeschlagene Weg gewesen ist, den Artin erwähnt und der offenbar nicht zum Ziel geführt hat. Die neue, jetzt von Artin vorgeschlagene Methode ist einer alten Arbeit von Eisenstein entnommen. Artin spricht von „*der bekannten Crelle-Arbeit*“ von Eisenstein. Nun hatte Eisenstein 37 Arbeiten im Crelleschen Journal. Gemeint ist offenbar die Arbeit [Eis50b] aus dem Jahre 1850, erschienen in Band 39, mit dem Titel: „*Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze*“. Diese Arbeit wurde schon in der gemeinsamen Note [AH25] von Artin und Hasse zum zweiten Ergänzungssatz bei Primzahlexponenten $m = \ell$ zitiert. Deshalb konnte Artin in seinem Brief getrost auf „die bekannte Crelle-Arbeit von Eisenstein“ hinweisen. Er hatte ja Hasse schon vor dem 30. Juni 1923, wahrscheinlich aber schon im März 1923 anlässlich von Hasses Vortrag in Hamburg darauf hingewiesen. Das Artinsche Umdrehverfahren, das wir in 5.3 beschrieben haben, war ebenfalls im wesentlichen aus der Eisensteinschen Arbeit extrahiert.

Dass Artin ausdrücklich von der „Crelle“-Arbeit spricht, hat seinen Grund wahrscheinlich darin, dass Eisenstein im selben Jahr 1850 eine zweite, ebenfalls fundamentale Arbeit über das Reziprozitätsgesetz publizierte, die jedoch nicht im Crelleschen Journal erschien, sondern in den Berliner Akademieberichten [Eis50a].

Eisenstein hatte in seiner Arbeit gezeigt, wie man im Kreiskörper explizite Formeln für das Reziprozitätsgesetz „*durch eine eigentümliche Induktion*“, wie er sagt, auffinden kann – wenn man nur annimmt, dass das Reziprozitätsgesetz gewisse Grundeigenschaften besitzt. Eisenstein behandelt nur den Fall des Körpers der ℓ-ten Einheitswurzeln, wobei ℓ eine ungerade Primzahl ist, aber er sagt deutlich, dass dies zwar nicht der allgemeinste Fall ist, aber doch ein „*Fall von großer Allgemeinheit, aus dem die unbeschränkte Anwendbarkeit des Verfahrens erhellen wird*“. Das lässt wohl darauf schließen, dass

er dieses Verfahren auch für den Körper der $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ der ℓ^n-ten Einheitswurzeln für beliebiges n konzipiert hatte. (Dabei bedeutet ζ_n eine primitive ℓ^n-te Einheitswurzel.) Artin führt das nunmehr für den Fall ℓ^2 durch.

Zum Umkehrfaktor $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ siehe Seite 45. Er ist zunächst nur dann definiert, wenn α, β zueinander und zu ℓ prim sind. Aber schon Eisenstein bemerkt, dass man die Definition auf beliebige $\alpha, \beta \neq 0$ ausdehnen kann, nach folgendem Prinzip:

Es sei $\lambda = 1 - \zeta$ gesetzt.[1] λ ist eine Primzahl, und zwar für den einzigen Primdivisor $\mathfrak{l}$ von $\mathbb{Q}(\zeta)$, der über der Primzahl ℓ liegt. Als Grundannahme setzt Eisenstein voraus, dass der Umkehrfaktor in der Form ζ^L angesetzt werden kann, wobei $L = f(\alpha, \beta)$, wie wir heute sagen würden, eine im $\mathfrak{l}$-adischen Sinne stetige Funktion von α, β ist, mit Werten in $\mathbb{Z}/\ell^n$.[2] Demnach kann der Umkehrfaktor auch dann wohldefiniert werden, wenn α, β nicht zueinander prim sind; in diesem Falle ersetze man α, β durch hinreichend benachbarte α', β' aus $\mathbb{Q}(\zeta)$, die zueinander prim sind.

Heute würden wir ζ^L als das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ ansetzen, definiert für beliebige α, β aus der $\mathfrak{l}$-adischen Komplettierung $\mathbb{Q}_\ell(\zeta)$. Siehe dazu Seite 45.

Die von Artin definierten Elemente $\tau_a = 1 - \lambda^a$ erzeugen die Einseinheitengruppe von $\mathbb{Q}_\ell(\zeta)$ als pro-endliche Gruppe. Das erklärt, weshalb Artin für den zweiten Ergänzungssatz insbesondere auf die Symbole $\left(\frac{\lambda}{\tau_a}\right)$ hinaus will. Für $a \not\equiv 0 \bmod \ell$ stellt sich heraus, dass $\left(\frac{\lambda}{\tau_a}\right) = 1$. Deshalb steuert er sofort auf die Berechnung von $\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right)$ zu.

Artin bezeichnet den Umkehrfaktor von τ_a und τ_b mit (a, b). Er ist nicht direkt definiert, weil ja τ_a und τ_b nicht teilerfremd sind, und daher muss auf die obige Beschreibung als Hilbertsches Symbol zurückgegriffen werden. Das sagt Artin allerdings nicht, weil er wohl annimmt, dass dies Hasse geläufig ist. Eisenstein selbst gibt in [Eis50b] an, wie man (a, b) zu interpretieren hat: Man ersetze τ_a, τ_b durch zueinander prime Elemente der Form $1 - k_a\lambda^a$ und $1 - k_b\lambda^b$ wobei $k_a, k_b \equiv 1 \bmod \lambda^N$ mit hinreichend großem N zu wählen sind.

Diese Rechnungen in Artins Brief sind direkt den Eisensteinschen Rech-

---

[1]Zu Beginn bezeichnet Artin eine ℓ^n-te Einheitswurzel mit ζ_n, schreibt dann aber bei seinen Rechnungen einfach ζ. Diese Rechnungen beziehen sich jedoch weiterhin auf den Fall ℓ^n, bis er an einer Stelle sagt, dass er nunmehr $n = 2$ setzt.

[2]Die Stetigkeit ist hier im multiplikativen Sinn zu verstehen. Explizit bedeutet das: $f(\alpha, \beta) = 0$ wenn $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^N$ für hinreichend großes N.

nungen nachvollzogen, nur jetzt eben für den Fall $n = 2$, was nur einen einzigen Schritt in Eisensteins „eigentümlicher Induktion“ erforderlich macht. Wir wissen nicht, weshalb Artin am Schluss nicht mehr explizit den errechneten Wert von $\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2}}\right)$ hinschreibt, nämlich ζ. Vielleicht nahm er an, dass Hasse dies schon für $n = 2$ wusste?

Anscheinend vermutete Artin, dass nicht nur für ℓ^2 sondern für eine beliebige ungerade Primzahlpotenz ℓ^n stets $\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^n}}\right) = \zeta$ ist (und $= \zeta^{-1}$ für $\ell = 2$). Denn ein Jahr später, in seinem Brief Nr. 17 vom 27. 10. 1927 spricht Artin davon, dass die Hasseschen Rechnungen seine Vermutung $\left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^n}}\right) = \zeta^{\pm 1}$ widerlegt haben. Damals arbeiteten Artin und Hasse gemeinsam an ihrer zweiten Arbeit zum Ergänzungssatz [AH28], die dann 1928 erschien.

Kapitel 2

1927

8 17.07.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 17.7.27

Lieber Herr Hasse!

Es ist sehr lange her[1], dass ich Ihnen nicht geschrieben habe. Dafür möchte ich Ihnen heute eine Mitteilung machen, die Sie sicher interessieren wird. Ich habe in diesem Semester eine zweistündige Vorlesung über Klassenkörper gehalten und dabei endlich das „allgemeine Reziprozitätsgesetz“ bewiesen, in der Fassung, die ich ihm in der L-Reihenarbeit gegeben habe:[2]

Es sei k ein beliebiger Grundkörper, K Klassenkörper für k nach dem Strahl H. Die Idealklassen von k mögen nach H erklärt werden. $\mathfrak{G}$ sei die galoissche Gruppe von K/k und $\sigma \dots$ ihre Substitutionen. Einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus k werde in bekannter Weise eine Substitution σ zugeordnet: Für alle ganzen Zahlen A aus K soll gelten, ($N\mathfrak{p}$ Norm in k in bezug auf R):

$$A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma A \pmod{\mathfrak{p}}$$

($\mathfrak{p}$ sei teilerfremd zur Relativdiskriminante).

Das Reziprozitätsgesetz lautet nun:

1.) Die Primideale $\mathfrak{p}$ einer ganzen Klasse aus k und nur diese besitzen die gleiche Substitution. Es sind also die Klassen von k ein-eindeutig auf die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ bezogen.

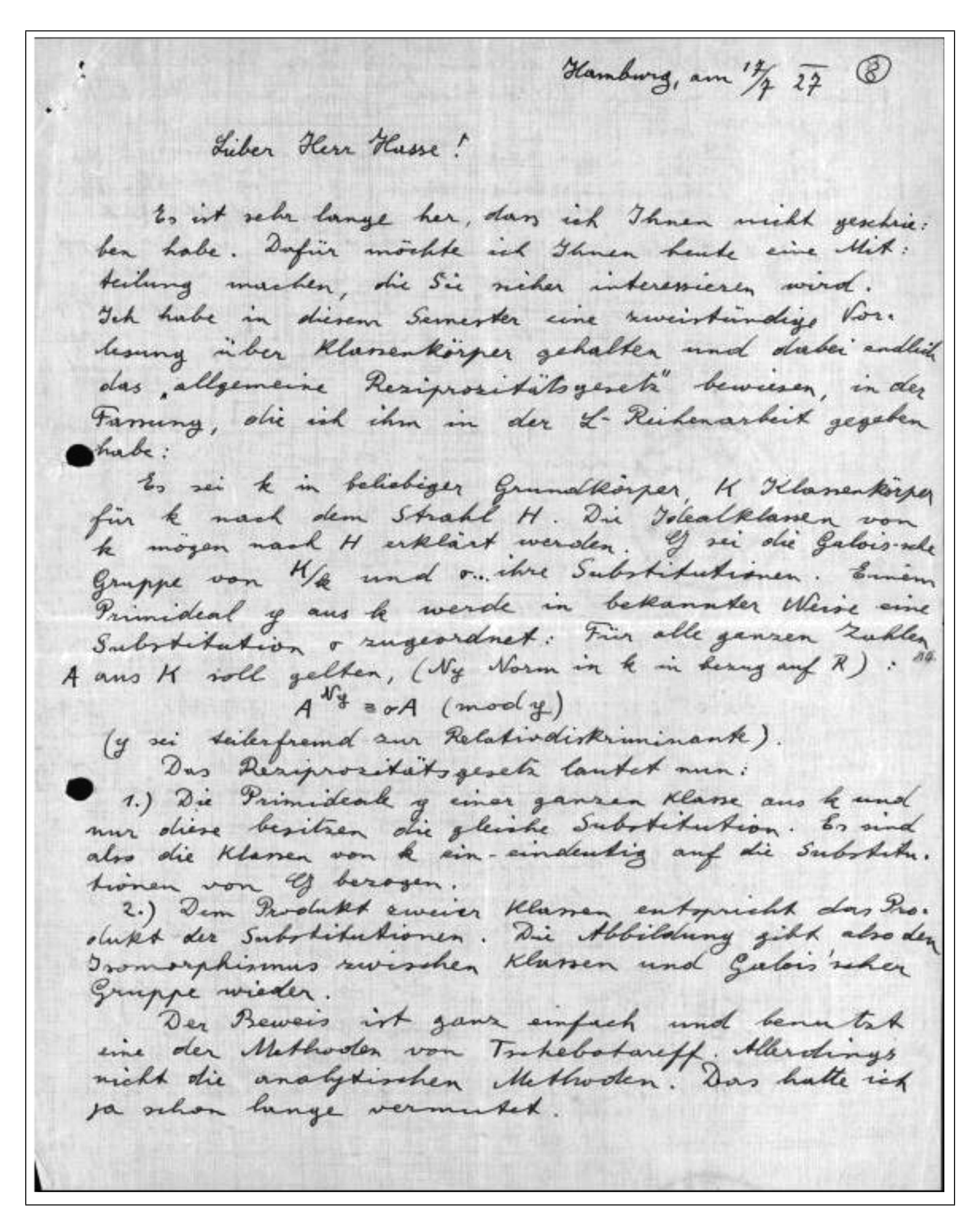
2.) Dem Produkt zweier Klassen entspricht das Produkt der Substitutionen. Die Abbildung gibt also den Isomorphismus zwischen Klassen und galois'scher Gruppe wieder.

Der Beweis ist ganz einfach und benutzt eine der Methoden von Tschebotareff.[3] Allerdings nicht die analytischen Methoden. Das hatte ich ja schon lange vermutet.[4]

Unmittelbar folgt daraus für das Jakobische Symbol der m-ten Potenzreste[5] (wenn die m-ten Einheitswurzeln zu k gehören):

$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ hängt nur ab von der Klasse in der $\mathfrak{a}$ liegt.

[1] nämlich 10 Monate.
[2] Zur L-Reihenarbeit siehe 5.6.
[3] Siehe 9.2.
[4] Siehe Brief Nr. 6.
[5] Siehe 8.2.



Hamburg, am 17/7 27 ⑧

Lieber Herr Hasse!

Es ist sehr lange her, dass ich Ihnen nicht geschrieben habe. Dafür möchte ich Ihnen heute eine Mitteilung machen, die Sie sicher interessieren wird. Ich habe in diesem Semester eine zweistündige Vorlesung über Klassenkörper gehalten und dabei endlich das „allgemeine Reziprozitätsgesetz" bewiesen, in der Fassung, die ich ihm in der L-Reihenarbeit gegeben habe:

Es sei k ein beliebiger Grundkörper, K Klassenkörper für k nach dem Strahl H. Die Idealklassen von k mögen nach H erklärt werden. $\mathfrak{G}$ sei die Galois-sche Gruppe von K/k und σ.. ihre Substitutionen. Einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus k werde in bekannter Weise eine Substitution σ zugeordnet: Für alle ganzen Zahlen A aus K soll gelten, ($N\mathfrak{p}$ Norm in k in bezug auf R):

$$A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma A \pmod{\mathfrak{p}}$$

($\mathfrak{p}$ sei teilerfremd zur Relativdiskriminante).

Das Reziprozitätsgesetz lautet nun:

1.) Die Primideale $\mathfrak{p}$ einer ganzen Klasse aus k und nur diese besitzen die gleiche Substitution. Es sind also die Klassen von k ein-eindeutig auf die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ bezogen.

2.) Dem Produkt zweier Klassen entspricht das Produkt der Substitutionen. Die Abbildung gibt also den Isomorphismus zwischen Klassen und Galois'schen Gruppe wieder.

Der Beweis ist ganz einfach und benutzt eine der Methoden von Tschebotareff. Allerdings nicht die analytischen Methoden. Das hatte ich ja schon lange vermutet.

Abbildung 3: Artin zum Reziprozitätsgesetz

(Quelle: Handschriftenabteilung SUB Göttingen)

Klasseneinteilung diejenige, für die $k(\sqrt[m]{\mu})$ der Klassenkörper ist. Diese Folgerung steht schon in der L-Reihenarbeit und hat mich überhaupt dazu geführt, die vorige Formulierung als das allgemeine Reziprozitätsgesetz zu bezeichnen. Wenn m eine Primzahl ist, hat schon Takagi dies als den wesentlichen Inhalt des Reziprozitätsgesetzes bezeichnet.[6]

Es folgt aber umgekehrt aus diesem Satz noch keineswegs umgekehrt das allgemeine Reziprozitätsgesetz.

Damit ist endlich alles aus der L-Reihenarbeit bewiesen.

Man wird sich natürlich jetzt noch bemühen müssen, daraus die Hilbertsche Fassung zu gewinnen für den Fall dass die m-ten Einheitswurzeln zu k gehören.[7] Einige oberflächliche Überlegungen haben mir gezeigt, dass dies an keiner prinzipiellen Schwierigkeit scheitert und nur etwas langweilig ist. Ich hoffe, in den Ferien dazu zu kommen, es mir zu überlegen. Hauptsächlich benötigt man es aber doch nur in der vorigen Fassung.

Von meinen früheren Arbeiten haben Sie wohl schon die Separata. Die betrafen andere Dinge.

Sowie ich Korrekturen erhalte, will ich sie Ihnen zusenden. Da ich den Beweis erst vor einigen Tagen fand, ist es noch nicht so weit. Ich glaube übrigens auch, dass man damit an den Hauptidealsatz heran kann und habe auch schon einige Ansätze. Ich bin aber noch nicht ganz damit durchgekommen und beginne zu fürchten, dass dies deshalb nicht geht, weil er falsch ist. Dann müsste man ein Gegenbeispiel konstruieren. Ich habe aber immer noch eine leise Hoffnung dass es doch gehen wird.[8]

Wie geht es Ihnen? Wie ich höre, sollen Sie jetzt einen neuen Bericht über Takagi für die Annalen schreiben. Das wäre sehr schön.[9]

Kommen Sie eigentlich nach Hamburg zur Hilbertwoche?[10] Es werden ziemlich viel Leute erscheinen, Caratheodory, Weyl, Bohr, E. Schmidt, Toeplitz mit vielen Studenten ... Es wäre doch sehr nett wenn Sie da auch kämen und wir wieder mal ein bischen fachsimpeln könnten. Sie wissen ja, schriftlich geht das bei mir nicht. Wie lange bleiben Sie während der Ferien in Halle und wann kommen Sie wieder zurück? Vielleicht könnte ich Sie auch einmal auf der Durchreise aufsuchen. Ich fahre allerdings erst gegen Ende

[6] Vgl. 8.2.

[7] Vgl. 10.3.

[8] Zum Hauptidealsatz siehe. 13.1.

[9] Vgl. 8.3.

[10] Die Hilbertwoche in Hamburg fand Ende Juli 1927 statt, aus Anlass des 65. Geburtstages von Hilbert. Hasse hat daran nicht teilgenommen. Vgl. Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927.

August dort durch und Anfang Oktober wieder zurück.[11]

Mit herzlichen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

[11] Artin besuchte Hasse in Halle am 13. 9. 1927. Vgl. 17.2.

Kommentare zum Brief Nr.8:

Der Brief Nr. 8 ist ein bemerkenswertes historisches Dokument. Wenige Tage nachdem Artin den Beweis seines bahnbrechenden „allgemeinen Reziprozitätsgesetzes“ gefunden hatte, teilte er dies Hasse mit. Der Satz wird heute nach dem Vorschlag von Hasse [Has30a] „Artinsches Reziprozitätsgesetz“ genannt; er gilt als die Krönung der von Weber, Hilbert, Takagi konzipierten Klassenkörpertheorie und hat eine Wende im Selbstverständnis der algebraischen Zahlentheorie eingeleitet.

An den Brief Nr. 8 schließt sich in den nächsten drei Monaten ein intensiver brieflicher Gedankenaustausch zwischen Hasse und Artin an; wie es später heißen wird war es ein gegenseitiges „Bombardement“ von Briefen (Nr. 8-17). Während im Jahre 1923 bei dem engen Briefwechsel (Briefe Nr. 1-5) wesentlich die Gedanken zu einem einzigen mathematischen Satz zur Sprache kamen (nämlich dem zweiten Ergänzungssatz bei Primzahlexponent), wird es jetzt darum gehen, die Wirkung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes auf die Klassenkörpertheorie auszuloten und die zahlreichen Folgerungen zu erkunden.

8.1 Artins Vorlesung 1927

Artin schreibt, dass er den Beweis während einer Vorlesung über Klassenkörper im Sommersemester 1927 gefunden hat. Es wäre reizvoll, festzustellen, wer damals diese Vorlesung besucht hat.

Sehr wahrscheinlich war **Otto Schreier** unter den Hörern, denn Artin hatte mit ihm einen engen wissenschaftlichen Kontakt, und sie hatten ja auch gemeinsam die Arbeit von Tschebotareff durchgearbeitet (siehe 6.5). Artins Schülerin **Käte Hey** war vermutlich auch dabei; sie hat im Jahre 1927 bei Artin promoviert mit der in Fachkreisen geschätzten Dissertation über Zetafunktionen von Algebren [Hey29]. Wir können auch annehmen, dass **Hans Petersson**, der 1925 bei Hecke promoviert hatte, die Artinsche Vorlesung besucht hat, denn er war an algebraischer Zahlentheorie interessiert. (Artin berichtet im Brief Nr. 26 dass Petersson im Sommersemester 1929 eine Vorlesung über Klassenkörpertheorie hält.)

Ob **van der Waerden** dabei war, ist ungewiss. Er schreibt in seinen Erinnerungen („On the sources of my book *Moderne Algebra*“) [vdW75], dass er im Sommer 1926 nach Hamburg ging, und weiter: „*I met Artin and Schreier nearly every day for two or three semesters.*“ Wenn es wirklich drei Semester waren, dann hatte er sicher die Klassenkörper-Vorlesung von Artin im

Sommer 1927 besucht.

8.2 Das Jacobische Symbol

Das von Artin in seinem Brief angesprochene Jacobische Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ ist das m-te Potenzrestsymbol in Bezug auf den fest gewählten Exponenten m. Von dem zugrunde liegenden Zahlkörper k wird dabei vorausgesetzt, dass er die m-ten Einheitswurzeln enthält. Wir haben die klassische Definition des Potenzrestsymbols schon auf Seite 42 angegeben, nämlich als m-te Einheitswurzel durch die Kongruenz

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{N\mathfrak{p}-1}{m}} \bmod \mathfrak{p}\,. \tag{17}$$

Dabei ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal (teilerfremd zu m und μ). Ferner wird $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ als multiplikative Funktion des Nenners definiert. In dieser Weise ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ nur dann definiert, wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ teilerfremd ist zu μ und m.

Als einfache Folgerung aus seinem allgemeinen Reziprozitätsgesetz ergibt sich, wie Artin schreibt, die folgende Tatsache, die er im nächsten Brief Nr. 9 und in späteren Briefen als die „**$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache**“ bezeichnet:

> *Das Jacobische Symbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ hängt nur ab von der Strahlklasse von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf den Körper $k(\sqrt[m]{\mu})$, der aufgefasst wird als Klassenkörper über k.*

In der Tat ist das unmittelbar zu sehen, wenn man die Definition (17) mit Hilfe des Frobenius-Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{p}}$ in der Form schreibt:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{\sigma_{\mathfrak{p}}\sqrt[m]{\mu}}{\sqrt[m]{\mu}}\,; \tag{18}$$

Das Artinsche Reziprozitätsgesetz für $k(\sqrt[m]{\mu})|k$ besagt ja gerade, dass $\sigma_{\mathfrak{p}}$ und damit $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ nur abhängt von der Strahlklasse von $\mathfrak{p}$. Dieselbe Formel (18) gilt (vermöge Multiplikativität) für einen beliebigen zu μ und m teilerfremden Divisor $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{p}$.

Diese „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“, schreibt Artin, habe schon Takagi als den *wesentlichen Inhalt des Reziprozitätsgesetzes* bezeichnet, und eben das habe Artin dazu geführt, die Bezeichnung „allgemeines Reziprozitätsgesetz“ für seinen Isomorphiesatz zu wählen.

Die von Artin erwähnte Stelle bei Takagi findet sich in Takagis zweiter großer Arbeit zur Klassenkörpertheorie [Tak22], mit dem Titel „*Über das*

Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper“, am Ende des dritten Absatzes der Einleitung. Den Hinweis auf diese Stelle bei Takagi hatte Artin schon in seiner L-Reihenarbeit 1923 [Art23b] gegeben. Hierzu ist folgendes zu sagen.

Takagi behandelte in der genannten Arbeit den Fall eines Primzahlexponenten $m = \ell$. Nur in diesem Falle war es ihm gelungen, die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ zu beweisen (nämlich mit Hilfe des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes) und daraus das allgemeine Reziprozitätsgesetz (2) (Seite 43) für das Jacobische Symbol zu erhalten. Die jetzt vorliegende Verallgemeinerung bezieht sich also darauf, dass m ein beliebiger Exponent sein darf.

Allerdings wird in Artins Brief nur die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ verallgemeinert; dabei bleibt Artin stehen. Er sagt nicht, wie er im allgemeinen Fall aus der „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ das allgemeine Reziprozitätsgesetz (2) für einen beliebigen Exponenten m und beliebigen Grundkörper (der die m-ten Einheitswurzeln enthält) herzuleiten gedenkt. Es ist nicht einmal klar, ob er eine solche Herleitung bereits durchgeführt hatte. Vielleicht dachte er daran, dies mit Hilfe des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes zu tun, wie es im Falle eines Primzahlexponenten $m = \ell$ bisher gemacht wurde? Dazu hätte jedoch zunächst das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz auf den Fall eines beliebigen Exponenten verallgemeinert werden müssen.[12] In jedem Falle ist es aber evident, dass Artin die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ deshalb erwähnt, weil er darin die Möglichkeit zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für das Jacobische Symbol sieht.

Aus den nächsten Briefen entnehmen wir, dass ihm Hasse eine ganz einfache Herleitung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes aus der „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ mitgeteilt hat, und zwar für beliebigen Exponenten m. Diese Herleitung basiert auf einer Idee von Furtwängler, die jener kürzlich im Falle $m = \ell^2$ angewandt und die Hasse dann auf beliebigen Exponenten m ausgedehnt hatte. (Vgl. 9.4.) Diese Hasse-Furtwänglersche Methode hat Artin dann in seine Arbeit [Art27a] aufgenommen, wobei er sowohl Furtwängler als auch Hasse zitiert.

In der Literatur heißt es manchmal, dass das Artinsche Reziprozitätsgesetz „alle bekannten Reziprozitätsgesetze enthält“, wobei die Reziprozitätsgesetze für das Jacobische Symbol gemeint sind. Dabei wird übersehen, dass diese Reziprozitätsgesetze, soweit sie sich auf einen allgemeinen Exponenten m beziehen und nicht nur auf Spezialfälle, überhaupt erst mit Hilfe des

[12] Wie weiter unten erläutert, kannte Artin vermutlich nicht die Arbeit von Western [Wes08] aus dem Jahre 1908, in welcher diese Verallgemeinerung bereits vorlag. Siehe den letzten Absatz von 9.4, Seite 153.

Artinschen Reziprozitätsgesetzes bewiesen werden und damit als bekannt gelten konnten. Aus den Artinschen Briefen entnehmen wir, dass dabei Hasse und Furtwängler wesentliche Beiträge geleistet haben.

8.3 Hasses Pläne für die Annalen

Artin fragt in seinem Brief an, ob Hasse einen „*neuen Bericht über Takagi für die Annalen*“ schreiben will. In der Tat gab es damals Überlegungen dahingehend, dass Hasse in den Mathematischen Annalen eine vollständige Darstellung der Takagischen Klassenkörpertheorie publizieren solle. Offenbar hatte Artin davon gehört und begrüßt nun diesen Plan. Der Plan wurde jedoch nicht realisiert.

Anscheinend ging dieser Plan zurück auf eine Idee von Hilbert, der die schwer zugänglichen Takagischen Arbeiten [Tak20, Tak22] zur Klassenkörpertheorie in den Mathematischen Annalen noch einmal abdrucken und damit einem breiteren Leserkreis zugänglich machen wollte. Wir haben im Hilbert-Nachlass einen Brief von Takagi an Hilbert gefunden, datiert am 28. 8. 1926, in dem es heißt:

> *Ihrem wohlwollenden und mir sehr ehrenhaften Vorschlag, meine Abhandlungen über die relativ abelschen Zahlkörper und über das Reziprozitätsgesetz in den mathematischen Annalen abdrucken zu lassen, gehe ich gerne ein ... Obwohl nun viele sachliche und redactionelle Verbesserungen mir sehr wünschenswert erscheinen, möchte ich doch diesmal mich auf wenige, ohne zu grossen Zeitaufwand mögliche Abänderungen beschränken; ich werde nochmals die Abhandlungen durchsehen und hoffe die Separatdrucke mit Eintragungen baldmöglichst nach Göttingen absenden zu können ... Es ist mir sehr willkommen, wenn ein deutscher Mathematiker gewillt ist, die sehr notwendigen sprachlichen Verbesserungen zu unternehmen, sowie auch die Korrektur beim Druck...*

Offenbar hatte Hilbert vorher mit einem „deutschen Mathematiker“ vereinbart, dass dieser die Edition des Takagischen Textes übernehmen würde. Wie es scheint, war das Bessel-Hagen gewesen. Jedenfalls schrieb Bessel-Hagen am 17. August 1926 aus Göttingen eine Postkarte an Hilbert, der sich damals im Urlaub in St. Moritz aufhielt, mit dem folgenden Inhalt:

> *... In dem vor wenigen Tagen erschienenen Hefte des Jahresberichtes der D.M.V. befindet sich ein Bericht von Hasse über die*

> *Klassenkörpertheorie, der so vorzüglich klar geschrieben ist und den ganzen Aufbau der Theorie mit einem nur die Hauptgedanken enthaltenden Skelett der Beweise so wundervoll herausschält, daß die Lektüre ein wahres Vergnügen ist und für das Eindringen in die Theorie jetzt wirklich alle Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind ...*

Wir schließen daraus, dass Bessel-Hagen von Hilbert über dessen Takagi-Pläne für die Mathematischen Annalen informiert worden war, und dass er deshalb auf die neue Situation aufmerksam machen wollte, die durch das Erscheinen des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has26a] entstanden war. Man beachte das Datum: Die Postkarte von Bessel-Hagen war am 17. 8. datiert, der Brief von Takagi 11 Tage später am 28. 8. Da aber die Post von Deutschland nach Japan damals sicher länger als 11 Tage dauerte (es gab ja noch keine Luftpost), so muss Hilbert an Takagi schon geschrieben haben, bevor er durch Bessel-Hagen von dem Hasseschen Bericht erfuhr.

Wie es scheint, hatte Hilbert daraufhin von dem Plan eines reinen Wiederabdrucks der Takagischen Arbeiten Abstand genommen; er wünschte nunmehr eine neue Darstellung mit allen Beweisen. Man beachte dazu, dass in dem 1926 erschienenen Teil I des Hasseschen Klassenkörper-Berichts [Has26a] die Beweise nicht vollständig ausgeführt sind, was ja auch Bessel-Hagen an Hilbert schreibt. Ursprünglich hatte Hasse gar nicht vor, auf die Details der Beweise einzugehen, sondern sein Ziel war, wie er in der Einleitung zu [Has26a] schreibt,

> *einen Überblick über diese höchst elegante, aber leider bisher nur wenig bekannte Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper, sowie einige sich daran anschließende, bis heute ungelöste Probleme zu geben, in der Absicht, einerseits die Fragestellungen, Grundgedanken und Hauptresultate dieser Theorie weiteren Kreisen zugänglich zu machen und ihr damit neue Freunde zu werben, andererseits demjenigen, der in die Einzelheiten der Theorie eindringen will, einen praktischen Wegweiser zu liefern, der ihm Umwege beim Studium der Originalarbeiten erspart* (zitiert aus [Has26a]).

In dem Nachlass von Hasse haben wir nun einen Brief von Hilbert gefunden, datiert am 1. November 1926, in dem es heißt:

> *Ihr Anerbieten, für die Annalen ein Manuskript mit dem Titel „Takagis Theorie der Abelschen Zahlkörper, bearbeitet von Hasse“ zur Verfügung zu stellen, nehme ich gerne an – zugleich auch*

> *im Namen der Annalenleser und der zahlentheoretischen Wiss., der Sie damit einen wichtigen Dienst erweisen ... Ich habe soeben einen Brief an Takagi aufgesetzt, darf aber von vorneherein seines Einverständnisses sicher sein.*

Hasse antwortete zwei Tage später, am 3. November 1926. Er beruft sich auf ein ausführliches Gespräch mit Bessel-Hagen über einen eventuellen Takagi-Bericht für die Mathematischen Annalen. Dies deutet wiederum darauf hin, dass Bessel-Hagen an dem Plan eines Takagi-Berichts für die Mathematischen Annalen beteiligt war. Hasse erläutert sein Konzept eingehend, und er begründet, weshalb eine neue, systematische Darstellung der Theorie wünschenswert ist. Dann fragt er:

> *Kommt es Ihnen nicht darauf an, wie lang die Publikation ist, wollen Sie also eine unbedingt vollständige, wenn auch noch so lange Wiedergabe der Theorie? Oder darf ein gewisser Umfang nicht überschritten werden?*

Wiederum zwei Tage später, am 5. November, antwortet Hilbert:

> *Ich bin gar nicht im Zweifel, daß wir Ihren ersten Vorschlag annehmen sollten und eine unbedingt vollständige Wiedergabe der Takagischen Theorie in Ihrer Ausführung und Korrektur in den Annalen bringen müssen; ich möchte Sie sogar bitten, nicht etwa auf Kosten der leichten Lesbarkeit und Verständlichkeit Textkürzungen vorzunehmen; es kann in diesem Fall auf einige Druckbogen mehr nicht ankommen. Ich möchte eine solche Darstellung wünschen, dass der Leser nicht noch andere Abhandlungen von Ihnen, Takagi oder anderen hinzuzuziehen braucht, sondern – wenn er etwa mit den Kenntnissen meines Berichts ausgestattet ist – Ihre Abhandlung verhältnismäßig leicht verstehen und auch die Grundgedanken sich ohne große Mühe aneignen kann. Ich bin ... überzeugt, dass das so entstehende Heft (bez. Doppelheft) den Annalen zur Zierde gereichen wird...*

Allerdings: Hasse wollte den Bericht nicht persönlich für den Druck bearbeiten. In seinem Brief hatte er geschrieben:

> *... Ich stelle meine Arbeitskraft, wie ich auch schon Herrn Bessel-Hagen sagte, insofern gerne zur Verfügung, daß ich meine – lückenlosen – Aufzeichnungen, die meinem Bericht an die D.M.V.*

zugrunde liegen, Herrn Bessel-Hagen zur vollständigen Gestaltung des Manuskripts gebe. Bei der Fülle der verschiedenen Arbeiten (Fortsetzung meines Takagi-Berichtes an die D.M.V. (Reziprozitätsgesetze), Arbeiten zur komplexen Multiplikation (Begründung durch die $\wp$-Funktion), Algebra in Sammlung Göschen u.a.m.) kann ich leider nicht mehr als dies tun, d.h. nicht persönlich die Gestaltung zusagen, will aber gerne ein von Herrn Bessel-Hagen bearbeitetes Manuskript einer genauen Durchsicht unterziehen …

Dass dieser Plan schließlich nicht zur Ausführung gelangte, lag vielleicht daran, dass Bessel-Hagen häufig krank war und daher die ihm zugedachte Aufgabe nicht wahrnehmen konnte. Vielleicht gab es auch andere Gründe. Jedenfalls ist im Jahre 1927, als sich Bessel-Hagen vornehmlich auf Betreiben Hasses nach Halle umhabilitierte, in der Korrespondenz von Bessel-Hagen mit Hasse keine Rede mehr von dem Klassenkörpertheorie-Projekt für die Mathematischen Annalen. In dem Antrag an die Fakultät in Halle auf Umhabilitation Bessel-Hagens schreibt Hasse:

„*Herr Bessel-Hagen wird als eine Persönlichkeit von beeindruckendem Verständnis und hoher wissenschaftlicher Kultur gerühmt, der ausgezeichnet durchdachte Vorlesungen hält.*“

Hasse hatte sich von der Umhabilitation Bessel-Hagens, den er als Person und wegen seiner weitgespannten Bildung schätzte, wohl hauptsächlich eine Unterstützung bei den Vorlesungen zur Analysis versprochen.

Im Brief Nr. 10 vom 21. 7. 1927 scheint Artin noch nicht über diese Entwicklung informiert zu sein, denn er bezieht sich auf die Nachricht, dass sich Bessel-Hagen von Göttingen nach Halle umhabilitieren wird und äußert sich kritisch über den Plan, dass jener den Hasseschen Bericht über Takagi für die Mathematischen Annalen redigieren soll.

Übrigens zog Bessel-Hagen schon bald – 1928 – nach Bonn weiter, wo er bis zu seinem Tod 1945 blieb. Die Übersiedlung nach Bonn war durch Toeplitz veranlasst worden, der 1928 von Kiel nach Bonn gewechselt hatte und sich in Bonn einen Mitarbeiter wünschte, der seinen (Toeplitz') historisch-pädagogischen Interessen entgegenkam. Das geht aus dem Briefwechsel Toeplitz-Hasse hervor. Außerdem erhielt Bessel-Hagen in Bonn als Dozent ein festes Einkommen, während dies in Halle nicht der Fall war.

Anstelle eines Berichtes für die Annalen hat sich Hasse dann entschlossen, die Beweise zu dem Teil I seines Berichtes zu publizieren; sie erschienen

als Teil Ia im DMV-Jahresbericht [Has27a], nach „*Anregungen von verschiedenen Seiten*“, wie er schreibt.

Der Teil II erschien schliesslich 1930 und enthielt die Reziprozitätsgesetze auf der Grundlage von Artins Reziprozitätsgesetz [Has30a]. In späteren Briefen werden wir sehen, dass Artin von Hasse laufend über den Fortgang seiner Arbeiten zu diesem Teil II informiert wurde und daran regen Anteil nahm.

9 19.07.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg 19. Juli 1927

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für die überaus schnelle mich beschämende[1] Antwort, die mich brennend interessiert hat. Ich habe deshalb sofort meinen Beweis aufgeschrieben und sende ihn Ihnen in allen Einzelheiten.[2] Nun zu den einzelnen Punkten Ihres Briefes:

1.) Ich habe insbesondere, nur unter Benutzung der *Klassenkörpertheorie* und *nicht* des Rez[iprozitäts]ges[etzes] von Takagi bewiesen, $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)_{(m)}$ hängt nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ ab.[3] Dabei ist $\mathfrak{a}$ *beliebiges zur Relativdiskr*[iminante] *von* $\sqrt[m]{\mu}$ *primes Ideal*, braucht aber *nicht* zu m prim zu sein, wenn $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ definiert wird als Symbol der Klasse. Ferner kann m eine beliebige ganze Zahl sein: $m = \ell_1^{\nu_1}\ell_2^{\nu_2}\ldots\ell_r^{\nu_r}$.

2.) Sagen Sie, die Behauptung für $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{(m)}$ sei trivial.[4] Wie meinen Sie das? Aus meinem Rez[iprozitäts]ges[etz] folgt es allerdings und sogar gleich für $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)_{(m)}$. Dagegen folgt es aus der *Klassenkörpertheorie noch nicht.* Diese gibt nur den Satz dass $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{(m)} = 1$ ist dann und nur dann wenn $\mathfrak{p}$ in der Hauptklasse liegt. In den anderen Klassen ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{(m)} \neq 1$, mehr weiss man nicht. Ist m Primzahl, so ist es das Takagische Rez[iprozitäts]ges[etz] [5], und für allgemeines m folgt es aus dem meinen.

[1] Wir wissen nicht, was der Grund für diese Wortwahl Artins gewesen ist. Möglicherweise bezieht sich das darauf, dass Hasse umgehend geantwortet hat (wie es seine Gewohnheit war), während Artin mit seinen Antworten nicht immer so schnell war.

[2] Offenbar hatte Hasse um Einzelheiten zu dem Beweis gebeten. Der Artinsche Beweis findet sich nun in der Beilage zu diesem Brief.

[3] Dies ist die von Artin in seinem vorangegangenen Brief berichtete „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache". Siehe 8.2.

[4] Es geht um die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache", falls $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

[5] Artin meint die zweite Arbeit von Takagi [Tak22], und darin das auf der ersten Seite formulierte *Hauptergebnis*.

3.) Ganz besonders gespannt bin ich auf den Furtwänglerschen Beweis[6]. Ist es möglich den zu verstehen ohne die ganze Arbeit zu lesen? Darf ich an Sie die unbescheidene Bitte richten, mir einen Beweis von $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ (α primär) aus der bewiesenen $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ Tatsache zu schreiben. Ich habe im Kolleg mein Rez[iprozitäts]ges[etz] gebracht und auch die $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ Geschichte. Hoffentlich ist es möglich, das sehr kurz zu machen, so dass ich die Herleitung im Kolleg bringen kann. Von dem Furtwänglerschen Beweis habe ich den Eindruck, als müsste man erst alles lesen und das bring ich jetzt nicht auf. Darf ich Sie also um den Beweis von $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ bitten?

4.) Es wird mir grosse Freude bereiten, wenn Sie meinen Beweis gleich verwenden.[7] Ich glaube, dass er viel einfacher ist als die bisherigen, ohne dass er diese voraussetzt, und auch mehr bedeutet: Aus meinem Reziprozitätsgesetz kann zwar die $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)_{(m)}$ Tatsache sofort erschlossen werden, *dagegen folgt aus dieser noch nicht umgekehrt mein Rez*[iprozitäts]*ges*[etz]. Ich glaube übrigens, dass mein Beweis in einer etwas kondensierten Darstellung auf höchstens 2–3 Seiten zu bringen ist. Die in den L-Reihen[8] behandelten Spezialfälle des Rez[iprozitäts]ges[etzes] sind nunmehr überflüssig. Der dortige Satz 2[9] ist ja allgemein bewiesen, also auch alle folgenden Sätze, insbesondere der Satz über Frobenius, den ja inzwischen Tschebotareff bewiesen hat (allerdings weniger scharf).[10]

Darf ich Sie noch um Entschuldigung bitten wegen meiner schlechten Schrift aber ich beeile mich, damit es rasch geht. Darf ich bald Ihre Antwort über Furtwängler erhoffen, damit ich noch vor Semesterschluss die Sache im

[6]Siehe 9.4.

[7]Offenbar hatte Hasse angefragt, ob er Artins Beweis in seinem Klassenkörperbericht, Teil II verwenden dürfe. Siehe dazu 10.5.

[8]Gemeint ist die L-Reihenarbeit [Art23b]. Siehe 5.6.

[9]d.h. das Artinsche Reziprozitätsgesetz.

[10]Gemeint ist der sogenannte Dichtigkeitssatz von Tschebotareff, der ja eine Vermutung von Frobenius bestätigt. Siehe 6.5. Wenn Artin sagt, dass der Dichtigkeitssatz von Tschebotareff „weniger scharf“ ist, dann bezieht er sich wohl darauf, dass er (Artin) mit der natürlichen Dichte arbeitet, während Tschebotareff die sogenannte Dirichletsche Dichte benutzt. Wenn eine Menge von Primstellen eine natürliche Dichte besitzt, dann auch eine Dirichletsche Dichte, aber im allgemeinen nicht umgekehrt.

Kolleg behandeln kann?

Mit vielen Grüssen und Empfehlungen an Frau Gemahlin

Ihr Artin

Können Sie $\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$ auch beweisen?
Das wäre sehr schön! [11]

[11] Hasse konnte die Produktformel für das Hilbertsche Symbol in der Tat beweisen. Dazu mussten aber zunächst alle Terme definiert werden. Siehe dazu 10.3.

Beilage zum Brief Nr. 9:

1.) k sei ein gegebener Grundkörper, K ein gegebener relativ Abelscher Oberkörper mit Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal das nicht in der R[elativ]d[iskriminante] von K/k aufgeht und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K, so gibt es *genau eine Subst[itution]* σ aus $\mathfrak{G}$ von der Art, dass für alle ganzen Zahlen A aus K gilt:[12]

$$A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma A \pmod{\mathfrak{P}}\ , \tag{1}$$

wobei unter N immer Absolutnorm von k in bezug auf R = Körper der rationalen Zahlen verstanden wird. Ersetzt man den Primteiler $\mathfrak{P}$ durch den konjugierten $\tau\mathfrak{P}$, so ist σ zu ersetzen durch $\tau\sigma\tau^{-1}$. Da G abelsch ist, gilt also (1) bei festem σ für alle Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$, also auch $\operatorname{mod}\mathfrak{p}$. Für alle ganzen A aus K gilt also:

$$A^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma A \pmod{\mathfrak{p}} \tag{2}$$

Die Substitution σ und das Primideal $\mathfrak{p}$ mögen als einander zugeordnet bezeichnet werden. Bekanntlich ist σ eine Erzeugende der Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$, dadurch ist aber σ nicht umgekehrt gekennzeichnet, da man ja als Erzeugende noch gewisse Potenzen von σ nehmen kann. Haben die Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ den Relativgrad f, so hat also σ die Ordnung f, da f die Ordnung der Zerlegungsgruppe ist.

Sei $\mathfrak{g}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und K_0 der zu $\mathfrak{g}$ gehörige Unterkörper von K. Die Gruppe von K_0 ist dann die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$. Da (2) für alle Zahlen von K gilt, so erst recht für alle aus K_0. Dann aber kann man, da $\mathfrak{g}(A_0) = A_0$ ist[13], auch $\sigma\mathfrak{g}$ an Stelle von σ[14] verwenden. Gehört also $\mathfrak{p}$ in K zu σ, dann in K_0 zu $\sigma\mathfrak{g}$. Speziell folgt daraus ($f = 1$):

In K_0 zerfällt $\mathfrak{p}$ genau dann in lauter Pr[im]id[eale] ersten Rel[ativ]gr[ades], wenn die in K zu $\mathfrak{p}$ gehörige Substitution σ zu $\mathfrak{g}$ gehört.

Sei jetzt K' ein relativ zu k in bezug auf K fremder Abelscher Körper mit Gruppe $\mathfrak{G}'$. Die Gruppe des komp[onierten] Körpers KK' ist direktes Produkt $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G}'$.[15] Gehört nun $\mathfrak{p}$ in KK' zu $\sigma\sigma'$, und bildet man in KK'

[12] Die Formelnummern in dieser Beilage sind Artins. Sie sollten nicht verwechselt werden mit der sonst in diesem Buch verwendeten Formelnumerierung.

[13] Offenbar versteht Artin unter A_0 eine beliebige ganze Zahl aus K_0.

[14] Artin schreibt hier irrtümlich $\mathfrak{g}$ statt σ.

[15] Heute würde man dafür $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$ schreiben. „K' relativ zu k in bezug auf K fremd“ bedeutet, dass K und K' linear disjunkt über k sind.

die Gleichung (2), wobei aber A nur aus K entnommen ist, so folgt aus $\sigma'(A) = A$, dass $\mathfrak{p}$ in K zu σ und analog in K' zu σ' gehört.

Sei ζ eine primitive m-te Einheitswurzel. Setze $K = k(\zeta)$. Gehört $\mathfrak{p}$ (teilerfremd zu m) in K zu σ, so gilt insbesondere $\zeta^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma\zeta \pmod{\mathfrak{p}}$ also: $\sigma\zeta = \zeta^{N\mathfrak{p}}$. Demnach $\sigma = (\zeta \to \zeta^{N\mathfrak{p}})$. Soll $\mathfrak{p}$ in K in Pr[im]id[eale] 1. Grades zerfallen, muss $\sigma = 1$, also $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{m}$ sein. Also ist K der Klassenkörper für den Strahl:

$$N\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod{m}$$

und in einer Idealklasse nach diesem Strahl liegen genau alle zu m primen Ideale mit Normen die mod m kongruent sind. Man sieht, dass $\sigma = (\zeta \to \zeta^{N\mathfrak{p}})$ eine eineindeutige Abbildung der Klassen auf Substitutionen ist. Ist $\sigma_{\mathfrak{p}} = (\zeta \to \zeta^{N\mathfrak{p}}); \sigma_{\mathfrak{q}} = (\zeta \to \zeta^{N\mathfrak{q}})$, so ist $\sigma_{\mathfrak{q}}\sigma_{\mathfrak{p}} = (\zeta \to (\zeta^{N\mathfrak{q}})^{N\mathfrak{p}}) = (\zeta \to \zeta^{N(\mathfrak{pq})})$ woraus hervorgeht, dass dem Produkt der Klassen das Produkt der Substitutionen entspricht. Also Isomorphie. Das Rez[iprozitäts]ges[etz] gilt also für relative volle Kreiskörper. Substitutionen und Klassen sollen in diesem Fall mit gleichem Buchstaben bezeichnet werden.

Sei K_0 Unterkörper des Kreiskörpers $K = k(\zeta)$ gehörig zur Gruppe $\mathfrak{g}$. Die Restgruppe der die Subst[itutionen] aus $\mathfrak{g}$ entsprechen heisse auch $\mathfrak{g}$. Die zu $\mathfrak{g}$ in irgend einem der beiden Sinne gehörigen Pr[im]id[eale] aus k und nur diese zerfallen in K_0 in Pr[im]id[eale] 1. Gr[ades]. Also ist K_0 Klassenkörper für Restgruppe $\mathfrak{g}$. Gehört $\mathfrak{p}$ in K zu σ, so in K_0 zu $\sigma\mathfrak{g}$. $\sigma\mathfrak{g}$ kann auch als Nebengruppe von Restgruppe $\mathfrak{g}$ aufgefasst werden und ist dann gerade die, in der $\mathfrak{p}$ liegt. Also wieder eineindeutige Zuordnung von Klassen und Galoisgruppe. Da in K isomorph, so auch in K_0 (Faktorgruppen).

Das bisherige kann auch so ausgesprochen werden: das Rez[iprozitäts]-ges[etz] gilt für alle Klassenkörper von k die zu einer Klasseneinteilung der Idealnormen (absolute) von k in Restklassen gehören, da diese gerade die relativen Kreiskörper sind, wie ja auch aus dem Beweise hervorgeht.

Sei jetzt wieder K ein *beliebiger* relativ Abelscher Körper über k und Klassenkörper für eine Klassenteilung die kurz die Klassenteilung für K genannt werde.

Hilfssatz 1. $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ mögen in derselben Klasse nach K liegen, $\mathfrak{p}_1$ mag zur Subst[itution] σ gehören. Man nehme an, dass man einen *Kreiskörper* K' finden kann mit folgenden Eigenschaften.

1.) K und K' haben Durchschnitt k.

2.) Bei der Idealklassenteilung für K', die wir, da für K' das Rez[iprozitäts]-ges[etz] gilt, mit denselben Buchstaben bezeichnen wie die Substitu-

tionen von K', mögen auch $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ in derselben Klasse σ' nach K' liegen:

3.) Ist f die Ordnung von σ, g die Ordnung von σ', so ist f ein Teiler von g.

Behauptung: auch $\mathfrak{p}_2$ gehört in K zu σ.

Beweis: Im komponierten Körper KK' gehört $\mathfrak{p}_1$ zu $\sigma\sigma'$. Nun ist KK' Klassenkörper für den Durchschnitt, also für diejenige Klassenteilung die durch „überschneiden" der für K mit der für K' hervorgeht. Da $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sowohl für K als auch für K' in derselben Klasse liegen, liegen sie auch in derselben Idealklasse für KK', haben also in KK' und auch in jedem Unterkörper von KK' beide dieselben Zerlegungsgesetze.

Nun sei K_0 derjenige Unterkörper von KK', der zu der vom Element $(\sigma\sigma')$ erzeugten cyklischen Untergruppe $\mathfrak{g} : (\sigma\sigma')^\nu$ gehört. $\mathfrak{p}_1$ gehört in KK'[16] zu $\sigma\sigma'$ und dies liegt in $\mathfrak{g}$. Also zerfällt $\mathfrak{p}_1$ in K_0 in lauter Pr[im]id[eale] ersten Grades. $\mathfrak{p}_2$ hat die gleichen Zerlegungsgesetze wie $\mathfrak{p}_1$, also zerfällt auch $\mathfrak{p}_2$ in K_0 in lauter Pr[im]id[eale] ersten Grades. Nach einem vorhin bewiesenen Satz gehört also $\mathfrak{p}_2$ in KK' zu einer Substitution aus $\mathfrak{g}$, etwa zu $(\sigma\sigma')^\nu$. Da alles Abelsch ist, kann man schreiben $\sigma^\nu\sigma'^\nu$. Nach einem anderen vorhin gezeigten Satz gehört also $\mathfrak{p}_2$ in K' zu σ'^ν. Wir hatten über K' angenommen (in K' gilt das Rez[iprozitäts]ges[etz]), dass $\mathfrak{p}_2$ in K' zu σ' gehört. Also muss $\nu \equiv 1 \pmod g$, erst recht also $\nu \equiv 1 \pmod f$ sein. In KK' gehört also $\mathfrak{p}_2$ zu $\sigma\sigma'$ und folglich in K zu σ. q.e.d.

Es folgt ein Hilfssatz, dessen Formulierung ganz im Körper der rationalen Zahlen verläuft.

Hilfssatz 2. Es sei f eine vorgegebene natürliche Zahl und p_1 und p_2 zwei *gleiche* oder *verschiedene Primzahlen* > 0. Es gibt *unendlich viele Primzahlen* q von der Art, dass $\dfrac{p_1}{p_2}$ ein f-ter Potenzrest $\bmod\, q$ in R ist, und dass für kein $\nu : 1 \leq \nu \leq f-1$ eine Potenz p_1^ν ein f-ter Potenzrest ist. In einigen Fällen heisst es statt f-ter Potenzrest überall $2f$-ter Potenzrest, wogegen *immer nur* $1 \leq \nu \leq f-1$ gefordert wird.

Beweis: 1.) Für $f = 1$ kann q irgend eine von p_1 und p_2 verschiedene Primzahl sein.

2.) $f > 1$. Es bedeute ζ eine primitive f-te Einheitswurzel. Ist f gerade *und* eine der Primzahlen p_1 und p_2 Teiler von f, so soll ζ eine primitive $2f$-te Einh[eits]wurz[el] sein. Wir setzen $k_1 = R\left(\zeta, \sqrt[f]{\frac{p_1}{p_2}}\right)$, bezw.

[16] Artin schreibt versehentlich K statt KK'.

$k_1 = R\left(\zeta, \sqrt[2f]{\frac{p_1}{p_2}}\right)$ je nachdem, welcher der eben erwähnten Fälle da ist. Ist d ein *Primteiler* von f, so ist $\sqrt[d]{p_1}$ nur dann in k_1 enthalten, wenn $p_1 = (\frac{p_1}{p_2})^\nu \lambda_0^d$ ist, wo λ_0 eine Zahl aus $k_0 = R(\zeta)$ bedeutet. Also muss $\sqrt[d]{\frac{p_2^\nu}{p_1^{\nu-1}}}$ eine Zahl aus k_0 sein also $R\left(\sqrt[d]{\frac{p_2^\nu}{p_1^{\nu-1}}}\right)$ als Unterkörper von k_0 Abelsch, insbesondere galois'sch. Das geht nur für $d = 2$ und auch dann nur, wenn p_1 oder p_2 ein Teiler von f ist. Auf jeden Fall ist also:

$$k_2 = k_1(\sqrt[f]{p_1}) \quad \text{bezw.} \quad k_2 = k_1(\sqrt[2f]{p_1})$$

relativ cyklisch in Bezug auf k_1 vom Relativgrad f.

Nach Klassenkörpertheorie gibt es in k_1 unendlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ vom absolut ersten Grad, die in k_2 unzerlegt bleiben. Ist q die Primzahl in der $\mathfrak{q}$ aufgeht, so ist kein p_1^ν f-ter (bezw. $2f$-ter) Potenzrest $\bmod q$ wie man sofort sieht, da $\mathfrak{q}$ auch in keinem Zwischenkörper $k_1(\sqrt[f]{p_1^\nu})$ zerfällt. Nun ist $\mathfrak{q}$ vom ersten Grad in k_1. Also zerfällt q, da k_1 galois'sch ist, in k_1 in *lauter* Primideale ersten Grades, und das ist sicher auch im Unterkörper $R\left(\sqrt[f]{\frac{p_1}{p_2}}\right)$ bezw. $R\left(\sqrt[2f]{\frac{p_1}{p_2}}\right)$ der Fall. Das heisst aber, dass $\frac{p_1}{p_2}$ ein f-ter bezw. $2f$-ter Potenzrest $\bmod q$ ist.

Ich bin gern bereit, eventuell diesen Beweis ausführlicher zu schreiben, wenn er Ihnen zu kurz ist. Da Sie aber ja doch in der Theorie ganz zuhause sind, wird das wohl genügen.

Hilfssatz 3. Ist f, p_1 und p_2 vorgegeben, so gibt es unendlich viele q mit der Art, dass die Gruppe der Primreste $\bmod q$ eine Untergruppe $\mathfrak{g}$ hat mit der Eigenschaft: Teilt man in Klassen mit $\mathfrak{g}$ als Hauptklasse, so liegen p_1 und p_2 in derselben Nebengruppe und die Ordnung dieser Klasse ist durch f teilbar.

Beweis: Es bedeute q eine Primzahl von Hilfssatz 2. Man wähle $\mathfrak{g} =$ Gruppe der f-ten Potenzreste $\bmod \mathfrak{q}$.

Satz 1. Ist K ein beliebiger relativ Abelscher Körper über k, so sind alle Primideale $\mathfrak{p}$ derselben Klasse nach K ein und derselben Substitution zugeordnet.

Beweis: 1.) $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ seien zwei Primideale *ersten Grades* derselben Klasse nach K. Man setze $N\mathfrak{p}_1 = p_1$ und $N\mathfrak{p}_2 = p_2$ und bestimme q nach Hilfssatz 3 so, dass der zu dieser Klasseneinteilung der Idealnormen gehörige relative Kreiskörper K' fremd zu K ist. Dann genügt K' den Voraussetzun-

gen von Hilfssatz 1 und $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind der gleichen Subst[itution] zugeordnet. (f = Grad von σ, wo σ zu $\mathfrak{p}_1$ gehört.)

2.) $\mathfrak{p}$ sei beliebig, p die Primzahl durch die $\mathfrak{p}$ teilbar ist, $N\mathfrak{p} = p^a$. Es gehöre $\mathfrak{p}$ zu σ und σ habe Grad f. Man wende Hilfssatz 3 an auf $p_1 = p_2 = p$ wobei aber f ersetzt werde durch af. Dann liegt p^a in einer Nebengruppe mit durch f teilbarer Ordnung. Sei wieder K' der zugehörige zu K fremde Klassenkörper. $\mathfrak{p}$ liegt in einer gewissen Idealklasse nach KK'. In dieser gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ vom ersten Grade. $\mathfrak{p}_1$ liegt dann mit $\mathfrak{p}$ sowohl in derselben Klasse nach K als auch in derselben nach K' und man kann Hilfssatz 1 anwenden. Allen Primidealen derselben Klasse ist also wegen 1 die gleiche Substitution zugeordnet.

Wir sagen also, der Idealklasse $\mathfrak{K}$ sei σ zugeordnet. Dass verschiedenen Idealklassen verschiedene σ entsprechen, wird sich erst am Schluss von allein ergeben. Zunächst zeigen wir:

Satz 2. Es gehöre $\mathfrak{K}_1$ zu σ_1 und $\mathfrak{K}_2$ zu σ_2 ($\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Idealklassen nach K). Dann gehört $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ zu $\sigma_1\sigma_2$.

Beweis: f_1 und f_2 seien die Grade von σ_1 und σ_2. Es gibt unendlich viele *Primzahlen* $q_1 \equiv 1 \pmod{f_1}$ und $q_2 \equiv 1 \pmod{f_2}$. Wähle $m = q_1 q_2$ so, dass der Körper $R(\zeta)$ $(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}})$ fremd ist zu k *und* zu K. Dann [hat] $k(\zeta)$ Relativgrad $\varphi(m)$, [ist also] Klassenkörper für $\varphi(m)$ Restklassen der Idealnormen, also gibt es in jeder Restklasse modulo m Idealnormen. Sei $K' = k(\zeta)$. Dann hat, wenn h der Rel[ativ]grad von K ist, KK' den Rel[ativ]grad $h \cdot \varphi(m)$. Also zerfällt jede Restklasse in h weitere Klassen, wenn man die Klassen für K mit denen für K' überschneidet. In jeder Restklasse $\bmod m$ liegen also Idealnormen jeder Klasse.

Sei nun γ_1 primitive Kongruenzwurzel $\bmod q_1$ und $\gamma_1 \equiv 1 \pmod{q_2}$. Analog γ_2. Dann erzeugen γ_1 und γ_2 die Restgruppe $\bmod m$.

Man wähle aus $\mathfrak{K}_1$ ein Pr[im]id[eal] $\mathfrak{p}_1$ das zu γ_1 gehört (also $N\mathfrak{p}_1 \equiv \gamma_1(m)$) und aus $\mathfrak{K}_2$ eines das zu γ_2 gehört. Endlich aus $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ ein Primideal $\mathfrak{p}_3$ das zu $\gamma_1\gamma_2$ gehört.

Die Substitutionen von K' können wir wieder wie die Restklassen bezeichnen. In KK' betrachten wir den Unterkörper K_0 der zur Untergruppe gehört die von $\sigma_1\gamma_1$ und von $\sigma_2\gamma_2$ erzeugt wird: $(\sigma_1\gamma_1)^\nu(\sigma_2\gamma_2)^\mu$. Es gehört in KK' unser $\mathfrak{p}_1$ zu $\sigma_1\gamma_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zu $\sigma_2\gamma_2$, zerfällt also in K_0 in Pr[im]id[eale] ersten Grades. Die Klassen nach KK' in denen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ liegen, gehören also zu demjenigen Strahl, nach dem K_0 Klassenkörper ist. Nach Konstruktion von $\mathfrak{p}_3$ gehört $\mathfrak{p}_3$ also auch dazu, zerfällt also in K_0 in Primid[eale] ersten Gr[ades]. Folglich gehört $\mathfrak{p}_3$ in KK' etwa zu $(\sigma_1\gamma_1)^\nu(\sigma_2\gamma_2)^\mu = \sigma_1^\nu\sigma_2^\mu \cdot \gamma_1^\nu\gamma_2^\mu$.

In K' also zu $\gamma_1^\nu\gamma_2^\mu$. Da es aber in K' zu $\gamma_1\gamma_2$ gehört und diese γ_1, γ_2 Basiselemente für die Restgruppe nach m sind, muss $\nu \equiv 1 \pmod{q_1 - 1}$ und $\mu \equiv 1 \pmod{q_2 - 1}$ sein. Wegen $q_1 \equiv 1 \pmod{f_1}$ und $q_2 \equiv 1 \pmod{f_2}$ also erst recht $\nu \equiv 1 \pmod{f_1}$, $\mu \equiv 1 \pmod{f_2}$. Nun gehört $\mathfrak{p}_3$ in K zu $\sigma_1^\nu\sigma_2^\mu$, also zu $\sigma_1\sigma_2$. Es lag $\mathfrak{p}_3$ in $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$, wegen Satz 1 gehört also $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ zu $\sigma_1\sigma_2$.

q.e.d.

Satz 3. Gehört $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zu σ, so ist $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$.

Beweis: 1.) Gehört $\mathfrak{K}_2^{-1}$ zu τ, so gehört nach Satz 2 die Klasse $\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_2^{-1} = 1$ zu $\sigma\tau$. Nun zerfallen aber die Primideale der Hauptklasse und nur diese in Pr[im]id[eale] ersten Grades von K, also ist $\sigma\tau = 1$, $\tau = \sigma^{-1}$.

2.) $\mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K}_2^{-1}$ gehört zu $\sigma \cdot \sigma^{-1} = 1$, ist also nach dem in 1) gesagten die Hauptklasse.

Damit ist die volle Isomorphie bewiesen.

Nun spezialisiere ich:
Sei k ein Körper, der die m-ten E[inheits]w[urzeln] enthalte (m völlig beliebig).

Man betrachte $K = k(\sqrt[m]{\mu})$. (Es kann angenommen werden dass dies keine kleinere Wurzel schon tut.)

K sei Klassenkörper für [eine] gewisse Klassenteilung. Ist $\mathfrak{p}$ zugeordnet dem σ, so muss für alle A, insbesondere also für $A = \sqrt[m]{\mu}$ gelten:

$$\sqrt[m]{\mu}^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma(\sqrt[m]{\mu}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

Dies gibt $\mu^{\frac{N\mathfrak{p}-1}{m}} \equiv \zeta^i \pmod{\mathfrak{p}}$ wenn $\zeta^i\sqrt[m]{\mu}$ gerade $\sigma(\sqrt[m]{\mu})$ ist. Also ist $\sigma = \left(\sqrt[m]{\mu} \to (\frac{\mu}{\mathfrak{p}})\sqrt[m]{\mu}\right)$. Da *jetzt bewiesen*, dass σ nur von der Klasse abhängt, hängt $(\frac{\mu}{\mathfrak{p}})$ nur von der Klasse von $\mathfrak{p}$ ab.
Sei jetzt $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1}\mathfrak{p}_2^{\nu_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{\nu_r}$,

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_1}\right)^{\nu_1}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_2}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_r}\right)^{\nu_r}.$$

Liegen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ in $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_r$, so ist also $(\frac{\mu}{\mathfrak{a}})$ das Symbol, das der Klasse $\mathfrak{K}_1^{\nu_1}\mathfrak{K}_2^{\nu_2}\cdots\mathfrak{K}_r^{\nu_r} = \mathfrak{K}$ zugeordnet ist wegen der Multiplizierung der σ. Also ist $(\frac{\mu}{\mathfrak{a}})$ gerade der Klasse zugeordnet, in der $\mathfrak{a}$ liegt. Somit:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right) \qquad \text{hängt nur ab von der Klasse in der } \mathfrak{a} \text{ liegt.}$$

q.e.d.

Kommentare zum Brief Nr.9:

9.1 Der Beweis

Im Brief Nr. 8 vom 17. 9. 1927 hatte Artin nur seine Resultate mitgeteilt. Dazu schreibt er, dass er Hasse sobald wie möglich einen Korrekturabzug schicken wolle, dass das aber noch nicht ginge, weil er den Beweis erst vor einigen Tagen gefunden habe. Aber schon zwei Tage später, im vorliegenden Brief Nr. 9, schickt Artin als Beilage nun doch den vollen Beweis seines Reziprozitätsgesetzes in allen Einzelheiten. Wir können vielleicht daraus schließen, dass Hasse gebeten hatte, ihm möglichst bald den vollen Beweis mitzuteilen und nicht auf die Korrekturabzüge zu warten.

Der in der Beilage dargestellte Beweis ist eine fast fertige Version von Artins publizierter Arbeit [Art27a] – bis auf eine Ergänzung, die Artin in sein Manuskript noch nachträglich hineingenommen hat, und die auf Hasse zurückgeht (siehe 9.4).[17]

An dieser Stelle ist es vielleicht angebracht, die folgende Äußerung von Takagi zu zitieren, kurz nachdem er von Artins Beweis Kenntnis erlangt hatte. Es handelt sich um die Besprechung der Artinschen Arbeit, und am Schluss sagt Takagi[18]:

> *. . . Jedenfalls erscheint mir dieser Artikel Artins als eines der schönsten der in letzter Zeit gewonnenen Ergebnisse der algebraischen Zahlentheorie.*

9.2 Die Durchkreuzungsmethode

Das *missing link* zu seinem Beweis fand Artin nach eigenem Bekunden in der Arbeit [Che26] von Tschebotareff, die 1925/26 erschienen war. Dies hatte er ja schon in seinem Brief Nr. 6 vom 10. 2. 1926 vermutet, und er hatte das bestätigt im Brief Nr. 8, allerdings ohne das weiter zu erläutern. Im vorliegenden Brief Nr. 9 aber, wo Artin in der Beilage seinen Beweis im Detail ausführt, wird es deutlich, was er meint. Artin benutzt nicht etwa den Dichtigkeitssatz, den Tschebotareff in seiner Arbeit bewiesen hatte, sondern

[17] Vielleicht ist es nicht überflüssig, explizit darauf hinzuweisen, dass Artin im Jahre 1927 in der Arbeit [Art27a] den vollen Beweis seines Reziprozitätsgesetzes gegeben hat. In [FS07] heißt es nämlich fälschlicherweise: „*He announced a proof of his general Reciprocity Law in 1927 and published his complete result in 1930.*“

[18] Wir verdanken Herrn S. Iyanaga die Übersetzung aus dem Japanischen des Artikels von Takagi, erschienen im Bull. Math. Phys. Soc. Japan I-2 (1927).

es geht nur um die *Methode*, die Tschebotareff zum Beweis seines Dichtigkeitssatzes verwendet hatte, und die in geeigneter Abänderung auch in der Artinschen Arbeit zur Anwendung kommt.

Es handelt sich um die heute so genannte „Durchkreuzungsmethode“. Das heute übliche Wort „durchkreuzen“ findet sich in diesem Zusammenhang in Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has30a]. Artin selbst benutzt im Brief und in seiner Arbeit das Wort „überschneiden“.

Diese Methode beruht darauf, dass *erstens* sich das allgemeine Reziprozitätsgesetz für eine zyklotomische Erweiterung einfach und schnell verifizieren lässt. Wir hatten ja schon in 5.6 auf Seite 88 erwähnt, dass das Artinsche Reziprozitätsgesetz für zyklotomische Erweiterungen zum klassischen Bestandteil der algebraischen Zahlentheorie gehört. *Zweitens* wird eine gegebene abelsche Erweiterung $K|k$ mit einer geeigneten, zu $K|k$ linear disjunkten zyklotomischen Erweiterung $K'|k$ verglichen. Die Galoisgruppe des Kompositums KK' ist das direkte Produkt der Galoisgruppe von $K|k$ mit der von $K'|k$. Aufgrund der funktoriellen Eigenschaften der Frobenius-Substitution gelingt es dann, von $K'|k$ auf $K|k$ zu schliessen.

Mit anderen Worten: Die „Durchkreuzung“ besteht in der Übertragung von Eigenschaften des (geeignet zu wählenden) zyklotomischen Körpers $K'|k$ auf den gegebenen abelschen Körper $K|k$.

Das ist in der Tat eine bemerkenswerte Methode. Stevenhagen und Lenstra bemerken dazu in ihrem Artikel [SL96]:

> *Chebotarev's technique is still a crucial ingredient of all known proofs of Artins Reciprocity Law.*

Das ist richtig. Wenn die Autoren aber weiter schreiben:

> *It is widely felt that it works for no good reason ...*

dann ist uns nicht recht klar, was mit der letzteren Bemerkung gemeint ist. Durch die Methode von Tschebotareff wird ja in Evidenz gesetzt, dass die Gesetze der Klassenkörpertheorie im Grunde auf die Gesetze in zyklotomischen Körpern zurückgehen. Und das erscheint uns durchaus als ein *good reason.* Aber vielleicht kommt das in der von Artin verwendeten Version nicht so klar zum Ausdruck wie in der späteren Version von Hasse aus dem Jahre 1932 in [Has33a]. Dort beweist Hasse das Artinsche Reziprozitätsgesetz mit Hilfe der Algebrentheorie, und die „Methode von Tschebotareff“ erscheint als der Satz, dass jede Divisionsalgebra bereits durch geeignete zyklotomische Körper zerfällt wird.

Übrigens ist die Durchkreuzungsmethode schon früher, lange vor Tschebotareff, angewandt worden, nämlich 1896 durch Hilbert bei seinem Beweis des Satzes von Kronecker-Weber, dass jede abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zyklotomisch ist. Hierauf wurden wir durch die folgende Mitteilung von Patterson aufmerksam gemacht:[19]

> *Eine Bemerkung zu dem Satz von Tschebotareff. Was ganz kurios dabei ist, ist, dass die Techniken alle schon 1896 zur Verfügung standen. Tsch*[*ebotareff*] *verbindet die Ideen von Frobenius mit der Methode, die Hilbert entwickelt hat, um den Kronecker-Weber Satz zu beweisen. Beide Arbeiten sind 1896 erschienen. Beim Beweis geht es um die Untersuchung der Eigenschaften von* $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$*; seit 1885 hat man den Satz von Dedekind, dass dieser Ring eine Summe von Körpern ist* (*Artinsche Ringe!*) *...*

Hilbert vergleicht einen gegebenen abelschen Körper $K|\mathbb{Q}$ (den man als zyklischen Körper von Primzahlpotenzgrad annehmen kann) mit geeignet konstruierten zyklotomischen Körpern Z. Die Konstruktion dieser zyklotomischen Körper ist derart, dass man aus dem Vergleich des Verzweigungsverhaltens der Primzahlen in K und in Z schließen kann, dass K schon selbst ein zyklotomischer Körper ist. Allerdings kommen bei Hilbert keine Frobenius-Automorphismen vor.

Artin kannte natürlich sowohl die Arbeit von Frobenius als auch den Beweis von Hilbert. Im Grunde hätte er also schon 1923, in seiner L-Reihenarbeit, durch Verbindung der Ideen von Frobenius und von Hilbert einen Beweis seines Reziprozitätsgesetzes geben können; er hätte nicht auf Tschebotareff zu warten brauchen. Aber wie oft in solchen Fällen fehlte damals wohl der entscheidende Anstoß. Jetzt, im Jahre 1927, war offenbar die Zeit reif, sodass der durch die Arbeit von Tschebotareff erfolgte Anstoß von Artin aufgenommen und umgesetzt werden konnte.

9.3 Der Hilfssatz

Die Anwendbarkeit der Tschebotareffschen Durchkreuzungsmethode beruht darauf, dass man den zyklotomischen Hilfskörper K' für das jeweilige Problem geeignet wählen kann, und zwar dergestalt, dass der gewünschte Schluss von K' auf K möglich ist. Dies wiederum beruht, bei der Anwendung auf das Artinsche Reziprozitätsgesetz, auf einem zahlentheoretischen Hilfssatz

[19] Briefliche Mitteilung.

über die Existenz von Primzahlen p mit gewissen Eigenschaften ihrer f-ten Potenzreste, bei vorgegebenem f (Hilfssatz 3 im Artinschen Brief Nr. 9; siehe Seite 142). Dieser Hilfssatz ist wohl als die entscheidende neue Idee von Artin anzusehen. Er ist nämlich *nicht* in der Arbeit von Tschebotareff zu finden, und auch nicht in der bereits erwähnten Arbeit von Schreier [Sch26b][20]. Zwar wird dort auch die Durchkreuzungsmethode angewandt, aber die Bedingungen für die Wahl geeigneter zyklotomischer Körper sind dort andere (dort wird ja auch ein anderes Problem behandelt). Dadurch, dass Artin seinen Hilfssatz isoliert und gesondert ausspricht, erscheint seine Arbeit besonders klar und durchsichtig; auch hier wieder zeigt Artin sein Talent zur vereinfachenden Darstellung. In der publizierten Version stellt Artin den Hilfssatz seiner Arbeit voran.

In jeder bisher bekannten Herleitung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes erscheint dieser Hilfssatz in der einen oder anderen Variante. Das trifft zu sowohl auf die Darstellung des Beweises in Hasses Klassenkörperbericht II [Has30a], als auch in der späteren Hasseschen Annalen-Arbeit [Has33a], die er Emmy Noether zum 50. Geburtstag am 23. März 1932 widmete, und in der er u.a. die Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln gab. Hasse vergleicht dort den Hilfssatz in der von ihm gegebenen Version mit demjenigen aus Artins Arbeit und stellt fest, dass die Situation in seinem (Hasses) Hilfssatz etwas einfacher erscheint als bei Artin. Wobei er allerdings hinzufügt, dass auch Artin inzwischen mit dieser vereinfachten Version seines Hilfssatzes auskommt. (Vgl. dazu Artins Brief Nr. 19 vom 11. 4. 1928.) In jedem Falle: sowohl der von Hasse als auch der von Artin gegebene Beweis beruhten auf gewissen Dichtigkeitssätzen der algebraischen Zahlentheorie, die damals nur unter Benutzung von analytischen Hilfsmitteln bewiesen werden konnten (Dirichlets L-Reihen).

Dies gab den Anlass, nach einem *elementaren* Beweis des betr. Hilfssatzes zu suchen, der keine besonderen Hilfsmittel aus der algebraischen oder analytischen Zahlentheorie benutzt. Es gibt eine Reihe von Arbeiten, in denen sich ein solcher elementarer Beweis findet. Da diese Arbeiten zeitlich dicht aufeinander folgen und die Autoren während dieser Zeit engen wissenschaftlichen Kontakt miteinander hatten, ist es nicht möglich und wohl auch nicht angebracht, in dieser Sache Prioritätsfragen zu diskutieren. Zunächst hat Hasse einen solchen elementaren Beweis 1932 in seinen Marburger Vorlesungen [Has33c] gegeben. Sodann erschien ein solcher Beweis in der Thèse 1933 von Chevalley [Che33b]. Dieser Beweis wurde stark vereinfacht von Iyanaga [Iya33]. Schließlich gab van der Waerden, angeregt durch Hasse, einen be-

[20] Zu dieser siehe Seite 111.

sonders einfachen Beweis in der wohl größten Allgemeinheit, publiziert 1934 in Crelles Journal [vdW34].[21]

9.4 Furtwänglers Trick

Wenn Artin im ersten Satz seines Briefes schreibt, dass ihn Hasses Antwort „*brennend interessiert*“ habe, dann steht dabei wohl Hasses Mitteilung über eine Methode von Furtwängler im Vordergrund, dieselbe Methode, über die Artin weiter unten in Punkt 3.) seines Briefes sagt, er sei „*besonders gespannt*“ darauf. Artin erbittet von Hasse den Furtwänglerschen Beweis, weil er jetzt nicht die Zeit findet, Furtwänglers Arbeit ausführlich zu lesen. Und am Schluss des Briefes macht er die Sache besonders dringlich, weil er den Beweis noch in seiner Vorlesung bringen möchte.

Offenbar handelt es sich um diejenige Arbeit von Furtwängler, die 1927 im Jubiläumsband des Crelleschen Journals erschienen war, mit dem Titel: *Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten* [Fur26]. Furtwängler bewies darin das allgemeine Reziprozitätsgesetz (2) (Seite 43) für den Exponenten $m = \ell^2$ wobei ℓ eine ungerade Primzahl ist. Am Schluss dieser Arbeit finden wir den „*Beweis von* $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ *aus der bewiesenen* $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$*-Tatsache*“, auf den Artin gespannt ist.

Dazu ist folgendes zu sagen.

Die Furtwänglerschen Arbeiten galten allgemein als schwer lesbar (jedenfalls für jemanden, der nicht gut mit den Hilbertschen Arbeiten vertraut war); auch Artin macht ja in seinem Brief eine Bemerkung in dieser Richtung. Bei der in Rede stehenden Arbeit kommt hinzu dass, wie Furtwängler in seinem Vorwort schreibt, „*der beschränkte Raum eine knappe Behandlung notwendig machte*“. Ausserdem, so schreibt er weiter, könne die Theorie der ℓ^2-ten Potenzreste „*als Paradigma für die* ℓ^n*-ten Potenzreste dienen*“; das wird aber nicht weiter ausgeführt.

Als Hilfsmittel zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes im Falle $m = \ell^2$ hatte Furtwängler die Verallgemeinerung des *Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes* für den Exponenten $m = \ell^2$ benutzt und bewiesen. Dies stand ganz in der klassischen Tradition; wir erinnern uns, dass Hilbert schon für den Fall eines Primzahlexponenten $m = \ell$ gesagt hatte, dass das Eisen-

[21] Übrigens hatte Hasse schon früher (in einem Brief vom 20. 11. 1932) versucht, seinen Freund Davenport in Cambridge für diese Frage zu interessieren, aber anscheinend ohne Reaktion. Ein Jahr später, am 15. 10. 1933 schreibt dann Hasse an Davenport, dass inzwischen van der Waerden diese Frage gelöst hat und teilt ihm dessen Lösung mit.

steinsche Reziprozitätsgesetz ein „*unentbehrliches Hilfsmittel*“ zum Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes sei[22]. Diese Situation hatte nun Hasse bewogen, selbst eine Arbeit über das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste zu verfassen, und zwar gleich für einen beliebigen Exponenten m. Hasse sagt in seinem Vorwort:

> *Ich hoffe, in seinem* [Furtwänglers] *und seiner Leser Sinne zu handeln, wenn ich seine Skizze des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes der ℓ^2-ten Potenzreste zu einer ausführlichen Darstellung ausbaue und dabei durch Hinzufügung einiger weiterer Überlegungen gleich den allgemeinsten Fall, nämlich das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der Potenzreste eines beliebigen Exponenten m behandele.*

Die Hassesche Arbeit erschien im Jahr 1927 in den Mathematischen Annalen [Has27b] [23], aber Hasse hatte sie schon im September 1926 fertiggestellt, also lange bevor er jetzt (Juli 1927) die Nachricht von Artin über seinen Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes erhielt. Zuvor hatte Hasse bei Furtwängler angefragt, ob jener die Publikation gutheisse. Furtwängler antwortete am 23. 9. 1926:

> *Gegen die Veröffentlichung Ihres Beweises des verallgemeinerten Eisenstein'schen R*[eziprozitäts]*G*[esetzes] *habe ich natürlich gar nichts einzuwenden. Was meine eigenen Untersuchungen über die höheren R*[eziprozitäts]*G*[esetze] *betrifft, so habe ich den Fall des Exponenten ℓ^2 schon vor etwa 10 Jahren vollständig erledigt, habe aber das Manuskript liegen lassen. Ich habe mir nun seiner Zeit ganz im allgemeinen überlegt, dass einer Verallgemeinerung auf ℓ^ν keine prinzipiellen Schwierigkeiten im Wege stehen. Genaueres kann ich aber darüber nicht sagen. Ich werde in diesem Winter ein Seminar über Klassenkörper und R[eziprozitäts]G[esetz] halten und hoffe dabei auch bezüglich der Verallgemeinerungen vorwärts zu kommen.*

Offenbar war es das Ziel von Furtwängler und auch von Hasse, auf dem Wege über die Verallgemeinerung des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes zu dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz für eine beliebige Potenz ℓ^n vorzudringen, was Furtwängler bislang nur für ℓ^2 gelungen war, obwohl er für den Fall ℓ^n keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr sah.

---

[22] Siehe Seite 47.

[23] Wir haben diese Arbeit schon in 6.3 erwähnt.

Wir haben dies erwähnt, um darzustellen, dass Hasse mit den Furtwänglerschen Ideen und Methoden vertraut war, als er die Nachricht von Artin über die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache" erhielt, d.h. über die Tatsache, dass das Potenzrestsymbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ nur abhängt von der Idealklasse des Nenners $\mathfrak{a}$ in der Klassengruppe A/H zu $k(\sqrt[m]{\alpha})$. Hasse erkannte sofort, dass dies einen ganz einfachen Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes (2) liefert, denn den von Furtwängler im Falle $m = \ell^2$ benutzten Trick, für beliebiges m verallgemeinert, kann man schon dann anwenden, wenn man die Artinsche „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache" kennt, ohne auf das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz zurückgreifen zu müssen.

Dieser Furtwänglersche Trick besteht darin, den Grundkörper k zunächst auf $K = k(\sqrt[m]{\alpha\beta^{-1}})$ zu erweitern, von wo aus die Behauptung aufgrund der Artinschen „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache" ohne weiteres einsichtig wird. Denn der Körper $K(\sqrt[m]{\alpha})$ ist unverzweigt über K (weil nämlich α als primär vorausgesetzt ist; diese Voraussetzung überträgt sich von dem Grundkörper k auf jede Erweiterung, also auch auf K). Mithin ist die zugehörige Strahlklassengruppe eine Faktorgruppe der gewöhnlichen Idealklassengruppe. Die Divisoren von $\sqrt[m]{\alpha} = \mathfrak{A}$ und von $\sqrt[m]{\beta} = \mathfrak{B}$ in K sind im gewöhnlichen Sinne äquivalent. Also folgt in K nach Artin $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)$. Von K kann dann vermöge Normbildung auf k als Grundkörper geschlossen werden.

Furtwängler allerdings konnte die Artinsche „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache" noch nicht verwenden und musste sich daher auf das von ihm bewiesene Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für den Exponenten ℓ^2 stützen. Daher konnte er seinen Trick nur im Falle des Exponenten $m = \ell^2$ durchziehen. Doch Hasse hatte erkannt, dass der Trick für einen beliebigen Exponenten m funktioniert, gestützt auf die Artinsche „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache". Und er hat dies offenbar in seiner Antwort an Artin sogleich mitgeteilt. Danach sei es möglich, so Hasse, nunmehr das allgemeine Reziprozitätsgesetz für einen beliebigen Exponenten m in einfacher Weise aus den Artinschen bisherigen Resultaten herzuleiten. Das ist es, was Artin „*brennend interessiert*" hatte.

Hasse ist offenbar der Bitte Artins um einen Beweis umgehend nachgekommen, denn schon zwei Tage später, im nächsten Brief Nr. 10, bedankt sich Artin „*für den wirklich wundervollen Beweis von Furtwängler*", und er fragt an, ob er diesen Beweis in seine Arbeit aufnehmen dürfe. Offenbar hat Hasse dem zugestimmt und somit finden wir den Beweis in Artins Publikation [Art27a]. In dem ursprünglichen Konzept, das Artin ja in der Beilage zu diesem Brief ausführlich darstellt, war das nicht vorgesehen. Im übernächsten Brief Nr. 11 vom 26. 7. sagt dann Artin, dass er die Arbeit aufgeschrieben

und an die Druckerei gegeben hat. Furtwängler und Hasse werden in der Arbeit zitiert. Übrigens hatte Furtwängler seinen Trick schon früher einmal angewandt, nämlich in der Arbeit [Fur09] aus dem Jahre 1909, damals für den Exponenten ℓ und gestützt auf das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für den Exponenten ℓ. Artin zitiert auch diese frühere Arbeit.

Bemerkung 1: Wie aus der obigen Diskussion des „Furtwänglerschen Tricks“ hervorgeht, wird dabei nicht das volle Artinsche Reziprozitätsgesetz für beliebige abelsche Erweiterungen benutzt, sondern nur in dem Falle, dass es sich um eine *unverzweigte* zyklische Erweiterung $K(\sqrt[m]{\alpha})$ eines Körpers K handelt, der die m-ten Einheitswurzeln enthält. In einem solchen Falle war das Artinsche Reziprozitätsgesetz bereits zu Beginn des Jahrhunderts formuliert worden, und zwar in der Arbeit von Bernstein [Ber04], allerdings ohne Beweise. Genauer gesagt, findet man dort die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ für eine Körpererweiterung der genannten Art. Uns ist nicht bekannt, weshalb Bernstein damals und auch später keine Beweise publiziert hat. Hätte man schon Beweise zur Verfügung gehabt und bedenkt man, dass „Furtwänglers Trick“ bereits 1909 zuerst angewandt wurde, so wäre es durchaus möglich gewesen, die Reziprozitätsgesetze für beliebige Exponenten schon im Jahre 1909 zu beweisen, und zwar *ohne* das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz zu Hilfe zu nehmen.

Dies betrifft, um es noch einmal zu sagen, das Reziprozitätsgesetz für die Potenzreste; das Artin'sche Reziprozitätsgesetz für beliebige abelsche Zahlkörper-Erweiterungen beruht auf der Takagischen Klassenkörpertheorie der Jahre 1920/22 und bedeutete eine Entdeckung von ganz anderer Tragweite.

Bemerkung 2: Als Furtwängler von Hasse erfuhr, dass Artin die „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“ in einfacher Weise aus dem neuartigen Artinschen Reziprozitätsgesetz herleiten konnte, antwortete er (Brief vom 29. 7. 1927):

> „*Sehr geehrter Herr Hasse! Besten Dank für Ihre freundliche Mitteilung, die mir neu war. Der Satz selbst ist mir bekannt, und ich würde ihn auch beweisen können, aber nur mit Hülfe des Eisensteinschen R*[*eziprozitäts*] *G*[esetzes]. *Wenn also Herr Artin einen kurzen Beweis für diesen Satz ohne Benutzung des Eisenstein'schen R*[*eziprozitäts*] *G*[*esetzes*] *hat, so ist das ein großer Fortschritt und sehr zu begrüssen, da es die Theorie erheblich vereinfacht ...*“

Wir sehen hier wieder den Unterschied zwischen dem Ansatz von Takagi-Furtwängler und dem von Artin. Während die ersteren alles auf das „Eisen-

steinsche Reziprozitätsgesetz“ in $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$ zurückführen, beweist Artin gleich direkt das klassische Reziprozitätsgesetz (2) mit Hilfe seines neuartigen Reziprozitätsgesetzes und der daraus folgenden „$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$-Tatsache“, und dies für beliebigen Exponenten m und beliebigen Zahlkörper k.

In dem oben zitierten Brief vom 29. 7. 1927 fährt Furtwängler fort:

> „*Ich hatte ursprünglich die Absicht, meine Untersuchungen in diesen Ferien druckfertig zu machen. Ich habe zu diesem Zweck das allgemeine Eisenstein'sche R*[*eziprozitäts*]*G*[*esetz*] *vollständig bewiesen durch Erledigung der Fälle, die in Ihrer Arbeit noch offen geblieben waren*[24] *...Ich werde nun aber wahrscheinlich warten, bis die Publikation des Herrn Artin erschienen ist.*“

Furtwängler hat diese seine Resultate jedoch niemals publiziert. Einer der Gründe mag gewesen sein, dass das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz seine Bedeutung als „unentbehrliches Hilfsmittel“ (wie Hilbert es noch formulierte) verloren hatte, angesichts der einfachen Herleitung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz mit Hilfe des Furtwänglerschen Tricks. Auch mag mitgespielt haben, dass sich inzwischen herausgestellt hatte, dass das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für beliebige Primzahlpotenzen $m = \ell^n$ bereits sehr viel früher durch Western im Jahre 1908 erledigt war [Wes08]. Diese Arbeit wird weder in der Korrespondenz Artin–Hasse noch in der von Furtwängler–Hasse erwähnt, scheint ihnen also zu dem damaligen Zeitpunkt noch nicht bekannt gewesen zu sein. Erst Hasse in seinem Klassenkörperbericht II [Has30a] zitiert Western in diesem Zusammenhang; inzwischen hatte er also Kenntnis von der Arbeit von Western erlangt.

[24]Diese bei Hasse noch offen gebliebenen Fälle waren die, für welche $m \equiv 0 \bmod 8$.

10 21.07.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 21.7.1927

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für den wirklich wundervollen Beweis von Furtwängler.[1] Er beweist mir aufs neue, dass die „wahre“ Formulierung der Rez[iprozitäts]gesetze die σ-Formulierung ist, wie ich schon immer geglaubt habe. Sie pflichten doch jetzt bei?[2] Darf ich nun einige Fragen und Bemerkungen machen:

1.) Muss die letzte Schlusskette, (wenn sie ganz exakt sein soll), also:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_k = \left(\frac{\alpha}{N_{K/k}(\mathfrak{B})}\right)_k = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)_K = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)_K = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_K$$

etc. an dieser Stelle nicht streng so lauten: Sei $\mathfrak{C}$ ein Ideal derselben Idealklasse in K wie $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$. Dann ist, wenn $\mathfrak{C}$ prim zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist:
$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{C}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)$, denn zum Beispiel ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)$ gar nicht definiert, da ja $\mathfrak{A}$ ein Teiler von α ist ($\alpha = \mathfrak{A}^n$).[3]

2.) Ich bin Ihnen im Gegenteil sehr dankbar, wenn Sie die Gleichung $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ beweisen wollen.[4] Ich kenne mich mit den Normenrestsymbolen doch bei weitem nicht so gut aus wie Sie, so dass Sie die Sache mit viel weniger Mühe schaffen können wie ich. Ich bin überzeugt,

[1] Siehe 9.4.

[2] Siehe 10.1.

[3] Es handelt sich um eine Schlusskette, die bei dem „Furtwänglerschen Trick“ angewandt wird; siehe 9.4 Seite 151. Diese Schlusskette findet sich genauso in Artins Arbeit. Es geht hier nur um eine Frage der Definition von $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)$ im Körper $K = k(\sqrt[m]{\alpha\beta^{-1}})$. Artin definiert in seiner Arbeit das Jacobische Symbol mit Hilfe der Formel (17) und diese hat nur Sinn, wenn der Nenner $\mathfrak{p}$ teilerfremd zu m und zum Zähler μ ist. Das erfordert ein Zwischenschieben des Divisors $\mathfrak{C}$ in der Artinschen Schlusskette. Hasse dagegen nimmt sofort die Formel (18) (Seite 129), und diese ist immer dann sinnvoll, wenn der Nenner $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist zum Führer von $K(\sqrt[m]{\mu})$; letzteres ist hier der Fall, weil es sich ja um eine unverzweigte Erweiterung handelt. – In einem späteren Brief sagt Artin ausdrücklich, dass er die Hassesche Definition „sehr richtig“ finde. (Vgl. Brief Nr. 15 vom 19. 8. 1927; offenbar hatte Hasse im Hinblick auf die vorliegende Bemerkung 1.) angefragt, welche Definition denn Artin vorziehe.)

[4] Siehe 10.3.

dass man bei genügender Ausnützung des „$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$-Satzes“ die verlangte Gleichung nicht allzu schwer wird beweisen können. Die Hauptschwierigkeit liegt doch wohl in dem Satz: $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ ist Normenrestsymbol, d.h. $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ dann und nur dann wenn α Normenrest nach jeder Potenz von $\mathfrak{p}$ in $k(\sqrt[m]{\beta})$ ist. Oder ist das leicht zu sehen? *Ich bin auf Ihren Beweis sehr gespannt.*

3.) Verzeihen Sie die folgende dumme Bemerkung. Bei Definition von primär genügt es zu sagen: … und $\alpha \gg 0$ wenn $m = 2$ ist. Denn für $m > 2$ ist k (da er die E[inheits]w[urzeln] enthält) total imaginär. Man könnte ebensogut sagen: … und $\alpha \gg 0$.[5]

4.) Würden Sie damit einverstanden sein, dass ich in der Publikation (im Hamburger Parteiorgan[6]) den Furtwänglerschen Beweis des Abschlusses halber aufnehme und skizziere. Das wäre mir der Verständlichkeit halber sehr lieb. Dies und dann natürlich den Ergänzungssatz $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = 1$, wenn α hyperprimär ist, der ja aus dem „$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$-Satz“ unmittelbar folgt.[7] Alles andere könnte Ihren Publikationen vorbehalten bleiben. Ich glaube, kleine Wiederholungen würden nicht nur nichts schaden, sondern sogar sehr gut sein.[8]

5.) Gelten nunmehr Ihre genaueren Sätze über $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ in beliebigen Körpern und insbesondere im Kreiskörper für beliebiges m? Eventuell natürlich mit Modifikationen. Sie haben doch sicher schon darüber nachgedacht.[9]

---

[5] Offenbar hat Hasse diese Bemerkung Artins zum Anlass genommen, in seiner Arbeit [Has27e] per Fußnote darauf hinzuweisen, dass die Bedingung $\alpha \gg 0$ nur dann in Betracht kommt, wenn $m = 2$ ist. Zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes war Hasse gerade dabei, die Arbeit [Has27e] niederzuschreiben; darin findet sich insbesondere auch der „Furtwänglersche Trick“, um den es hier geht, angewandt. – Zur Definition von „primär“ und „hyperprimär“ siehe Seite 43.

[6] Damit meint Artin die Zeitschrift: „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität“, kurz „Hamburger Abhandlungen“ genannt.

[7] Dieser Ergänzungssatz findet sich dann doch nicht in der Artinschen Arbeit [Art27a]. Siehe Brief Nr. 11.

[8] Siehe 10.2.

[9] Siehe 10.4.

6.) Eine ganz dumme Frage. Die σ-Formulierung des R[eziprozitäts]g[esetzes] gilt in beliebigen Körpern auch ohne irgend eine Einh[eits]wurzel. Ist es nun auch möglich, in beliebigen Körpern eine Art Normenrestsymbol zu definieren? Ich meine das so: k sei der Körper, $k' = k(\zeta)$. Es sei nun α' *eine Zahl aus* k' [10] von der Art, dass $k'(\sqrt[m]{\alpha'})$ einen cykl[ischen] Körper k_0 m-ten Grades über k enthält. Gesucht wird ein Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha'}{\mathfrak{p}}\right)$, wo β Zahl aus k, α' Zahl aus k' dieses Typus ist, derart, dass $\left(\frac{\beta, \alpha'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, wenn β in k_0 Normenrest mod $\mathfrak{p}^\lambda$ ist, und derart dass $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist. Wahrscheinlich wird das nicht gehen. Aber warum nicht? [11]

Einerseits tut es mir leid, dass Sie nun den ganzen Bericht wiederholen müssen.[12] Ich glaube aber, dass die Arbeit sich lohnen wird, da man doch die ganzen Dinge wie Eisenstein'sches Reziprozitätsgesetz ect. nicht mehr braucht und der gewonnene Platz einer genaueren Durchführung zu Gute kommen kann, die doch sehr wünschenswert wäre. Sie werden doch im zweiten Teil alle Beweise bringen?

Verzeihen Sie eine indiskrete Frage. Hecke sagte mir, dass Bessel-Hagen sich nach Halle umhabilitieren wird oder hat und dass er einen Bericht der Klassenkörpertheorie für die Annalen machen wird. Bitte ganz sachlich: Halten Sie das für gut? Würde es nicht mehr im Interesse des Gegenstandes liegen wenn Sie die Sache übernehmen? Darf ich Sie bitten dies rein sachlich und in keiner Weise persönlich zu betrachten. Diese schwierige Theorie verlangt doch einen gereiften, mit den Problemen durch eigene Arbeit vertrauten Menschen.[13]

Über den Hauptidealsatz später.[14]

Mit vielen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

---

[10] Artin unterstreicht k' mehrmals.

[11] Es geht doch, aber es hat eine Weile gedauert, bis Hasse die Antwort fand. Siehe 26.1.

[12] Es handelt sich um den Hasseschen Klassenkörperbericht, Teil II. Siehe 10.5.

[13] Hierzu siehe 8.3.

[14] Vgl. Brief Nr. 13 vom 2. 8. 1927 sowie 13.1.1.

Kommentare zum Brief Nr.10:

10.1 Die sigma-Formulierung

In der Artinschen Bezeichnung bedeutet σ stets ein Element der Galoisgruppe G der in Rede stehenden abelschen Körpererweiterung. Artin versteht offenbar unter „σ-Formulierung“ des Reziprozitätsgesetzes die Deutung des klassischen allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für Potenzreste als *gruppentheoretische* Aussage, nämlich als Isomorphieaussage zwischen Strahlklassengruppen und Galoisgruppen. Dies sei, so Artin, die „wahre“ Formulierung des Reziprozitäsgesetzes.

Artin fragt, ob Hasse „*ihm jetzt beipflichte*“. Wir wissen nicht genau, was Hasse darauf antwortete. Immerhin erscheint uns die Frage interessant, weil sie offenbar impliziert, dass Hasse bisher der Auffassung Artins in dieser Sache eben *nicht* ganz beipflichten konnte. Die Situation stellt sich u.E. wie folgt dar:

Artin folgt dem Postulat von Kronecker und später von Hilbert, dass die arithmetischen Eigenschaften eines (galoisschen) Zahlkörpers sich wesentlich in der Struktur der Galoisgruppe und der Diskriminante spiegeln, analog zum Fall der Funktionenkörper, wo die Eigenschaften einer Riemannschen Fläche sich aus der Struktur der Galoisgruppe und der Verzweigungsstellen erklären lassen (entsprechend den Ideen von Riemann).[15] Hilbert hat, diesem Postulat folgend, die Theorie des galoisschen Körpers entwickelt (heute als „Hilbertsche Verzweigungstheorie“ bekannt) und seinen „Zahlbericht“ entsprechend aufgebaut. Auch Hilberts Hervorheben des absoluten Klassenkörpers als einer unverzweigten und daher besonderen Erweiterung, in der nur noch die Galoisgruppe bestimmend ist, folgt diesem Prinzip, was Hilbert auch mehrmals betont. Auch Hilberts 21. Problem, ob es ein System von Fuchsschen Differentialgleichungen bei vorgegebenen Singularitäten und gegebener Monodromiegruppe gebe, ordnet sich diesem Prinzip unter. Von Hilbert ausgehend empfindet Artin daher seine σ-Formulierung, welche eben die Galoisgruppe ins Spiel bringt, als die „wahre“.

Mit anderen Worten: Artin fasst die klassischen Ergebnisse über Reziprozitätsgesetze für Potenzreste als Spezialfälle auf, sozusagen als Vorläufer, die schließlich in dem Artinschen Reziprozitätsgesetz ihre „wahre“ Formulierung finden.

[15] Das Kroneckersche Postulat war ja auch ein wichtiger Grund gewesen für die Einführung der p-adischen Zahlen zum Zwecke der genauen Bestimmung der Diskriminanten.

Hasse hatte jedoch stets darauf bestanden, dass die *explizite Bestimmung des Eisenstein-Kummerschen Umkehrfaktors* (siehe (6), Seite 45) als das „wahre“ Reziprozitätsgesetz anzusehen sei. Er erkannte durchaus, dass das Artinsche Reziprozitätsgesetz ein Ergebnis der „allerhöchsten Bedeutung“ sei, wie er es später in [Has30a] formulierte, sozusagen die Krönung der Klassenkörpertheorie. Aber dies war für ihn eben nicht das Reziprozitätsgesetz im eigentlichen Sinn des Wortes. In der Tat hat sich ja Hasse in Teil II seines Klassenkörperberichtes [Has30a] daran gemacht, aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz explizite Formeln für den Umkehrfaktor herzuleiten; das war keineswegs trivial und erforderte ein gehöriges Stück Arbeit.

Vielleicht hätte Hasse der Artinschen Auffassung eher beipflichten können, wenn Artin sein Resultat nicht „Reziprozitätsgesetz“ genannt hätte, sondern z.Bsp. „Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie“ oder ähnlich. Aber der Unterschied in den Auffassungen von Artin und von Hasse lag wohl nicht allein in der Terminologie, sondern er betraf generell ihre Einstellung zur Mathematik und insbesondere zur Zahlentheorie. Artin strebte danach, die strukturellen Gesetzmäßigkeiten zu entdecken, die die Zahlentheorie beherrschen, und er betrachtete die expliziten Rechnungen dazu (an denen er sich ja lebhaft beteiligte, wie dieser Briefwechsel zeigt) nur als Indikatoren und Wegweiser zu diesem Ziel. Hasse dagegen erkannte wohl die erkenntnistheoretische Bedeutung der strukturellen Gesetzmäßigkeiten (die er ja selbst intensiv erforschte), er empfand jedoch auch die explizite, formelmäßige und berechenbare Beschreibung der mathematischen Sachverhalte als wesentlichen Teil der Erkenntnis. Er hat das in seinem Brief an Hermann Weyl, den wir schon in Abschnitt 5.7 auf Seite 92 zitierten, deutlich zum Ausdruck gebracht.

Diese Auffassung hat Hasse bis in seine letzten Jahre vertreten. Er hat dies einem von uns (Frei) bei verschiedenen Gelegenheiten ganz eindeutig zum Ausdruck gebracht. Schon Gauss habe grossen Wert darauf gelegt, den Umkehrfaktor explizit zu bestimmen, und Gauss habe hierfür viel gerechnet und keine Mühe gescheut. In diesem Sinne hat Hasse dann später auch die diesbezüglichen Arbeiten von Shafarevich von 1948-1950 sehr begrüsst und als ganz bedeutend angesehen.[16] Ebenso hat Hasse in diesem Zusammenhang die Arbeiten seines Schülers Helmut Brückner immer wieder erwähnt.[17]

In diesem Zusammenhang ist auch das Buch von Hasse „*Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*“ zu erwähnen [Has52]. Damit leitete Hasse einen neuen, sich nach 1950 stark entwickelnden Zweig der mathematischen For-

[16] Vgl. dazu Abschnitt 14.2, insbesondere den letzten Absatz von 14.2.1.

[17] Siehe unser Literaturverzeichnis.

schung ein, nämlich die explizite Beherrschung der arithmetischen Gesetzmäßigkeiten in abelschen Zahlkörpern. Siehe dort insbesondere das Vorwort, in dem Hasse seine Auffassung sehr deutlich und ausführlich darlegt. Dieses Buch, das 1945 während eines Lazarettaufenthaltes in englischer Gefangenschaft geschrieben wurde, kann wohl als ein Höhepunkt des gesamten Hasseschen Werkes angesehen werden, als die reifste Frucht seines Schaffens.

10.2 Erweiterung des Jacobischen Symbols

Während Artin seine Arbeit zu seinem Reziprozitätsgesetz aufschrieb, war Hasse nicht untätig geblieben. Er war dabei, die Arbeit [Has27e] zu verfassen, welche die Folgerungen behandelt, die sich aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz für das Reziprozitätsgesetz der Potenzreste ergeben. Hasses Arbeit erschien, wie die Artinsche Arbeit, ebenfalls noch im Jahre 1927.[18] In dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" wurde diese Arbeit unmittelbar nach der Artinschen [Art27a] referiert, und es hieß:

> *Die Arbeit Hasses ist eine direkte Fortsetzung der vorstehend referierten Arbeit von Artin.*

Aus dem Briefwechsel geht hervor, dass dies von den beiden Autoren so konzipiert war. In Punkt 4.) des vorliegenden Briefes sprechen sich Artin und Hasse ab, welche Ergebnisse in welche Arbeit aufgenommen werden. Artin fragt, ob er den Furtwänglerschen Beweis in seine Arbeit aufnehmen könne (was er dann auch tat).[19] Und am Ende von Punkt 4.) schreibt er:

> *Alles andere könnte Ihren Publikationen vorbehalten bleiben. Ich glaube, kleine Wiederholungen würden nicht nur nichts schaden, sondern sogar sehr gut sein.*

Mit „alles andere" waren wohl zunächst die Sätze über das Jacobische Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$ gemeint, soweit sie über das allgemeine Reziprozitätsgesetz (2) (Seite 43) hinausgehen. Darüberhinaus aber auch die Diskussion des Hilbertschen Symbols $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ und seiner Eigenschaften. In Punkt 2.) des Briefes sagt ja Artin ganz explizit, dass Hasse die Diskussion des Hilbertschen Symbols übernehmen möge, insbesondere den Beweis der Produktformel.

[18] Und zwar in Band 158 des Crelleschen Journals, dem 2. Jubiläumsband aus Anlass des 100-jährigen Bestehens des Journals.

[19] Es ging dabei um den „Trick" von Furtwängler; siehe 9.4.

Demgemäß besteht die Hassesche Arbeit [Has27e] aus zwei Teilen: Im ersten Teil geht es um das Jacobische Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$, genauer um die Hassesche Erweiterung dieses Symbols. Im zweiten Teil geht es um das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$. Dieser zweite Teil wird in dem nächsten Abschnitt 10.3 diskutiert.

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass es sich bei dem Jacobischen Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$ um das Potenzrestsymbol zu einem *beliebig vorgegebenen Exponenten* m handelt. Der Fall eines Primzahlexponenten $m = \ell$ war bereits durch die Arbeiten von Furtwängler und Takagi erledigt worden. Für einen beliebigen Exponenten m handelte es sich jedoch um absolutes Neuland, das erst jetzt durch das Artinsche Reziprozitätsgesetz zugänglich geworden war.

In der Einleitung zu [Has27e] bezieht sich Hasse auf die Artinsche Arbeit, insbesondere auf die „$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$-Tatsache“ (siehe 8.2) und sagt:

> „*Ich leite in dieser Arbeit aus dem Artinschen Gesetz ... die folgenden beiden weiteren Gesetze her ...*“,

und dann nennt er als erstes das klassische Reziprozitätsgesetz für das Jacobische Potenzrestsymbol, und als zweites die Produktformel für das Hilbertsche Symbol.[20]

Das klassische Gesetz für das *Jacobische Symbol*, so wie wir es schon auf Seite 43 formuliert hatten, lautet:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) . \tag{19}$$

Hasse behandelt diese Formel also noch einmal, obwohl ja Artin in seinem Brief geschrieben hatte, dass er dies in seine (Artins) Arbeit aufnehmen wolle. Auf den ersten Blick handelt es sich also um eine Wiederholung im Sinne von Punkt 4.) des Artinschen Briefes, wo Artin ja gesagt hatte, dass kleine Wiederholungen nichts schaden würden und sogar sehr gut seien.

Bei näherem Zusehen stellt sich aber heraus, dass die Hassesche Formel (19) keineswegs nur eine „kleine Wiederholung“ ist, sondern sie ist *hinsichtlich der Voraussetzungen allgemeiner* als bei Artin. Während nämlich Artin die bislang in der Literatur üblichen Voraussetzungen macht, dass α und β zu m und zueinander prim sind und dass mindestens eine von ihnen „primär“ für m ist, so kann Hasse die Formel (19) unter allgemeineren Voraussetzungen beweisen: sie gilt

[20] Dazu siehe 10.3.

(20) *für beliebige Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$ aus k, unter der alleinigen Voraussetzung, dass die Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$* und *$k(\sqrt[m]{\beta})$ zueinander prim sind.*

Dazu muss Hasse allerdings vorher die Definition des Potenzrestsymbols erweitern, um sicherzustellen, dass beide Seiten in (19) unter der angegebenen Voraussetzung wirklich definiert sind.

Die dabei zugrundeliegende Idee Hasses ist es, die Definition des Potenzrestsymbols $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ nicht erst auf die Formel (17) (Seite 129) zu stützen, sondern sofort mit Hilfe der Frobenius-Substitution auf die Formel (18). Diese Definition ist immer dann sinnvoll, wenn $\mathfrak{p}$ in $k(\sqrt[m]{\alpha})$ unverzweigt ist, also nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ aufgeht[21] – unabhängig davon, ob $\mathfrak{p}$ in m aufgeht oder nicht. Artin kommentiert das im Brief Nr. 15: „*Ich finde es richtig, dass Sie $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{\sigma_{\mathfrak{p}}(\sqrt[m]{\alpha})}{\sqrt[m]{\alpha}}$ definieren wollen.*“

Vermöge Multiplikativität im Nenner des Symbols wird dann $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$ definiert für alle Divisoren $\mathfrak{b}$ von k, die teilerfremd sind zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ – unabhängig davon ob $\mathfrak{b}$ teilerfremd ist zu m oder zu α.

Wenn sich die Divisoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ um eine m-te Divisorpotenz unterscheiden, so ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}'}\right)$. Diese Beobachtung führt zu einer nochmaligen Erweiterung des Definitionsbereiches von $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$: Wenn es einen zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ primen Divisor $\mathfrak{b}'$ gibt, der sich von $\mathfrak{b}$ nur um eine m-te Divisorpotenz unterscheidet, so wird $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}'}\right)$ wohldefiniert – unabhängig davon ob $\mathfrak{b}$ zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ prim ist oder nicht.

Bei dieser Erweiterung des Definitionsbereiches des Jacobischen Symbols ist sichergestellt, dass beide Seiten von (19) definiert sind, wenn die Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ teilerfremd sind.

Bevor Hasse nun bei dieser Definitionserweiterung die Reziprozitätsformel (19) unter der Voraussetzung (20) beweisen kann, muss er die funktoriellen Eigenschaften des erweiterten Jacobischen Symbols herleiten. Dies geschieht in der Arbeit [Has27e] sehr sorgfältig. Die „$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$-Tatsache“ ergibt sich auch für das erweiterte Symbol direkt aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz, und daraus vermöge des „Furtwänglerschen Tricks“ das Reziprozitätsgesetz (19) unter der angegebenen Voraussetzung (20). Artin schreibt dazu im Brief Nr. 12:

> *Zunächst meinen besten Glückwunsch zu der schönen neuen Formulierung des R*[eziprozitäts]*g*[esetzes]*. Ich finde auch, dass sie*

[21] In diesem Fall heißt α „primär für $\mathfrak{p}$“ oder genauer: „m-primär für $\mathfrak{p}$“.

> *die wahre und symmetrischste ist. In ihr stecken viele spezielle Fälle!*

Hierbei bezieht sich „symmetrisch" offenbar darauf, dass die Bedingung (20) symmetrisch in α und β ist – im Gegensatz zu dem klassischen Reziprozitätsgesetz (2), wo sich die Bedingung primär zu sein nur auf eine der beiden α, β bezieht. Und wenn Artin die Hassesche Formulierung als die „wahre" bezeichnet, dann ist das wohl in demselben Sinne zu verstehen, in dem er zu Beginn des vorvorigen Briefes Nr. 10 von seinem eigenen Reziprozitätsgesetz erklärt hatte, er glaube es sei die „wahre" Formulierung. Damit meint er, dass sich die arithmetischen Gesetze mit Hilfe der Frobenius-Substitution in gruppentheoretischen Gesetzen spiegeln; auch Hasse hatte ja die Frobenius-Substitution in der Galoisgruppe zur Definition des erweiterten Potenzrestsymbols benutzt. Siehe 10.1.

Die „*vielen speziellen Fälle*", die Artin erwähnt, sind vom Typus des zweiten Ergänzungssatzes, weil α oder β Primteiler des Exponenten m enthalten können. Zum Beispiel die Formel für $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, die Artin zwar in Punkt 4.) dieses Briefes ankündigt, dann aber aus Platzgründen doch nicht in seine Arbeit aufgenommen hat, wie er im nächsten Brief Nr. 11 feststellt.

In der Bezeichnungsweise von Hasse und Artin bedeutet λ ein Element aus k, dessen Hauptdivisor sich nur aus Primteilern von m zusammensetzt; das impliziert, dass sich auch der Führer von $k(\sqrt[m]{\lambda})$ nur aus Primteilern von m zusammensetzt. Wenn nun α „primär" ist[22], d.h. wenn m prim ist zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$, dann folgt $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ nach (19), (20). Wenn überdies α, wie Artin sagt, „hyperprimär" ist, d.h. wenn die Primteiler $\mathfrak{l}$ von m (also auch von λ) in $k(\sqrt[m]{\alpha})$ voll zerfallen, dann sind die zugehörigen Frobenius-Substitutionen $\sigma_{\mathfrak{l}} = 1$ und es ergibt sich $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) = 1$. Wir sehen also, dass die von Artin angekündigte Relation

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{wenn } \alpha \text{ hyperprimär} \tag{21}$$

in der Tat ein Spezialfall der Hasseschen Erweiterung (19), (20) des Reziprozitätsgesetzes ist.

Vielleicht war auch das ein Grund, weshalb Artin diese Formel dann doch nicht in seine Arbeit aufgenommen hat? Dagegen spricht allerdings, dass Artin das Hassesche Ergebnis wahrscheinlich erst 8 Tage später erfuhr, denn er spricht ja erst im Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927 davon und gratuliert Hasse dazu.

---

[22] Definition siehe Seite 43.

Übrigens: Im nächsten Brief Nr. 11 erwähnt Artin neben (21) auch die Formel

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right) \tag{22}$$

die er auch nicht in seine Arbeit aufgenommen habe. Es hat den Anschein, dass Hasse ihm vorgeschlagen hatte, auch diese Formel und nicht nur (21) aufzunehmen. Wir haben lange gerätselt, was Hasse dabei wohl gemeint haben könnte. Ein Gesetz dieser Form findet sich nicht in den Arbeiten von Artin und Hasse, und auch nicht in dem Hasseschen Klassenkörperbericht II. Schließlich haben wir dieses Gesetz in §8 von Takagis Arbeit über Reziprozitätsgesetze [Tak22] gefunden; in den gesammelten Werken auf S. 202 ganz oben. (Takagi schreibt μ statt α und ν statt β.) Hierbei bedeutet $\mathfrak{m}$ den zu dem Exponenten m (der ja bei Takagi eine Primzahl $m = \ell$ ist) teilerfremden Bestandteil des Hauptdivisors von α, und β ist eine zu α und m teilerfremde Zahl, *die hyperprimär für* m ist. Takagi benutzt (22) um daraus (21) zu beweisen.

Offenbar hatte Hasse vorgeschlagen, dass Artin nunmehr *für beliebigen Exponenten* m die Takagische Formel in seine Arbeit aufnimmt und daraus dann (21) herleitet. In der Tat kann (21) als ein Spezialfall von (22) angesehen werden. Andererseits ist wiederum (22) in Hasses erweiterter Reziprozitätsformel (19), (20) enthalten. Eine detaillierte Diskussion des Sachverhalts finden wir in Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has30a], §12.

Die Arbeit [Has27e] enthält noch ein weiteres wichtiges Resultat über das Jacobische Symbol in der Hasseschen Erweiterung, nämlich die Charakterisierung von $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ durch Kongruenzbedingungen, allerdings nur im Falle von Primzahlexponent $m = \ell$. Hierüber werden wir in 14.2 berichten; siehe insbesondere die dortige Formel (28).

Bemerkung: Im Falle $m = 2$ kann der Führer von $k(\sqrt{\alpha})$ reelle Stellen von k enthalten. Eine reelle Stelle ist im Führer dann und nur dann enthalten, wenn $\alpha < 0$ ist in der Anordnung von k, die zu dieser Stelle gehört. In dem Hasseschen Satz (19) besagt die Führer-Bedingung (20), dass für eine reelle Stelle nicht gleichzeitig $\alpha < 0$ und $\beta < 0$ sind. Dies muss stets berücksichtigt werden, wenn man mit dem quadratischen Restsymbol arbeitet. Zur Verdeutlichung betrachten wir das folgende Beispiel, das wir einem Brief von Furtwängler an Hasse entnommen haben. Offenbar hatte Hasse ihn über sein erweitertes Reziprozitätsgesetz (19), (20) informiert, aber Furtwängler hatte übersehen, dass auch die reellen Stellen berücksichtigt werden müssen; daher arbeitete er mit der Diskriminante statt mit dem Führer. Furtwängler

schrieb am 29. 7. 1927 an Hasse:

> *Was das Gesetz* $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m$ *wenn die R[elativ]D[iskriminanten] von* $k(\sqrt[m]{\alpha})$ *und* $k(\sqrt[m]{\beta})$ *zueinander prim sind, betrifft, so ist es wohl in dieser Fassung für gerades* m *nicht allgemein richtig. Denn in* $\mathbb{Q}$ *ist:* $\left(\frac{-3}{-5}\right)_2 \neq \left(\frac{-5}{-3}\right)_2$, *obwohl* 20 *und* 3 *relativ prim sind.*

In der Tat ist $\left(\frac{-3}{-5}\right)_2 = -1$ und $\left(\frac{-5}{-3}\right)_2 = 1$. Vielleicht hat dieses Missverständnis durch Furtwängler den Anlass dazu gegeben, dass Hasse in [Has27e] eine Fußnote eingefügt hat mit der ausdrücklichen Bemerkung, dass der Führer gemeint ist und nicht die Diskriminante.

10.3 Das Hilbertsche Symbol

Im Brief Nr. 8 hatte Artin bereits erwähnt, dass man jetzt noch die Hilbertsche Fassung des Reziprozitätsgesetzes gewinnen müsse, und am Ende von Nr. 9 fragt er an, ob Hasse die Produktformel für das Hilbertsche Symbol beweisen könne.

Hilbert hatte seine Produktformel stets als den eigentlichen Kern des Reziprozitätsgesetzes angesehen. Implizite steckte sie ja schon in Gauss' Theorie der Geschlechtercharaktere, mit deren Hilfe Gauss dann das Reziprozitätsgesetz bewiesen hat. Für Hilbert stellt die Produktformel, welche, wie Hilbert sagt, „das Reziprozitätsgesetz auf die einfachste und vollständigste Weise zum Ausdruck bringt", das eigentliche Analogon des Cauchyschen Satzes dar, wonach das komplexe Integral entlang einer geschlossenen Kurve um alle Singularitäten einer analytischen Funktion in der komplexen Ebene (oder auf einer Riemannschen Fläche) immer gleich Null ist. Es war ja eine Forderung von Hilbert, dass zu den wichtigen Sätzen der Funktionentheorie die analogen Sätze in der Zahlentheorie aufzustellen seien, und in seinem Entwurf einer allgemeinen Theorie des Klassenkörpers hat er sich auch von dieser Idee leiten lassen.

Hasse hatte sich unter diesem Gesichtspunkt schon früher in einer Reihe von Arbeiten mit dem Hilbertschen Symbol beschäftigt, damals für den Fall eines Primzahlexponenten $m = \ell$. [23] Dies war Artin natürlich bekannt und so schreibt er jetzt in Punkt 2.) seines Briefes, dass er sich mit den Normenrestsymbolen bei weitem nicht so gut auskenne wie Hasse und deshalb

[23] Vgl. [Has24d], [Has24c], [Has25f], [Has25c].

dankbar wäre, wenn die Produktformel für das Hilbertsche Symbol von Hasse übernommen würde. Das geschieht nun im 2. Teil der Hasseschen Arbeit [Has27e].

Jetzt ist die Situation anders als in Hasses früheren Arbeiten bei Primzahlexponenten. Damals war die Gültigkeit der Produktformel durch die Arbeiten von Furtwängler und Takagi bereits gesichert und es ging darum, das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ durch lokale Eigenschaften zu charakterisieren. Jetzt, bei beliebigem Exponenten, kommt es zunächst darauf an, das Hilbertsche Normsymbol geeignet zu definieren und die Produktformel mit Hilfe des Artinschen Reziprozitätsgesetzes zu beweisen. Wie Artin in seinem Brief vorhersagt, liegt die Hauptschwierigkeit darin, dass das zu definierende Symbol wirklich die Normeigenschaft besitzt.

Eigentlich, so meint Hasse in [Has27e], sollte es möglich sein, das *lokale* Symbol allein durch seine formalen Eigenschaften eindeutig zu definieren, nämlich: Es bedeute $k_{\mathfrak{p}}$ die $\mathfrak{p}$-adische Komplettierung des Körpers k, von dem vorausgesetzt wird, dass er die m-ten Einheitswurzeln enthält.[24] Dann ist $(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}})$ ein bi-multiplikatives, anti-symmetrisches Symbol auf $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ mit Werten in der Gruppe der m-ten Einheitswurzeln, derart dass:

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ ist Norm aus } k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[m]{\beta})|k_{\mathfrak{p}}\,. \tag{23}$$

Aber diese formalen Eigenschaften reichen zur Definition nicht aus. Daher folgt Hasse der Methode, welche im Falle $m = \ell$ benutzt wurde, wobei nunmehr das Artinsche Reziprozitätsgesetz herangezogen werden muss.

Für die nicht in m aufgehenden Primstellen $\mathfrak{p}$ wird $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ nach dem Muster von Formel (5) auf Seite 45 definiert.

Für die Teiler $\mathfrak{l}$ von m geht Hasse folgendermaßen vor: Gegeben seien $\alpha,\beta \in k$. Man wähle $\alpha',\beta' \in k$ im $\mathfrak{l}$-adischen Sinne hinreichend nahe bei α,β[25], aber für jeden Teiler $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$ von m im $\mathfrak{l}'$-adischen Sinne hinreichend nahe bei 1. Wenn überhaupt das Hilbertsche Symbol sinnvoll definiert werden kann, dann sollte es stetig sein, und also

$$\left(\frac{\alpha',\beta'}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\alpha',\beta'}{\mathfrak{l}'}\right) = 1 \text{ für } \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}\,.$$

[24]Hasse schreibt $\mathfrak{w}$ statt $\mathfrak{p}$, offenbar in Anlehnung an die Hilbertsche Bezeichnung in dessen Zahlbericht und den Arbeiten zum Reziprozitätsgesetz.

[25]Hierbei ist „hinreichend nahe“ im multiplikativen Sinne zu verstehen, d.h. der Quotient ist $\equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^N$ mit hinreichend großem N. Wenn N groß ist, dann ist der Quotient also eine m-te Potenz in der Komplettierung $k_{\mathfrak{l}}$. – Entsprechend für $\mathfrak{l}'$.

Außerdem sollte die Produktformel für α', β' gelten, und das ergibt dann:[26]

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid m} \left(\frac{\alpha',\beta'}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} . \tag{24}$$

Hasse nimmt nun die Gleichung (24) als *Definition* der linken Seite. Als erstes muss dazu gezeigt werden, dass dadurch $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ wohldefiniert ist. Dazu wird das allgemeine Reziprozitätsgesetz (19) für das Jacobische Symbol benötigt. Die Produktformel für das Hilbertsche Symbol ist im Grunde in die Definition (24) eingebaut. Die funktoriellen Eigenschaften des Hilbertschen Symbols ergeben sich routinemäßig. Einen erheblichen Aufwand erfordert der Beweis der Normeigenschaft dieses Symbols, so wie Artin das in seinem Brief vorhergesagt hatte. Allerdings ist der Beweis ziemlich direkt, es treten keine besonderen Schwierigkeiten auf.

Bemerkung: Wie die obige Diskussion zeigt, ist die Produktformel für das Hilbertsche Symbol im wesentlichen nur eine Umformung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes (19). Sachlich bringt die Produktformel keine neue Information, weil ja das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für einen kritischen Primdivisor $\mathfrak{l} \mid m$ nicht unabhängig von den Primdivisoren $\mathfrak{p} \nmid m$ definiert wird. Die Situation bei beliebigem Exponenten m ist also dieselbe wie sie im Falle von Primzahlexponenten durch Takagi beschrieben wurde. Bei der Produktformel für das Hilbertsche Symbol, so schreibt Takagi,

> *handelt es sich um eine Betrachtung mehr formaler Natur, und der Beweis erledigt sich schnell durch Heranziehung des vorher erhaltenen Resultats ...*

wobei das „vorher erhaltene Resultat“ eben das allgemeine Reziprozitätsgesetz ist. Vielleicht hat Artin das auch so gesehen, als er im Brief Nr. 8 meinte, dass die Herleitung der Hilbertschen Fassung „*nur etwas langweilig*“ sei.

Immerhin ist zu sagen, dass Hasse die Ideen, die zur Hilbertschen Produktformel führen, später weiter entwickelt hat und dadurch zu seinem Normsymbol und zur Entdeckung der lokalen Klassenkörpertheorie gelangte (siehe 26.1). Und schließlich, angeregt durch Emmy Noether, zu einer rein lokalen Definition des Normsymbols [Has33a], und von daher mit Hilfe des Lokal-Global-Prinzips zu einem neuen Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Also doch nicht so langweilig. Wenn Artin schreibt: „*Ich bin auf Ihren*

[26] Für $m = 2$ müssen die reellen Primstellen von k noch berücksichtigt werden.

Beweis sehr gespannt", dann ist er durch diese Entwicklung, die allerdings etwas länger dauerte, sicher nicht enttäuscht worden.

10.4 Der Umkehrfaktor

Artin fragt in Punkt 5.) seines Briefes an, ob Hasse nunmehr auch den Umkehrfaktor $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ bestimmen kann, auch wenn dieser Umkehrfaktor nicht trivial ist. Es handelt sich also jetzt im Hinblick auf (19), (20) um diejenigen Fälle, in denen die Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ nicht teilerfremd zueinander sind (vorausgesetzt, dass die beiden Symbole wirklich definiert sind, also β zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ teilerfremd ist, und entsprechend α zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$).

Für den Fall $m = \ell$ hatte sich Hasse in früheren Arbeiten mit diesem Problem beschäftigt, z.Bsp. in der Arbeit [Has25d] aus dem Jahre 1925. Damals war lediglich der Fall eines Primzahlexponenten ℓ zugänglich. (Siehe 5.5.) Artin möchte nun wissen, ob und wie sich die früheren Überlegungen angesichts seines neuen allgemeinen Reziprozitätsgesetzes auf den Fall höherer Potenzen ℓ^n erweitern lassen.

In der Tat hat sich Hasse sogleich an die Arbeit gemacht und explizite Formeln auch für beliebige Exponenten gesucht. In seinem Tagebuch findet sich unter dem Datum des 4. 10. 1927 ein Eintrag mit dem Titel „Zum expliziten Reziprozitätsgesetz im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln". Dieser Eintrag umfasst 19 Seiten und ist als eine ausführliche Vorarbeit zu der 1929 in den Hamburger Abhandlungen erschienenen Arbeit anzusehen, mit dem Titel „*Zum expliziten Reziprozitätsgesetz*", in welcher der Umkehrfaktor systematisch behandelt wird [Has29].[27] Hasse bezieht sich dabei auf seine früheren Arbeiten für den Exponenten $m = \ell$. Jetzt aber, sagt Hasse in [Has29], werde er sich im Vergleich mit seinen früheren Arbeiten ganz neuartiger Methoden bedienen, nicht etwa Verallgemeinerungen seiner früheren Methoden. Vielmehr knüpft Hasse an die historisch allererste Arbeit zum expliziten Reziprozitätsgesetz im Kreiskörper an, nämlich den, wie er sagt, leider nur noch wenig gelesenen Aufsatz von Eisenstein im Crelleschen Journal 1850 [Eis50b]. Hasse dankt Artin für den Hinweis nicht nur auf die Eisensteinsche Arbeit, sondern auch auf den Eisensteinschen Ausgangspunkt. Diese Arbeit von Eisenstein kam schon früher in dem Briefwechsel zur Sprache; siehe 5.3 und 7.1.

[27] Das Manuskript zu dieser Arbeit ging bei Artin schon im Oktober 1928 ein. Vgl. Brief Nr. 19 vom 4. 11. 1928.

Hasses Idee in dieser neuen Arbeit ist es, die Bestimmung des Umkehrfaktors zurückzuführen auf den sog. zweiten Ergänzungssatz für den Exponenten ℓ^n, den Artin und Hasse in ihrer kürzlichen gemeinsamen Arbeit [AH28] gewonnen hatten – das ist gerade der umgekehrte Weg, der in [AH25] begangen wurde, wo es (im Falle eines Primzahlexponenten $m = \ell$) darauf ankam, den zweiten Ergänzungssatz aus dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz herzuleiten. (Siehe 5.4.)

Allerdings ist Hasse in dieser Arbeit eine abschließende, befriedigende Formel zur Bestimmung des Umkehrfaktors für beliebige Exponenten nicht gelungen Hierzu vgl. auch den Brief Nr. 17 vom 27. 10. 1927, insbesondere 17.1 und 17.3.

Hasse hat in Teil II seines Klassenkörperberichts ein ganzes Kapitel dem Thema der „expliziten Formeln zum Reziprozitätsgesetz" gewidmet, aber auch dort heißt es:

> „*Wünschenswert erscheint eine explizite Formel für den Umkehrfaktor, in die α und β nur modulo $\mathfrak{m}^\star$ bestimmt eingehen. . . Eine abschliessende Lösung dieser Aufgabe ist bis heute nicht gegeben. . .*"

(Dabei ist $\mathfrak{m}^\star$ ein gewisses Ideal, das ein Vielfaches von m ist und genau angegeben werden kann. Wenn $m = 2$ ist, dann sind auch die Vorzeichen an den reellen Stellen zu berücksichtigen.)

Wir können hinzufügen, dass dies bis heute noch nicht abschliessend gelungen ist, trotz vieler interessanter Teilresultate. Vielleicht gibt es überhaupt keine universelle explizite Formel, die diesen Umkehrfaktor in allen Fällen in befriedigender Weise darstellt. Siehe auch 17.3.

10.5 Hasses Klassenkörperbericht II

Wenn Artin sagt, es tue ihm leid, dass Hasse „*seinen ganzen Bericht wiederholen müsse*", so meint er dabei den Hasseschen Klassenkörperbericht, Teil II.

Zur Zeit dieses Briefwechsels war Hasse gerade dabei, den Teil II seines Klassenkörperberichts zu verfassen. Die Teile I und Ia waren 1926 und 1927 in dem Jahresbericht der DMV erschienen, und nun sollte Teil II folgen. Während in Teil I die Takagische Klassenkörpertheorie behandelt wurde und in Teil Ia die Beweise dazu, so sollten nunmehr in Teil II, darauf aufbauend, die klassischen Reziprozitätsgesetze nach dem neuesten Stand entwickelt werden.

Hasse war schon fast fertig gewesen mit der Niederschrift des Manuskripts, als Artins Nachricht über den Beweis seines allgemeinen Reziprozitätsgesetzes eintraf. Hasse wünschte, Artins Beweis in seinen Teil II einzuarbeiten, und er hatte Artin um dessen Einwilligung gebeten, die ihm auch gegeben wurde. (Siehe Brief Nr. 9.)

Aus der Bemerkung von Artin im vorliegenden Brief kann man entnehmen, dass Hasse sich inzwischen entschlossen hatte, seinen Bericht völlig neu zu schreiben.

In der Tat hat Hasse nunmehr den Teil II seines Berichts ganz auf das soeben entdeckte Artinsche Reziprozitätsgesetz ausgerichtet. Die Einleitung beginnt demgemäß mit den Worten:

> „*Seit dem Erscheinen des ersten Teils dieses Berichts hat die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper einen Fortschritt von der allergrößten Bedeutung gemacht, der gerade die für diesen zweiten Teil in Aussicht genommene Theorie, das Reziprozitätsgesetz, betrifft. Es gelang nämlich Artin, den allgemeinen Beweis für seine schon 1923 vermutete und in speziellen Fällen bewiesene gruppentheoretische Formulierung des Reziprozitätsgesetzes zu geben, die ich im folgenden das Artinsche Reziprozitätsgesetz nenne.*“

Der gesamte Teil II erscheint nunmehr als die erste, und übrigens bis heute vollständigste, Diskussion des Artinschen Reziprozitätsgesetzes samt seinen verschiedenen Folgerungen für die Theorie des Normsymbols und des Potenzrestsymbols. Dieser Bericht ist eine schöne Bestätigung für die Aussage Artins in seinem Brief, dass „*die Arbeit sich lohnen wird*“. Vergleiche dazu das Inhaltsverzeichnis dieses Berichts:

1. Das Artinsche Reziprozitätsgesetz.
2. Die Produktformel für das Normenrestsymbol.
3. Das Reziprozitätsgesetz für die Potenzreste.
4. Explizite Formeln zum Reziprozitätsgesetz.
5. Weitere Anwendungen des Artinschen Reziprozitätsgesetzes:
   (a) Der Dichtigkeitssatz von Tschebotareff.
   (b) Die Artinschen L-Funktionen.
   (c) Der Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie.

Alle diese Themen kommen auch in dem Briefwechsel von Artin mit Hasse zur Sprache.

Wenn Artin fragt, ob Hasse in dem Bericht alle Beweise bringen wird, so denkt er wohl an den Teil I des Hasseschen Klassenkörperberichts [Has26a], in dem die Beweise nicht alle gebracht worden waren, sondern nur die innere Struktur der Takagischen Klassenkörpertheorie aufgezeigt werden sollte. Erst nach „*Anregungen von verschiedenen Seiten*“ hatte Hasse dann in einem Teil Ia [Has27a] die Beweise nachgeliefert.[28] Vielleicht hatte damals u.a. auch Artin eine Anregung dazu gegeben? Hier jedenfalls scheint seine Frage die Aufforderung zu beinhalten, in Teil II alle Beweise gleich zu bringen, was Hasse dann auch getan hat.

[28] Vgl. dazu 8.3.

11 26.07.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, 26.7.1927

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren lieben Brief, der mich lebhaft interessiert hat. Ich habe nun die Arbeit schon aufgeschrieben und an die Druckerei weitergegeben. Nächste Woche erhalten Sie die Korrekturen.[1] Am Schluss der Arbeit schrieb ich, dass Sie mir mitgeteilt hätten, die Hilbertsche Formulierung könnten Sie beweisen. Ich hoffe, dass Sie damit einverstanden sind; wenn nicht, so können in der Korrektur noch immer Änderungen vorgenommen werden. Ich würde auch gern noch in einem Zitat darauf hinweisen, wo Sie dieses Resultat publizieren werden. Steht das schon fest? [2]

Ferner sind Sie mir doch nicht böse, dass ich Ihrem Vorschlag $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right)$ zu zeigen doch nicht gefolgt bin und weder ihn, noch $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = 1$ gezeigt habe.[3] Ursprünglich hatte ich nämlich die ganze Sache auf etwa 10 Seiten veranschlagt. Da nun das laufende Heft bereits dadurch zu gross geworden wäre, können Sie sich denken, dass ich sehr sparen musste als ich doch insgesamt 15 Seiten (geschrieben = etwa 12 Seiten Druck) dazu brauchte. Das kommt daher, weil ich alles in lesbarer, genügend breiter Form darstellen wollte. So habe ich mich denn schweren Herzens nur zu $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ entschlossen.

Darf ich nun noch einige Fragen an Sie richten:[4] Bei ℓ^n-primär kommt man mit dem Modul $(1-\zeta)^\ell$ aus, wenn ζ eine primitive ℓ-te Einh[eits]w[urzel] ist, also mit einem von n unabhängigen Modul. Bei ℓ^n-hyperprimär muss man aber stark klettern. Haben Sie die genaue Potenz von den $\mathfrak{l}_i$ mit der man auslangt? Das kann nicht schwer sein (mit Hilfe der bekannten Resultate über Kummersche Körper), ich hab es mir aber noch nicht genau überlegt. Man muss da den Führer für $k(\sqrt[\ell^n]{\mu})$ bestimmen wenn μ durch $\mathfrak{l}^1$ teilbar ist.

[1]Es handelt sich um die Korrekturen zu Artins Arbeit [Art27a] mit dem Beweis des Reziprozitätsgesetzes, zu der Artin an Hasse einen Entwurf in der Beilage 9 geschickt hatte. Siehe Seite 139 ff.

[2]Das stand wahrscheinlich noch nicht fest, denn in Artins Arbeit gibt es kein genaues Zitat. Die Hassesche Arbeit [Has27e] erschien noch im selben Jahr 1927 im Crelleschen Journal. Siehe 10.3.

[3]Siehe dazu 10.2, insbesondere Seite 162 f.

[4]Siehe 11.1.

Das gibt doch die grösste Potenz?

Als Kuriosität, die ja natürlich bekannt ist, möchte ich die Formeln für das biquadratische R[eziprozitäts]g[esetz] in $R(\sqrt{-1})$ in expliziter Form angeben:[5]

$$\left(\frac{a+2bi}{c+2di}\right) \times \left(\frac{c+2di}{a+2bi}\right)^{-1} = (-1)^{bd + \frac{a-1}{2}d + \frac{c-1}{2}b} .$$

2. Ergänzungssatz:

$$\left(\frac{1+i}{a+2bi}\right) = i^{\frac{b(a-3b)}{2} - \frac{a^2-1}{8}} .$$

Dabei in $a + 2bi$, a lediglich ungerade. Der 2-te Ergänzungssatz geht nach dem bewussten Schimmel.

Nun etwas anderes, das mir grossen Spass bereitet hat und das ich gestern im Heckeseminar erzählte. Das Resultat scheint, so trivial der Beweis ist, neu zu sein.

Eine ganz kindische Vermutung jedes Anfängers ist doch diese: Ist k Unterkörper von K, so ist die Klassenzahl von k ein Teiler der Klassenzahl von K. Ich möchte zeigen, dass dies „fast“ immer richtig ist, mehr noch:[6]

Satz: Enthält K/k (wo K ein beliebiger, nicht notwendig galois'scher Oberkörper von k ist) keinen in bezug auf k Abelschen und *gleichzeitig* unverzweigten Zwischenkörper, so besitzt die Gruppe der absoluten Idealklassen von K eine Untergruppe (Gruppe der Klassen deren Relativnorm in k in die Hauptklasse fallen), deren Faktorgruppe isomorph ist mit der Gruppe der absoluten Idealklassen in k.

Beweis: Sei Ω der Klassenkörper (absolute, volle) von k. Er hat mit K nach Annahme den Durchschnitt k. Für den bekannten Satz der galois'schen Theorie, dass die Fremdheit der Körper ausreicht um zu sichern, dass der komponierte Körper als Grad das Produkt der Grade hat reicht es nun aus, wenn einer der Körper relativ galois'sch ist. Das ist beinahe trivial. Nun ist der Klassenkörper sogar Abelsch. Also hat der komponierte Körper $\Omega K = \Omega_1$ in bezug auf K gleichen Grad und gleiche Gruppe wie Ω in bezug auf k. Da Ω in bezug auf k unverzweigt ist, ist auch $K\Omega$ in bezug auf K unverzweigt.

[5] Siehe 11.2.

[6] Siehe 11.3.

Sie überlegen sich das leicht selbst (etwa „allgemeine“ Zahl aus Ω ist spezielle Zahl in Ω_1 deren Rel[ativ]d[iskriminante] in bezug auf K den Wert 1 hat). „Allgemeine“ Zahl = Basisform. Also ist Ω_1 Klassenkörper in bezug auf K und zwar unverzweigter. Folglich gibt es eine mit den Idealklassen von k isomorphe Klasseneinteilung (absolute, d.h. mod 1) in K. Wir sind zu Ende. Dass die Hauptklasse gerade aus den angegebenen Klassen besteht überlegen Sie sich leicht selbst. Allgemein ist der Idealklasse $\mathfrak{k}$ aus k der Komplex derjenigen Klassen $\mathfrak{K}$ aus K zuzuordnen, deren Norm nach $\mathfrak{k}$ fallen. Das wesentliche ist dabei die *Existenz* solcher Klassen $\mathfrak{K}$, und das geht eben so einfach.

Ich lege deshalb Wert auf diesen Satz, da er (abgesehen vom hübschen Wortlaut) unmittelbar die *Kummersche Vermutung* bestätigt und verallgemeinert (Hilbert Zahlbericht Seite 378, dritte bis siebente Zeile von oben):

Satz. Sind k_1 und k_2 zwei im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln (ℓ Primzahl, n beliebig) enthaltene Unterkörper, und ist k_1 Unterkörper von k_2, so ist die Klassenzahl von k_1 Teiler der von k_2. Genauer, die Gruppe der Klassen in k_2 besitzt eine zu der von k_1 isomorphe Faktorgruppe. (Also auch eine dazu isomorphe Untergruppe, (bekannter Satz über abelsche Gruppen)).

Zum Beweis braucht man nur zu zeigen, dass ein in $R(\zeta)$ $\left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\ell^n}}\right)$ enthaltener Unterkörper k_1 keinen unverzweigten, in $R(\zeta)$ enthaltenen Oberkörper haben kann. Das ist aber trivial. Denn ℓ wird in $R(\zeta)$, also auch in jedem Zwischenkörper Potenz eines Primideals ersten Grades. Ist $\mathfrak{l}$ der Primteiler in k_1, so wird folglich in jedem in $R(\zeta)$ liegenden Oberkörper $\mathfrak{l}$ eine Potenz; geht also in der Relativdiskr[iminanten] auf.

Der Satz ist für zusammengesetzte m nicht mehr richtig. Denn der Körper der 20-ten Einheitswurzeln $R(\sqrt{-5}, i)$ hat die Klassenzahl 1, der Unterkörper $R(\sqrt{-5})$ die Klassenzahl 2.

Sie sehen, dass sogar durch triviale Verwendung der Klassenkörpertheorie noch hübsche Sätze zu erhalten sind.

Nun bin ich noch immer nicht zum Hauptidealsatz gekommen, was mir sehr leid tut, weil ich die dabei verwendete Methode für viel wichtiger halte als den Satz selbst. Dieser hat sich leider damit noch nicht ergeben. Wohl aber haben wir (Herr Schreier als Gruppentheoretiker tut hier mit) ihn für so viele Gruppentypen verifiziert dass schon zu sehen ist, dass es als hoffnungslos erscheinen muss ein Gegenbeispiel zu finden. Die Klassenzahl des Grundkörpers müsste in die Hunderte gehen; und das ist doch hoffnungslos.[7]

[7] Zum Hauptidealsatz vgl. den Brief Nr.13 vom 2. 8. 1927 und die Kommentare dazu.

Also haben Sie bitte noch Geduld. Darf ich Sie bitten Ihrer Frau Gemahlin viele Grüsse zu bestellen. Leider waren Sie noch nicht verheiratet, als wir das letzte Mal über die Rez[iprozitäts]ges[etze] korrespondierten, sonst würde sie sich über den Eifer nicht wundern.[8]

Viele Grüsse
Ihr Artin

[8]In den vergangenen 10 Tagen hatte es 5 Briefe von Artin an Hasse und wohl mindestens ebenso viele von Hasse an Artin gegeben, sodass es durchaus verständlich erscheint, dass sich Frau Hasse „über den Eifer gewundert“ hat. Artin spielt nun an auf die Periode im Sommer 1923, als es ebenfalls einen besonders intensiven Briefwechsel zwischen Artin und Hasse gegeben hatte; siehe die Briefe Nr. 1-5. Allerdings gibt es eine kleine Unstimmigkeit in Bezug auf die Datierung. Helmut Hasse und Clara Ohle hatten am 20. Mai 1923 geheiratet. Der erste erhaltene Brief von Artin an Hasse datiert vom 9. Juli 1923. Damals war also Hasse bereits verheiratet. Kann man aus der vorliegenden Bemerkung Artins schließen, dass es noch einen früheren Austausch von Briefen gegeben hat, die nicht erhalten sind? Jedenfalls gab es einen regen Gedankenaustausch schon früher, denn nach dem Vortrag von Hasse in Hamburg am 1. März 1923 hatten sich Artin und Hasse im März, April und Mai einige Male getroffen, da Hasse regelmäßig am Seminar in Hamburg teilnahm. Dabei hatten sie sich, wie Hasse später erzählte, auch schon Gedanken darüber gemacht, wie das Artinsche Reziprozitätsgesetz zu beweisen sei. – Übrigens war Artin selbst im Jahre 1927, dem Datum des vorliegenden Briefes, noch nicht verheiratet.

Kommentare zum Brief Nr. 11:

11.1 Primäre und hyperprimäre Zahlen

Um die diesbezüglichen Fragen Artins zu verstehen, ist es notwendig, die bei Hasse und Artin verwendeten Bezeichnungen und die Terminologie zu kennen. k sei ein Zahlkörper, der die m-ten Einheitswurzeln enthält. ℓ bezeichnet eine in m aufgehende Primzahl, und ℓ^n die genaue Potenz, mit der ℓ in m aufgeht. ζ ist eine primitive ℓ-te Einheitswurzel und $\lambda = 1 - \zeta$ der Primteiler von ℓ im Körper der ℓ-ten Einheitswurzeln. Artin fragt, welchen Exponenten t man benötigt, um aus einer Kongruenz $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda^t$ schliessen zu können, dass α primär für ℓ ist, d. h. dass ℓ teilerfremd ist zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$.[9] Und entsprechend, wenn „primär" durch „hyperprimär" ersetzt wird; das bedeutet, dass jeder Primteiler von ℓ im Kummerschen Körper $k(\sqrt[m]{\alpha})$ vollzerlegt ist. (Artin bezeichnet die Primteiler von ℓ im Körper k mit dem Buchstaben $\mathfrak{l}_i$.) Fragen dieser Art sind für explizite Reziprozitätsformeln von Bedeutung.

Möglicherweise hat Artin nur den Fall $m = \ell^n$ und $k = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^n]{1})$ im Auge. In jedem Falle ist aber seine Behauptung nicht richtig, dass man mit $(1-\zeta)^\ell$ als Modul auskommt (also $t = \ell$). Das hat Artin offenbar ziemlich bald selbst bemerkt, wie aus seinem nächsten Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927 hervorgeht. Dort vermutet er, dass $(1-\zeta)^{\ell^n}$ ausreicht. Im allgemeinen scheint wohl auch dies nicht richtig zu sein. Die genauen Exponenten wurden später von Hasse in Teil II seines Klassenkörperberichts [Has30a] angegeben; vgl. §9, Sätze X und XI jenes Berichts.

Vgl. auch den Brief Nr. 14 vom 6. 8. 1927 und 14.2.

11.2 Zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz

Artin sagt zwar, dass die von ihm angegebenen Formeln bekannt seien, gibt aber keine Literatur dazu an. Vielleicht meinte er damit, dass man man sie aus den Eisensteinschen Arbeiten leicht herleiten könne. Wie schon erwähnt, hat Artin die Eisensteinschen Arbeiten zum Reziprozitätsgesetz sehr gut gekannt und sich auf diese mehrmals bezogen; er hatte ja auch Hasse mehrmals darauf aufmerksam gemacht. Für nicht-primäre Zahlen findet sich jedoch die von Artin angegebene Form des Umkehrfaktors explizit weder bei Eisenstein noch im Hilbertschen Zahlbericht.

[9] Siehe Seite 43.

Möglicherweise finden sich diese oder ähnliche Formeln in den Arbeiten von Bohniček aus den Jahren 1904-1911, in denen dieser sich mit dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz befasst und dabei unter anderem die Hilbertschen Normenrestsymbole in $\mathbb{Z}[i]$ explizit bestimmt. (Diese Arbeiten sind in kroatischer Sprache verfasst und im „Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik“ zwar zitiert, aber nicht alle referiert.) In Lemmermeyers Buch [Lem00] wird Artins Brief in Aufgabe 6.17 erwähnt, und es wird dazu verwiesen auf Gauss' Werke X p.200. In der Tat findet sich die von Artin im Falle des 2. Ergänzungssatzes angegebene Formel in Gauss' zweiter Arbeit über das biquadratische Reziprozitätsgesetz [Gau89] (art. 63).

Man hat indessen den Eindruck, dass es Artin nicht bekannt war, dass dieselbe Formel schon bei Gauss steht. Wir haben keine Hinweise gefunden, dass Artin Gauss wirklich gelesen hat. Vgl. dazu [Fre04].

Wenn Artin diese Formeln als „Kuriosität“ bezeichnet, dann meint er wohl, dass sie eben nur für das biquadratische Reziprozitätsgesetz in $\mathbb{Q}(i)$ Bedeutung haben, also nicht direkt verallgemeinerungsfähig sind. Artin und Hasse sind gerade dabei, eine gemeinsame Arbeit zum Reziprozitätsgesetz der ℓ^n-ten Potenzreste [AH28] zu entwerfen, vgl. 17.1. Wie es Artin auch in anderen Fällen gemacht hat, hat er hier den einfachsten Spezialfall $\ell^n = 4$ betrachtet und nachgesehen, was dabei herauskommt. Die klassische Version des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes gilt nämlich nur für primäre $\alpha, \beta \equiv 1 \bmod (1+i)^3$.

Wir wissen nicht, ob und wie Hasse auf diese Mitteilung reagiert hat. Interessant ist jedoch eine Tagebuch-Eintragung von Hasse unter dem Datum 1. 1. 1928, also ein halbes Jahr später. Der Titel dieser Eintragung lautet:

> „*Herleitung des Gauss'schen biquadratischen Reziprozitätsgesetzes (zweiter Ergänzungssatz) aus dem allgemeinen Gesetz.*“

Hasse bezieht sich dabei auf die gemeinsame Arbeit mit Artin [AH28], die zwar noch nicht erschienen war, die jedoch bereits 1927 den Hamburger Abhandlungen vorgelegt und für 1928 zur Publikation vorgesehen war. Was Hasse in seinem Tagebuch durchführt, ist die Herleitung des 2. Ergänzungssatzes des klassischen biquadratischen Reziprozitätsgesetzes aus den allgemeinen Resultaten aus [AH28], die er zusammen mit Artin für den 2. Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der ℓ^n-ten Potenzreste für eine beliebige Primzahlpotenz ℓ^n gewonnen hatte. Indem er $\ell^n = 4$ setzte und den Grundkörper $k = \mathbb{Q}(i)$, kann er aus den allgemeinen Formeln den Wert des 4-ten Potenzrestsymbols $\left(\frac{2}{p}\right)_4$ für eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ bestimmen und erhält

daraus den Satz von Gauss:

> 2 *ist genau dann biquadratischer Rest modulo p wenn p eine Darstellung der Form* $p = x^2 + 64y^2$ *gestattet.*

In gewisser Weise ist das konträr zu der in Rede stehenden Briefstelle von Artin. Während Artin Freude an den expliziten Formeln für den speziellen Fall $\ell^n = 4$ bekundet, möchte Hasse die klassischen Ergebnisse als Spezialfälle des allgemeinen Gesetzes für eine beliebige Primzahlpotenz ℓ^n verstanden wissen.

Wir wissen nicht, ob Hasse diese seine Tagebuch-Eintragung an Artin mitgeteilt hat. Später, im Jahre 1958, hat Hasse in einer längeren Arbeit den 2^n-ten Potenzcharakter $\left(\frac{2}{p}\right)$ im Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln eingehend untersucht [Has58], wobei er sich u.a. auf die gemeinsam mit Artin erhaltene Formel zum zweiten Ergänzungssatz stützte; vgl. 17.1.

11.3 Teilbarkeit von Klassenzahlen

Wenn Artin im Zusammenhang mit dem Teilbarkeitsproblem für Klassenzahlen von einer „kindischen Vermutung jedes Anfängers" spricht, dann erinnert er sich vielleicht an seine eigene Jugend, in der er diese Vermutung ebenfalls gehabt haben mag. Aber seine Korrespondenz mit seinem Lehrer Herglotz zeigt, dass er schon früh, spätestens 1922, über diese „kindische Vermutung" hinausgekommen war und ernsthafte Untersuchungen zur Klärung des Sachverhalts eingeleitet hatte. Jedenfalls kann aus dieser Briefstelle nicht geschlossen werden, dass es Artin erst jetzt bewusst wurde, dass jene Vermutung unzutreffend ist.

Wir können es aber nachfühlen, wenn Artin an Hasse schreibt, dass ihm sein neuer Satz, den er im Hecke-Seminar vorgetragen hatte, „*grossen Spass bereitet*" hat. Denn der Beweis ist, auf der Basis der Klassenkörpertheorie, wirklich einfach und hat nicht direkt mit Zetafunktionen und L-Funktionen zu tun. Und der Satz enthält natürlich auch den Fall eines Ikosaederkörpers, weil die Ikosaedergruppe als einfache Gruppe keine nichttrivialen Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe besitzt.

Artin hat diesen Satz, obwohl er ihn als „neu" ansah, niemals publiziert. Vielleicht deshalb nicht, weil eben der Beweis so einfach ist und auf der Hand liegt; Artin spricht ja auch von einer „*trivialen Verwendung der Klassenkörpertheorie.*" Vielleicht hatte aber Hasse in seiner Antwort darauf hingewiesen, dass der Satz so neu nicht war, und dies war der Grund, weshalb Artin eine

Publikation nicht in Betracht gezogen hat. Wir erläutern dies im folgenden etwas genauer.

11.3.1 Furtwängler, Tschebotareff, Hasse

Artin weist in seinem Brief darauf hin, dass sein Satz, angewandt auf Teilkörper des Körpers der ℓ^n-ten Einheitswurzeln (ℓ Primzahl), „*unmittelbar eine Kummersche Vermutung bestätigt*", und er verweist dazu auf den Hilbertschen Zahlbericht.[10] Dort lesen wir allerdings, unter Berufung auf [Kum50], dass es nicht eine „Vermutung" von Kummer war, sondern eine „Behauptung", von der Hilbert berichtet, dass der Beweis nicht stichhaltig sei.

Diese Behauptung Kummers wurde schließlich im Jahre 1908 von Furtwängler korrekt bewiesen und gleichzeitig verallgemeinert, denn Kummer bezieht sich nur auf den Fall einer Primzahl $\ell > 2$, während Furtwängler allgemeiner den Fall einer Primzahlpotenz ℓ^n behandelt, unter Einschluss des Falles $\ell = 2$. Für je zwei Teilkörper $k \subset K$ des Körpers der ℓ^n-ten Einheitswurzeln beweist also Furtwängler, dass die Klassenzahl h_k ein Teiler der Klassenzahl h_K ist. Das ist aber genau der Satz, den Artin als unmittelbare Folgerung aus seinem allgemeinen Satz angibt. Das von Artin angegebene Gegenbeispiel im Kreiskörper der 20-ten Einheitswurzeln ist genau dasselbe wie bei Furtwängler.

Da Artin in seinem Brief Furtwängler nicht erwähnt, so ist anzunehmen, dass er die Arbeit von Furtwängler damals noch nicht kannte. Von Hasse allerdings wissen wir, dass er mit der Furtwänglerschen Arbeit vertraut war. Denn unter dem Datum des 10. 10. 1925 finden wir in Hasses Tagebuch eine Eintragung mit dem Titel:

> „*Die Idealklassengruppen relativ–Abelscher Körper.* (*Verallgemeinerung eines Satzes von Furtwängler*)."

Die Hassesche Verallgemeinerung bezieht sich darauf, dass er eine beliebige abelsche Erweiterung $K|k$ von Zahlkörpern betrachtet, nicht notwendig Teilkörper eines ℓ^n-ten Einheitswurzelkörpers, und er setzt voraus, dass der Hilbertsche Klassenkörper von k linear disjunkt ist zu K. (Diese Voraussetzung ist bei Teilkörpern von $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell^n]{1})$ stets erfüllt.) Wir sehen also, dass Artin den Satz von Hasse noch einmal verallgemeinert, indem er die Voraussetzung fallen lässt, dass $K|k$ abelsch ist. Wie so oft in der Mathematik, vereinfacht

[10] Die von Artin angegebene Seitenzahl bezieht sich auf die Originalfassung des Zahlberichts; in den „Gesammelten Abhandlungen" Hilberts handelt es sich um die Seite 238.

sich der Beweis, nachdem das Problems in eine allgemeinere Situation eingebettet wurde.

Offenbar hat Hasse nach Erhalt des Artinschen Briefes seine eigene Tagebuch-Aufzeichnung aus dem Jahre 1925 noch einmal durchgesehen, denn am Schluss der Eintragung finden wir den nachträglichen Vermerk: „*Siehe auch Brief von Artin vom 26. 7. 27*“. Wir können daher wohl annehmen, dass Hasse in seiner Antwort an Artin nicht nur auf den Furtwänglerschen Satz hingewiesen hat, sondern auch auf seine eigene, im Tagebuch von 1925 niedergelegte Verallgemeinerung. Dies würde erklären, dass Artin in einem der folgenden Briefe (Nr.14 vom 6. 8. 1927) schreibt: „*Es war ja klar, dass dies schon bekannt sein musste.*“

Allerdings hat uns die Interpretation jener Briefstelle einige Mühe gekostet. Denn die zitierte Äußerung im Brief Nr. 14 steht nicht allein, sondern sie lautet vollständig so:

> „*Ich danke Ihnen auch für die freundliche Übersendung der Arbeit von Tschebotareff. Sie liegt bei. Es war ja klar, dass das schon bekannt sein musste.*“

Demnach sieht es auf den ersten Blick so aus, als ob Artin auf ein Resultat von Tschebotareff Bezug nimmt, welches also schon als bekannt anzusehen war. Wir sind aber zu der Überzeugung gekommen, dass diese Interpretation nicht zutrifft, sondern dass mit „bekannt“ sehr wahrscheinlich das oben erwähnte Resultat von Furtwängler aus dem Jahre 1908 gemeint war, das zunächst durch die Hassesche Tagebucheintragung und dann durch Artins Satz im vorliegenden Brief eine Verallgemeinerung erfahren hatte. Die folgenden Überlegungen haben uns zwingend dahin geführt:

Zunächst war zu klären, um welche Arbeit von Tschebotareff es sich wohl gehandelt hatte. Sicherlich nicht die berühmte Arbeit [Che26] aus den Mathematischen Annalen mit dem Dichtigkeitssatz, denn diese Arbeit war ja Artin bekannt (siehe den Brief Nr. 6 vom 10. 2. 1926), und Artin hätte sie nicht von Hasse auszuleihen brauchen. Nach Durchsicht der Publikationen von Tschebotareff kommt eigentlich nur die Arbeit [Tsc24] infrage.[11] In dieser Arbeit werden Klassenzahlfragen behandelt. Es sei K ein Teilkörper des ℓ^n-ten Einheitswurzelkörpers (ℓ Primzahl), und n der Grad von K. Es sei p ein Primteiler der Klassenzahl h von K und es werde angenommen, dass

[11] Auf diese Arbeit hat uns Tauno Metsänkylä aufmerksam gemacht. Wir verweisen auf seine Arbeit [Met07], in der er das Resultat vom Tschebotareff aus historischer Sicht beschreibt. Wir bedanken uns bei Herrn Metsänkylä, dass er uns Einsicht in sein Manuskript vor der Publikation gegeben hat.

K *minimal* ist mit durch p teilbarer Klassenzahl. Dann zeigt Tschebotareff, dass

$$p \equiv 1 \bmod n \tag{25}$$

ist unter der Voraussetzung, dass p in h nur einfach vorkommt, oder allgemeiner, dass der p-Anteil der Klassengruppe zyklisch ist, oder noch allgemeiner, dass die Klassengruppe eine Untergruppe von Index p besitzt, die unter den Automorphismen von K stabil ist. Dies hat nun zunächst nichts mit dem obigen Satz von Furtwängler zu tun. Aber: Im Beweis greift Tschebotareff in seiner Arbeit auf den Satz von Furtwängler zurück und gibt für diesen eine neue Herleitung.

Wir halten es für wahrscheinlich, dass Hasse in seiner Antwort auch auf diese Arbeit von Tschebotareff hingewiesen hat, in der sich u.a. ein neuer Beweis des o.g. Resultats von Furtwängler findet.

Diese Arbeit [Tsc24] von Tschebotareff war in einer damals neu gegründeten, ziemlich unbekannten Zeitschrift erschienen, nämlich in Band 1 der „Berichte der wissenschaftlichen Forschungsinstitute in Odessa". Es war also nicht verwunderlich, dass Artin diese Arbeit nicht kannte und er sie sich von Hasse zur Einsicht ausleihen musste. Als er sie dann zurücksandte, kommentierte er sie (im Brief Nr. 14) mit den oben zitierten Worten: „*Es war ja klar, dass das schon bekannt sein musste*", womit er eben den zur Diskussion stehenden Furtwänglerschen Satz meinte, der ja bei Tschebotareff noch einmal bewiesen war.

Aber wie hatte Hasse Kenntnis von dieser ziemlich unbekannten Arbeit von Tschebotareff bekommen? Wir haben schon in Abschnitt 6.5, Fußnote 21 berichtet, dass Hasse und Tschebotareff im September 1925 auf der DMV-Tagung in Danzig zusammengetroffen waren.[12] Obwohl Tschebotareff auf dieser Tagung nicht über ein zahlentheoretisches Thema vortrug, so können wir annehmen, dass sich beide über ihre zahlentheoretischen Interessen und Resultate ausgetauscht haben. Insbesondere wird Hasse bei dieser Gelegenheit die Ergebnisse der in Rede stehenden Odessa-Arbeit von Tschebotareff kennengelernt haben. Wir wissen nicht, ob Hasse schon dabei einen Sonderdruck von Tschebotareff erhalten hatte. Jedenfalls hat er am 9. Oktober 1925, also drei Wochen nach seinem Treffen mit Tschebotareff, in sein Tagebuch einen Eintrag geschrieben mit dem Titel:

„*Eine Arbeit von Tschebotareff.*"

[12] Artin war nicht auf dieser Tagung.

Hierin gab er eine präzise und durchsichtige Darstellung des Resultats (25) von Tschebotareff. Das Datum dieses Eintrags liegt einen Tag vor dem Datum des oben genannten Eintrags zum Satz von Furtwängler. Es ist evident, dass beide Einträge zusammengehören und auf Hasses Kontakt mit Tschebotareff auf der Danziger DMV-Tagung zurückgehen.[13]

Vielleicht wurde Tschebotareff schon in Danzig von Hasse dazu angeregt, sein Resultat in geeigneter Form zu verallgemeinern auf beliebige Erweiterungen von Zahlkörpern, nicht notwendig zyklotomische Körper. Jedenfalls hat sich Hasse später lebhaft für die Folgearbeit [Tsc29] interessiert, in welcher Tschebotareff eben diese Verallgemeinerung durchführt, und er hat die Arbeit dann für Crelles Journal angenommen. Das entnehmen wir der Korrespondenz Hasse-Tschebotareff, die ab September 1928 erhalten ist. Tschebotareff selbst sagt in seinen Erinnerungen:

> „*In der nächsten Zeit*[14] *korrespondierte ich viel mit Hasse, und ich bin ihm sehr dankbar für seine grosse Aufmerksamkeit* (*und seine sorgfältige Redaktion*)*, die er meinem Artikel hat zukommen lassen.*“

11.3.2 Publikationen

Wir haben bereits gesagt, dass Artin seinen Satz, den er in diesem Brief aufgestellt hatte, niemals publiziert hat. Später, im Jahre 1931, findet sich eine Publikation des Artinschen Satzes, samt Beweis, in einer Comptes-Rendus-Note von Chevalley [Che31] (Sitzung vom 2. Februar 1931). Fast gleichzeitig finden wir diesen Satz in einer Arbeit von Herbrand [Her32]. Jene Arbeit ist zwar erst 1932 erschienen, aber sie ist datiert im Februar 1931, im selben Monat wie die CR-Note von Chevalley. Herbrand war mit Chevalley eng befreundet aber, wie aus den Publikationen hervorgeht, haben beide diesen Satz unabhängig voneinander gefunden.[15]

Da beide, Chevalley und Herbrand, in jener Zeit engeren Kontakt zu Artin und Hasse hatten, so liegt zunächst die Vermutung nahe, dass zumindest die Motivation zu diesem Satz sich aus Gesprächen mit Artin und/oder Hasse ergeben hatte. Da das jedoch weder bei Herbrand noch bei Chevalley

---

[13] Weitere Einträge am selben Tag spiegeln ebenfalls Eindrücke wider, die Hasse in Danzig erhalten hatte.

[14] D.h. in der Zeit nach der Danziger Tagung

[15] Herbrand verunglückte tödlich bei einer Bergbesteigung in den Alpen am 27. Juli 1931. Die Korrektur der Herbrandschen Arbeit [Her32] wurde von Chevalley durchgeführt.

erwähnt wird, so ist davon auszugehen, dass der Satz (der ja naheliegt) unabhängig von beiden gefunden wurde. Weder Tschebotareff noch Furtwängler werden zitiert. In der Tat scheint auch Herbrand (wie damals Artin) die Furtwänglersche Arbeit [Fur08] aus dem Jahre 1908 nicht zu kennen, denn er schreibt in [Her32]:

> „*On commence par prouver le théorème non encore démontré de Kummer sur la divisibilité du nombre des classes de* $k(\zeta)$ *par celui de ses sous-corps.*“

Übrigens wurde der Artinsche Satz kurz danach noch einmal entdeckt von Otto Grün, wie aus einem Brief Grüns an Hasse vom 6. Dezember 1932 hervorgeht. Hasse machte Grün dann sofort darauf aufmerksam, dass der Satz bekannt war. Das Studium der Teilbarkeit von Klassenzahlen führte Grün schließlich zu seinen bekannten gruppentheoretischen Verlagerungssätzen; vgl. [Roq05a].

12 29.07.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, 29.7.27

Lieber Herr Hasse!

Anlässlich der Hilbertwoche habe ich so viel zu tun, dass ich noch nicht zu einer ausführlichen Beantwortung kommen kann. Ich bitte Sie, sich bis Montag damit zu gedulden. Zunächst meinen besten Glückwunsch zu der schönen neuen Formulierung des R[eziprozitäts]g[esetzes]. Ich finde auch, dass sie die wahre und symmetrischste ist. In ihr stecken viele spezielle Fälle! [1]

Dann die Geschichte mit ℓ^n-primär. Das war ein ganz dummer Rechenfehler von mir, auf den ich jetzt nicht weiter einzugehen brauche. Mit $(1-\zeta)^{\ell^n}$, $\left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\ell}}\right)$, kommt man aber aus. Oder hab ich mich wieder verrechnet? Vielleicht schon mit weniger.[2] Sie müssen entschuldigen, aber ich bin so müde, dass ich nicht genauer darüber nachdenken kann.

Was Sie zur Klassenkörpertheorie sagen hat mich sehr interessiert und ich habe mir vorgenommen, im Sommer mehr darüber nachzudenken. Meine vorläufigen Ansichten sind diese:[3]

1.) Es ist prinzipiell nicht möglich den *Existenzbeweis* für den Fall ℓ *wesentlich* zu vereinfachen, und auch nicht erforderlich, da dieser Teil durchsichtig genug ist.

2.) Es ist ausserordentlich wichtig und unbedingt erforderlich – wahrscheinlich auch möglich – den Umkehrsatz für ℓ einfacher und durchsichtiger zu beweisen. Ohne Geschlechter und ohne ambige Klassen, Einheiten ect.

3.) Die auf den Existenzbeweis folgenden Teile sind so einfach und durchsichtig (bis auf den Geschlechtersatz für ℓ, insbesondere die Takagische sogenannte „Verallgemeinerung") dass fürs erste bei diesen Teilen auf Vereinfachung verzichtet werden kann. Ausnehmen muss ich den Geschlechtersatz für ℓ^n, den man aus der Induktion herauswerfen müsste.

[1] Gemeint ist die Formel $(\frac{\alpha}{\beta}) = (\frac{\beta}{\alpha})$ unter den von Hasse formulierten sehr allgemeinen Bedingungen. Wir haben dies schon in 10.2 diskutiert.

[2] Siehe 11.1.

[3] Siehe 12.1.

4.) Hat man alle Sätze, so ergeben sich hinterher die Geschlechtersätze als „Trivialitäten", wovon ich aus bestimmten Gründen fest überzeugt bin. Ich schreibe Ihnen noch näheres.[4]

5.) Wollen Sie bitte meinen Verzicht auf Vereinfachung bei gewissen Teilen als vorläufig auffassen. Gewiss kann und muss man auch die weiteren Teile vereinfachen. Aber am dringendsten scheinen mir die *Vorbereitungen zum Umkehrsatz* für ℓ und der Geschlechtersatz. Das λ und Λ Ge-ixe *ist „Unfug"* und wird durch $\mathfrak{l}$-adik an diesen Stellen zwar formal, aber nicht wesentlich verbessert. Ebenso an einigen Stellen (bei „Verallgemeinerung" von Geschlecht) das Π und π Ge-ixe.[5]

Gewiss geht es vorläufig nicht anders. Aber ich bin überzeugt dass man es anders machen kann. Sind Sie im grossen Ganzen meiner Meinung?

Mit vielen Grüssen an Ihre Frau Gemahlin und der Bitte, dass sie mein vieles Schreiben entschuldigt

Ihr Artin

---

[4] Siehe den nächsten Brief Nr. 13.

[5] Im Brief Nr. 14 finden wir eine etwas genauere Erklärung, was Artin mit „Ge-ixe" wohl meint.

Kommentare zum Brief Nr. 12:

12.1 Aufbau der Klassenkörpertheorie

Wir wissen nicht genau, was Hasse an Artin zur Klassenkörpertheorie geschrieben hatte. Aus den Artinschen Antworten 1.)–5.) können wir jedoch entnehmen, dass Hasse wahrscheinlich eine Art Plan für einen zukünftigen Aufbau der Klassenkörpertheorie aufgestellt und Artin gebeten hatte, dazu Stellung zu nehmen. Es geht hier also nicht wie bisher um die Reziprozitätsgesetze für das Jacobische oder das Hilbertsche Symbol, sondern um die Grundlegung der Klassenkörpertheorie wie sie Hasse in Teil I seines Berichts skizziert hat, deren Beweise er jedoch durchsichtiger machen möchte. Der bisherige Aufbau der Beweise erschien Hasse nicht adäquat. Wir können annehmen, dass Hasse schon jetzt (1927) der Meinung war, die er später (1930) in Teil II seines Klassenkörperberichts [Has30a] äußerte, nämlich dass die Beweise der Klassenkörpertheorie

> „*in ihrem bisherigen Zustande wenig geeignet sind, das Studium dieser in ihren Resultaten so glatten Theorie verlockend erscheinen zu lassen.*“

Zwar wurde allgemein der Hassesche Bericht (Teil I) als eine willkommene Einführung in die Klassenkörpertheorie angesehen. Aber für Hasse war der gegenwärtige Stand der Beweisanordnung eben noch unbefriedigend, und deshalb hatte er wohl Artin zu einer Stellungnahme aufgefordert. Übrigens geht Artin in einem späteren Brief noch einmal auf das Thema der „abstrakten Klassenkörpertheorie“ ein; siehe 15.2. Erst sehr viel später, nach mannigfachen Beiträgen insbesondere durch Artin, Hasse und Herbrand, erhielt die Klassenkörpertheorie durch Chevalley [Che36] eine Form, die auch im Sinne von Artin und Hasse als „befriedigend“ anzusehen war.[6]

12.1.1 Die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie

Die Artinschen Kommentare beziehen sich auf die Sätze, so wie sie im Klassenkörperbericht Teil I [Has26a] formuliert worden waren.

Der **Existenzsatz** der Klassenkörpertheorie besagt, dass zu jeder Strahlklassengruppe H eines Zahlkörpers k stets ein abelscher Erweiterungskörper

[6]Vgl. dazu die Rezension der Chevalleyschen Arbeit [Che36] durch Hasse im *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik*, Band 62.

K existiert. Der wesentliche Teil ist dabei der Spezialfall, dass H als Strahlklassengruppe den Index $\ell =$ Primzahl besitzt, und dass dabei k die ℓ-ten Einheitswurzeln enthält. Der Beweis in diesem Falle geschieht durch reine Abzählung der möglichen ℓ-Strahlklassengruppen bezw. abelschen ℓ-Erweiterungen und ist, wie Artin sagt, tatsächlich übersichtlich. Auch heute noch wird das i. w. so gemacht.

Allerdings ist dieser Beweis nicht konstruktiv. Hasse hat später eine explizite Konstruktion zumindest zyklischer Klassenkörper gegeben, ausgehend von einer vorgegebenen Klassengruppe. Die Arbeit erschien 1933 in den Mathematischen Annalen [Has33b].

Voraussetzung für den geschilderten Beweis des Existenzsatzes ist jedoch, dass vorher der sog. **Umkehrsatz** für Primzahlgrad ℓ bewiesen ist, nämlich dass *jede* zyklische Erweiterung von k vom Grad ℓ ein Klassenkörper zu einer Strahlklassengruppe der Ordnung ℓ ist. Dieser Beweis ist in der Tat eines der Herzstücke der Klassenkörpertheorie, und konnte zu damaliger Zeit nur durch komplizierte Indexberechnung unter Einschaltung der analytischen Zahlentheorie bewiesen werden. Hier verlangt Artin eine Vereinfachung. Der wesentliche Durchbruch dafür kam erst einige Jahre später durch Chevalley und Herbrand. Hierzu vgl. den Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931, in dem sich Artin begeistert über die Ergebnisse von Chevalley und Herbrand äußert, gleichzeitig aber auch mitteilt, dass er selbst (Artin) daran beteiligt gewesen sei. (Siehe 38.3.)

Wie Artin vorhergesagt hat, ist die **Geschlechtertheorie** heutzutage bei der Grundlegung der Klassenkörpertheorie entbehrlich geworden; sie wird als Folge aus der Klassenkörpertheorie gewonnen. Vgl. auch Artins Bemerkung 6.) in seinem nächsten Brief Nr. 13 vom 2. 8. 1927, wo er sagt, dass alle Geschlechtersätze gruppentheoretisch bewiesen werden können. Statt „gruppentheoretisch“ würden wir heute sagen „kohomologisch“. Denn die in Rede stehenden Geschlechtersätze bedeuten i.w. das Verschwinden der galoisschen 1-Kohomologie der in Rede stehenden Gruppen.

12.1.2 Axiomatik: F. K. Schmidt

Möglicherweise ist die Anfrage Hasses nach Vereinfachungen der Beweise aus dem Bestreben nach einer *Axiomatisierung* der Klassenkörpertheorie entstanden. Jedenfalls deuten die folgenden Indizien aus der Korrespondenz von Hasse mit anderen Korrespondenzpartnern darauf hin, dass er sich in dieser Zeit mit dem Problem eines axiomatischen Aufbaus der Klassenkörpertheorie

beschäftigte.[7]

Am 6. 12. 1926 hatte F. K. Schmidt in einem Brief an Hasse geschrieben:

> *Die von Ihnen erwähnte Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie hatte ich in dieser Allgemeinheit nicht geplant... Sehr schön würde es natürlich sein, wenn man die weiteren Endlichkeitsvoraussetzungen so formulieren könnte, daß durch sie alle Körper charakterisiert würden, bei denen jeder relativ abelsche Oberkörper als Klassenkörper aufgefaßt werden kann; ähnlich etwa wie nach Frl. Noether alle Körper mit gewöhnlicher klassischer Idealtheorie durch Teilerketten- und Vielfachenketten-Postulat gekennzeichnet sind.*

Obwohl wir nicht wissen, welche Ansätze Hasse für eine solche Axiomatik im Auge hatte, so zeigt diese Briefstelle, dass er sich darüber Gedanken machte. Interessant ist, dass sich F. K. Schmidt auf die Arbeit von Emmy Noether „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern“ [Noe26] bezieht; diese Arbeit war zwar gerade erst erschienen, aber der Inhalt scheint den interessierten Mathematikern bereits vorher geläufig gewesen zu sein, denn Noether hatte darüber auf der DMV-Tagung 1924 in Innsbruck vorgetragen. Wenn auch F. K. Schmidt keine Axiomatik der Klassenkörpertheorie geplant hatte, so plante er doch, die Klassenkörpertheorie auf den Fall algebraischer Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper zu übertragen. Dies Programm hat er bis zu einem gewissen Grade auch durchgeführt, und danach haben es Hasse und Witt vervollständigt.[8] Sehr wahrscheinlich war die Übertragung auf Funktionenkörper der Anlass für Hasse, eine Axiomatik der Klassenkörpertheorie anzustreben.

12.1.3 Emmy Noether

Emmy Noether schrieb ein paar Tage später, nämlich am 11. 12. 1926 an Hasse:

> *Wenn man axiomatisch scharf in die Klassenkörpertheorie hineinsehen könnte, wäre das sehr schön! Wo sind die Sachen von*

---

[7] Allerdings war die Axiomatik der Klassenkörpertheorie kein Hauptanliegen Hasses. Die spätere von Artin und Tate [AT68] gegebene Axiomatik hat Hasse nicht mehr recht geschätzt, weil sie auf der Kohomologietheorie fußte, die nach Ansicht von Hasse für die Klassenkörpertheorie einen Verlust bedeutet. Die Algebren, so Hasse, würden doch noch sehr viel mehr arithmetische Informationen liefern als die Faktorensysteme allein.

[8] Vgl. dazu [Roq01].

F. K. Schmidt erschienen ?

Und noch etwas später, in einem Brief vom 3. 1. 1927 entwirft sie die Grundsätze, auf denen nach ihrer Meinung eine Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie aufbauen könnte.[9] Offenbar hatte ihr Hasse mitgeteilt, dass sich F. K. Schmidt mit der Übertragung der Klassenkörpertheorie auf Funktionenkörper beschäftigt, und dass er (Hasse) demgemäß eine Axiomatisierung der Klassenkörpertheorie anstrebe, die beide Fälle, nämlich Zahlkörper und Funktionenkörper, umfasst.

12.1.4 Hasse-Scholz

Zur Zeit des vorliegenden Briefes, also im Juli 1927, war Hasse in Kontakt mit Arnold Scholz und man plante eine gemeinsame Publikation über die Grundlegung der Klassenkörpertheorie. Die Arbeit ist 1928 in der Mathematischen Zeitschrift unter dem Titel „*Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage*“ erschienen [HS28] (eingegangen am 17. 9. 1927). Zwar geht es dort nicht um Axiomatik, sondern nur um eine Feststellung der gegenseitigen Abhängigkeiten der verschiedenen fundamentalen Sätze der Klassenkörpertheorie. Diese Feststellungen lieferten damals zwar keine Vereinfachung für den systematischen Aufbau der Klassenkörpertheorie aber, wie hervorgehoben wird, eine Art „Propädeutik“ der Klassenkörpertheorie.

Es ist denkbar, dass Hasse an Artin geschrieben hatte, dass er im Augenblick mit Scholz über eine gemeinsame Arbeit zur Grundlegung der Klassenkörpertheorie korrespondiere, und dass er ihm auch Einzelheiten darüber mitgeteilt hatte.

Übrigens wird in der Arbeit Hasse-Scholz das Artinsche Reziprozitätsgesetz *nicht* erwähnt, obwohl Hasse ja inzwischen darüber informiert war, wie wir wissen. Das erklärt sich vielleicht daraus, dass die Diskussion zwischen Hasse und Scholz über den Inhalt ihrer gemeinsamen Arbeit bereits seit einiger Zeit im Gange war, mindestens seit April 1927, wie wir aus dem Briefwechsel Hasse-Scholz entnehmen. Und im April 1927 war das Artinsche Reziprozitätsgesetz noch nicht bewiesen. Scholz, ein junger Doktorand von Schur in Berlin (der 1927 noch nicht promoviert war), hatte sich in die Takagische Klassenkörpertheorie anhand des Hasseschen Berichts, Teile I und Ia [Has26a, Has27a] eingearbeitet. Die Arbeit von Hasse-Scholz bezieht sich demnach nur auf den Stand der Theorie *vor* dem Artinschen Reziprozitätsgesetz. Die einzelnen, von Artin im vorliegenden Brief angesprochenen Sätze

[9] Zur Korrespondenz von Emmy Noether mit Hasse siehe [LR06].

der Klassenkörpertheorie finden sich in dieser Arbeit von Hasse-Scholz aufgeführt.

13 02.08.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 2. Aug. 1927

Lieber Herr Hasse! [1]

Ich möchte Ihnen heute meine Ergebnisse zum Hauptidealsatz mitteilen. Wenn es auch noch nicht möglich ist diesen zu beweisen, so glaube ich doch, dass die dabei verwendete Methode viel wichtiger ist als dieser Satz selbst, da sie sich auch noch auf beliebige galois'sche Körper in einem gewissen Sinn anwenden lässt. Da ich mich aber vorläufig noch um den Hauptidealsatz bemühe, will ich beim Fall relativ unverzweigter Körper bleiben. Um aber alles deutlicher werden zu lassen, muss ich ausführlicher sein.[2]

Es sei also k der Grundkörper, K_1 der erste Klassenkörper (im absoluten Sinn), K_2 der Klassenkörper von K_1. $\mathfrak{G}$ sei die galois'sche Gruppe von K_2/k. Dass K_2/k galois'sch ist, sieht man sofort. K_2 ist auch unverzweigt über k. Da K_1 der grösste unverzweigte rel[ativ] Abelsche Körper über k ist, „gehört" K_1 zur „kleinsten" Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit abelscher Faktorgruppe, also zur Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$.

Ich behaupte nun, dass man der Gruppe $\mathfrak{G}$ alles entnehmen kann, was einem an idealtheoretischen Fragen über absolute Idealklassen aus irgend einem Zwischenkörper Ω zwischen k und $\underline{\underline{\underline{K_1}}}$ interessiert.[3]

1.) Einige triviale Dinge: Es gehöre Ω zur Gruppe $\mathfrak{g}$. Da $\Omega < K_1$ ist, muss $\mathfrak{g}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ umfassen. Die galois'sche Gruppe von K_2/Ω ist gerade $\mathfrak{g}$. Es sei Ω_1 der Klassenkörper für Ω. Da Ω_1, zu K_1 adjungiert, einen in bezug auf K_1 abelschen unverzweigten Körper gibt, der also sicher in K_2 liegt, ist Ω_1 erst recht ein Unterkörper von K_2 und zwar der grösste abelsche in bezug auf Ω. Also gehört wie vorhin Ω_1 zur Kommutatorgruppe $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{g}$. Die Gruppe von Ω_1/Ω ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{c}$ in bezug auf $\mathfrak{g}$. Dieser Gruppe kann man also die Struktur der Idealklassen von Ω ablesen. Soweit ist alles trivial.

2.) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und K irgend ein galois'scher Oberkörper von k mit Gruppe $\mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K, so gehört $\mathfrak{P}$

[1] Anscheinend hat Artin diesen Brief geschrieben, ohne Hasses Antwort auf seinen vorangegangenen Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927 (also 3 Tage vorher) abzuwarten.

[2] Zum Hauptidealsatz siehe 13.1.

[3] Artin unterstreicht K_1 mehrfach.

zu einer Substitution σ von $\mathfrak{G}$.[4] Das Primideal $\tau\mathfrak{P}$ gehört zu $\tau\sigma\tau^{-1}$ so dass jedem $\mathfrak{p}$ eine Klasse konjugierter Elemente entspricht. Ich will kurz sagen, $\boxed{\mathfrak{p} \textit{ gehöre zu } \sigma \textit{ in } K/k}$ und meine damit, dass *ein* Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K zu σ gehört. Sowohl die Angabe von K als auch die von k ist wesentlich. Ich muss aber ausdrücklich bemerken: σ ist gleichwertig mit $\tau\sigma\tau^{-1}$. Ferner ist natürlich im allgemeinen *keine* Abbildung auf Idealklassen gegeben. Das ist nur dann der Fall, *wenn* $\mathfrak{G}$ *abelsch ist.* Wenn aber $\mathfrak{G}$ abelsch ist, liegt eine Abbildung auf Idealklassen vor. Ich verabrede, in *diesem Fall* die Idealklassen mit dem gleichen Buchstaben wie die Substitutionen zu bezeichnen. Im abelschen Fall, aber natürlich nur dann, ist auch den übrigen Idealen (die also nicht Primideale zu sein brauchen) eine Substitution = Klasse zugeordnet.

3.) Verweise ich auf die Rechnung in der L-Reihenarbeit zum Beweis von Satz 1, die aber nur bis einschliesslich Seite 94 verfolgt zu werden braucht. Ich benötige die Rechnung sogar nur für den Fall, dass $\mathfrak{g}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit abelscher Faktorgruppe ist, so dass dann auch jede grössere Gruppe Normalteiler ist. Auf Seite 94, vierte Zeile von unten stehen die Elemente angegeben, mit denen die Nebengruppenzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{g}$ durchgeführt werden kann. Da $\mathfrak{g}$ Normalteiler ist, kann sie auch linksseitig angesetzt werden. Aus demselben Grund sind ferner (Ω ist galois'sch in bezug auf k) alle ℓ_i einander gleich, etwa $= \ell$. Dabei ist ℓ der Rel[ativ]grad der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Ω in bezug auf k. Gilt also $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_r$ in Ω, so entnimmt man dem Ganzen dass (wieder weil galoisch) $\mathfrak{q}_i = \tau_i\mathfrak{q}_1$ ist und dass $\mathfrak{G} = \tau_1\bar{\mathfrak{g}} + \tau_2\bar{\mathfrak{g}} + \ldots + \tau_r\bar{\mathfrak{g}}$ die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Nebengruppen nach $\bar{\mathfrak{g}}$ ist, wobei $\bar{\mathfrak{g}}$ die durch *Hinzunahme von* σ erweiterte Gruppe $\mathfrak{g}$ ist. Der Grad ℓ ist die kleinste Potenz von σ die in $\mathfrak{g}$ liegt. Der Rechnung entnimmt man noch, dass $\mathfrak{q}_i$ in K/Ω zu $\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}$ gehört. Es kommt bei den τ_i wirklich nur auf Erzeugende der Nebengruppe an. Denn wird τ_i ersetzt durch $\tau_i\gamma = \gamma'\tau_i$ wo γ also auch γ' zu $\mathfrak{g}$ gehört, so ändert sich in K/Ω nicht die Substitutionsklasse sondern nur das Element $\tau_i\sigma\tau_i^{-1}$. Die änderung $\tau_i \to \tau_i\sigma^\nu$ aber bewirkt überhaupt nichts.

Nun zu den Anwendungen.

4.) Dieselben Bezeichnungen wie in 1.) und vorher:

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Grundkörpers, gehörig zu σ. In welchen

[4] Artin setzt stillschweigend voraus, dass $\mathfrak{p}$ in K unverzweigt ist. Und σ ist der Frobenius-Automorphismus von $\mathfrak{P}$.

Idealklassen liegen seine Faktoren $\mathfrak{q}_i$ im Zwischenkörper Ω?

$\mathfrak{q}_i$ gehört zu $\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}$ in K/Ω. Von Idealklassen kann nur bei den Substitutionen von Ω_1/Ω geredet werden, also bei den Nebengruppen von $\mathfrak{g}$ nach der Kommutatorgruppe $\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{q}_i$ in K/Ω zu $\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}$ gehört, so gehört es in Ω_1/Ω zur Nebengruppe $\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}\cdot\mathfrak{c}$.

$\mathfrak{q}_i$ liegt also in der Idealklasse $\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}\cdot\mathfrak{c}$ in Ω.

In welcher Idealklasse von Ω liegt $\mathfrak{p}$ selbst? Nach dem Rezipr[ozitäts]gesetz kann einfach multipliziert werden:

$$\mathfrak{p} \text{ liegt in } \Omega \text{ in der Idealklasse } \left(\prod_{i=1}^{r}\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}\right)\cdot\mathfrak{c}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{p}$ in Ω Hauptideal, wenn $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{c}$ liegt ($\mathfrak{c}$ ist das Einheitselement der Faktorgruppe $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$).

5.) In k sei eine Idealklasse gegeben. Als Substitution geschrieben ist sie Element der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$. Es handle sich etwa um $\sigma\cdot\mathfrak{C}$. Irgend ein Primideal $\mathfrak{p}$ dieser Klasse gehört in K_2/k zu einem Element von $\sigma\mathfrak{C}$, wir können annehmen σ (zu jeder Substitution gehören ja nach Tschebotareff oder mir – siehe L-Reihen – wirklich Primideale[5]). In Ω liegt $\mathfrak{p}$ in $\left(\prod_{i=1}^{r}\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}\right)\cdot\mathfrak{c}$. Man sieht auch leicht rein gruppentheoretisch, dass das Resultat unabhängig von der Wahl des Elementes aus $\sigma\mathfrak{C}$ ist. Dies ist ja idealtheoretisch evident, da Ideale die in k äquivalent sind, es auch in Ω sind. Wir haben also folgende Vorschrift:

Um zu sehen in welche Klasse $\sigma\mathfrak{C}$ aus k in Ω fällt, bestimme man die kleinste Zahl ℓ für die σ^ℓ in $\mathfrak{g}$ liegt. Sei $\bar{\mathfrak{g}}$ die mit σ erweiterte Gruppe $\mathfrak{g}$:

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \sigma\mathfrak{g} + \sigma^2\mathfrak{g} + \ldots + \sigma^{\ell-1}\mathfrak{g}\ .$$

Man zerlege $\mathfrak{G}$ nach $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$\mathfrak{G} = \tau_1\bar{\mathfrak{g}} + \tau_2\bar{\mathfrak{g}} + \ldots + \tau_r\bar{\mathfrak{g}}\,.$$

Dann wird in Ω aus der Klasse $\sigma\mathfrak{C}$ die Klasse $\left(\prod_{i=1}^{r}\tau_i\sigma^\ell\tau_i^{-1}\right)\cdot\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{g}$ ist.

[5] Artin bezieht sich hier auf den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz [Che26], für den er selbst in seiner L-Reihenarbeit [Art23b] auch einen Beweis gegeben hatte – zwar zunächst vorbehaltlich der Gültigkeit seines Reziprozitätsgesetzes, das aber inzwischen gesichert ist [Art27a].

6.) K_1 gehört zu $\mathfrak{C}$, die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{C}$ ist 1, da $\mathfrak{C}$ abelsch ist (K_2 Klassenkörper von K_1).

Sei $\mathfrak{G} = \sum_{\nu_1=0}^{f_1-1} \sum_{\nu_2=0}^{f_2-1} \cdots \sum_{\nu_s=0}^{f_s-1} \sigma_1^{\nu_1}\sigma_2^{\nu_2}\ldots\sigma_s^{\nu_s} \cdot \mathfrak{C}$, also $\sigma_i\mathfrak{C}$ die erzeugenden Basisklassen der Idealklassen in k. Es genügt zu zeigen, dass jede Basisklasse, also etwa $\sigma_s\mathfrak{C}$ in K_1 die Hauptklasse wird. Nach unserer Vorschrift ist $\ell = f_s$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{C}$, $\bar{\mathfrak{g}} = \sum_{\nu_s=0}^{f_s-1} \sigma_s^{\nu_s}\mathfrak{C}$, so dass die τ_i alle Elemente der Form $\sigma_1^{\nu_1}\sigma_2^{\nu_2}\ldots\sigma_{s-1}^{v_{s-1}}$ sind. Also ist folgendes zu zeigen:

$$\boxed{\prod_{\substack{0\le\nu_1\le f_1-1\\ \cdots\\ 0\le\nu_{s-1}\le f_{s-1}-1}} \sigma_1^{\nu_1}\sigma_2^{\nu_2}\ldots\sigma_{s-1}^{\nu_{s-1}}\sigma_s^{f_s}\sigma_{s-1}^{-\nu_{s-1}}\ldots\sigma_1^{-\nu_1} = 1}$$

Dies ist eine rein gruppentheoretische Formulierung. Den Satz hat man für alle Gruppen $\mathfrak{G}$ mit abelscher Kommutatorgruppe zu beweisen.

Dies ist nun eine sehr schwierige Angelegenheit. Ich möchte noch folgendes erwähnen:

1.) Ist er richtig für alle Gruppen $\mathfrak{G}$ der Ordnungen p, p^2, p^3, p^4, p^5, wo p eine Primzahl ist.

2.) Wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ cyklisch ist.

3.) Wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ aus zwei Basisklassen je der Ordnungen ℓ besteht (Fall Furtwängler).[6] Also sind die bisher bekannten Fälle tatsächlich rein gruppentheoretisch zu beweisen.

4.) Wenn $\mathfrak{C}$ im Zentrum liegt, d.h. *wenn jede Klasse des Klassenkörpers ambig ist,* ist der Satz auch richtig. *Dass das vorkommen kann,* hat Furtwängler *gezeigt.* Dass der Hauptidealsatz in diesem Fall auch mit meiner Methode zu erledigen geht ist deshalb bemerkenswert, weil man hier vom Standpunkt der Geschlechtertheorie aus überhaupt keine Chancen hat, den Satz zu beweisen.

5.) Wenn nur das Einheitselement von $\mathfrak{C}$ zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört, es also im Klassenkörper nur eine ambige Klasse gibt, ist der Satz ja idealtheoretisch evident und auch *gruppentheoretisch richtig.*

[6] Gemeint ist die Arbeit [Fur16] von Furtwängler aus dem Jahre 1916. Hierbei ist $\ell \geq 2$ eine Primzahl.

6.) Alle Geschlechtersätze lassen sich mit meiner Methode gruppentheoretisch beweisen. Daher meine Bemerkung im vorigen Brief.[7]

Sie überlegen sich wohl selbst leicht, wieso ich aus der Zugehörigkeit zum Zentrum auf ambige Klasse schliesse. Ist nämlich c eine Klasse von K_1, und wendet man die Substitution σ aus G an auf c, so erhält man die Klasse $\sigma c \sigma^{-1}$.

Wie Sie sehen lassen sich *alle idealtheoretischen* Fragen gruppentheoretisch aussprechen. Wenn man wie ich die Vermutung hegt, dass beim Übereinanderbauen zweier Klassenkörper jede denkbare Gruppe mit abelscher Kommutatorgruppe vorkommen kann, so ist die vorige Bedingung *notwendig* für die *allgemeine* Richtigkeit des Hauptid[eal]s[atzes].

Da nun der Beweis so schwer ist (man muss immer *ganz scharf* ausnützen dass $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe ist – es genügt nicht etwa abelscher Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe (das zeigt sich z.B. wenn schon ganz $\mathfrak{G}$ abelsch ist)) hatte ich zuerst vermutet der Satz müsste falsch sein. Nun, nach den vielen Teilresultaten glaube ich ihn wieder.

Wenn Sie sich mit dem Satz beschäftigen, empfehle ich die scharfen gruppentheoretischen Hilfsmittel der Dissertation von Herrn Schreier, in der als spezielle Fälle gerade Gruppen unseres Typus behandelt werden, heranzuziehen. Siehe Hamburger Abhandl. Band IV, Seite 321 über die Erweiterung von Gruppen insbesondere Satz 1 und Satz 2 auf S. 325 und 326. Mit ihrer Hilfe haben wir die meisten der erwähnten Resultate erlangt.

Ich bin natürlich gerne zu Aufklärungen bereit, wenn irgend etwas in der Handhabung der Methode unklar sein sollte. Wie gefällt sie Ihnen?

Haben Sie die Korrekturen erhalten? Leider wimmeln sie von Druckfehlern.[8] Gestern bin ich auch dazu gekommen, Ihre Beweise zum Normenrestsymbol ausführlich zu lesen. Ich finde sie sehr schön und kunstvoll.[9]

Mit Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin und herzlichen Grüssen

Ihr Artin

---

[7] Siehe Punkt 4.) im Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927.

[8] Artin meint die Korrekturbogen zu seiner Arbeit zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz [Art27a], die er Hasse zu senden versprochen hatte.

[9] Artin bezieht sich auf die Hassesche Arbeit [Has27e] über das Normsymbol, basierend auf dem Artinschen Reziprozitätsgesetz. Möglicherweise handelte es sich schon um die Korrekturen zu dieser Arbeit, die Hasse an Artin geschickt hatte. Vgl. 10.2.

Kommentare zum Brief Nr.13:

13.1 Zum Hauptidealsatz

Der Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie besagt, dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eines Zahlkörpers k im Hilbertschen Klassenkörper K von k zu einem Hauptideal wird; in der damals geläufigen Sprache hieß das: „$\mathfrak{a}$ kapituliert in K“.

Bereits vor zwei Wochen, als Artin an Hasse über seinen Erfolg beim Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes berichtete, hatte er sofort daran gedacht, dieses Gesetz zum Beweis des von Hilbert vermuteten Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie anzuwenden; vgl. Brief Nr. 8 vom 17. 7. 1927. Damals hatte Artin es noch für möglich gehalten, dass der Hauptidealsatz im allgemeinen vielleicht falsch sein könne, weil er nämlich mit seinen Beweisansätzen nicht ohne weiteres durchgekommen war. In jedem Falle war aber Artin schon damals davon überzeugt, dass es wenn überhaupt dann einen rein gruppentheoretischen Beweis geben müsse, in dem die Zahlentheorie keine Rolle mehr spielt. Denn aufgrund seines allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, so schwebte es ihm vor, könne dem Hauptidealsatz eine gruppentheoretische Formulierung gegeben werden.

13.1.1 Verlagerung

In dem vorliegenden Brief wird dies nun von Artin präzisiert. Heute formulieren wir den entsprechenden gruppentheoretischen Satz so:

> *Die Verlagerung einer zweistufig metabelschen endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in ihre Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ verschwindet.*

Das ist der Inhalt der eingerahmten Formel in Artins Brief.

Damals gab es jedoch den gruppentheoretischen Begriff der Verlagerung noch nicht. Dieser Begriff entwickelte sich erst danach, und zwar gerade im Zuge der Überlegungen zum Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie. Der Name „Verlagerung“ wurde von Hasse in seinem Klassenkörperbericht Teil II eingeführt, und er wurde dann ins Englische mit „transfer“ übersetzt.

Aber: Die Rechnungen für die Verlagerungsabbildung finden sich bereits in einer alten Arbeit aus dem Jahre 1902 von I. Schur [Sch02], allerdings ohne dass Schur dafür einen besonderen Namen einführt.[10] Deshalb ist Schur

[10] Schur spricht nicht von einem „Homomorphismus“, sondern er sagt, dass es sich „*gewissermaassen um eine Darstellung*“ handelt.

als der Entdecker der Verlagerungsabbildung zu nennen. Es scheint, dass weder Artin noch Hasse diese Arbeit von Schur gekannt haben, denn sie wird in der Korrespondenz nicht erwähnt, und auch nicht in der Publikation [Art29]. Auch Schreier hat die Schursche Arbeit damals wohl nicht gekannt, denn sonst hätte er Artin sicherlich darauf aufmerksam gemacht. Wir können also davon ausgehen, dass die Schurschen Überlegungen damals noch nicht allgemein bei den Gruppentheoretikern präsent waren. Die Verlagerungsabbildung ist demnach durch Artin und Schreier selbständig wiederentdeckt worden. Übrigens ist die Homomorphie-Eigenschaft der Verlagerung im gruppentheoretischen Kontext erst durch Hasse in seinem Klassenkörperbericht II [Has30a] formuliert und bewiesen worden. In diesem Brief und in der Artinschen Arbeit [Art29] wird sie im Kontext der arithmetischen Anwendungen als selbstverständlich behandelt.

Erst 1934 erwähnt Iyanaga in [Iya34], dass sich die Verlagerungsabbildung schon bei I. Schur findet. Da jene Arbeit von Iyanaga unter dem Einfluss von Artin verfasst worden war, so ist anzunehmen, dass Artin inzwischen, also vor 1934, auf die Schursche Arbeit aufmerksam gemacht worden war.

Die Artinschen Rechnungen in diesem Brief ergeben eine gruppentheoretische Deutung der Einbettung der Idealklassengruppe eines Zahlkörpers in die Idealklassengruppe seines absoluten Klassenkörpers. Vermöge des Artinschen Reziprozitätsgesetzes spiegelt sich diese Einbettung wider in der Verlagerungsabbildung einer zweistufig metabelschen endlichen Gruppe in ihre Kommutatorgruppe. Das ist der Inhalt der linken Seite in der eingerahmten Formel des Briefes. Die Formel selbst behauptet, dass diese Verlagerungsabbildung verschwindet, und das wiederum bedeutet, dass jedes Ideal des Grundkörpers in seinem absoluten Klassenkörper zu einem Hauptideal wird, also „kapituliert“, wie man damals sagte.

13.1.2 Beweisversuche

Artin erklärt in seinem Brief auch, dass er für eine Reihe von Gruppen die Richtigkeit des gruppentheoretischen Hauptidealsatzes nachgeprüft habe. Es ist erstaunlich, dass er innerhalb von zwei Wochen alle in dem Brief aufgezählten Gruppentypen diskutiert hat. Wie er angibt, hat er dabei die Hilfe von Otto Schreier in Anspruch nehmen können. Artin und Schreier haben stets eng zusammengearbeitet. Die gruppentheoretische Dissertation von Schreier (Wien 1923 bei Furtwängler), auf die Artin in seinem Brief verweist, enthält in ihrem Teil II [Sch26a] eine Reihe von Rechnungen über zweistufig metabelsche Gruppen, die für den vorliegenden Zweck relevant sind.

Die Exposition, wie sie Artin hier im Brief an Hasse gibt, ist fast identisch mit der später (1929) publizierten Arbeit in den Hamburger Abhandlungen mit dem Titel: „*Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz*“ [Art29]. Diese Arbeit ist datiert im November 1928. Demnach hat Artin sein Manuskript von August 1927, dem Datum des vorliegenden Briefes, bis zum November 1928 liegen gelassen, ohne es zu publizieren. Der Grund dafür mag sein, dass Artin weiterhin intensiv versuchte, seinen gruppentheoretischen Hauptidealsatz zu beweisen. In der Tat schreibt Artin zwei Wochen später (am 19. 8. 1927 im Brief Nr. 15) ziemlich verzweifelt: „*es ist nur der letzte, auf den ersten Blick am einfachsten scheinende Schritt zu tun, und man kommt nicht vom Fleck*“.

13.1.3 Furtwänglers Beweis

Furtwängler in Wien kannte die Artinschen Überlegungen, die in dem vorliegenden Brief beschrieben werden; wir wissen allerdings nicht, ob ihm Artin das geschrieben hatte oder ob er durch seinen Kontakt mit seinem früheren Schüler Schreier davon gehört hatte. Auf dieser Basis ist es ihm dann 1928 gelungen, den Beweis durchzuführen. Wie von Artin konzipiert, handelt es sich um einen rein gruppentheoretischen Beweis, ohne explizite Bezugnahme auf den klassenkörpertheoretischen Ursprung. Erst nachdem Furtwängler der Beweis gelungen war, hat auch Artin seine Überlegungen zur Publikation gegeben. Beide Arbeiten, sowohl die von Artin [Art29] als auch die von Furtwängler [Fur29], erschienen 1929 im selben Band der Hamburger Abhandlungen. Sie waren aber beide schon im November 1928 fertiggestellt worden. Wir entnehmen das dem Brief Nr. 19 vom 4. November 1928, in welchem Artin schreibt, dass er Hasse die „Korrektur der Arbeit von Furtwängler“ schicken werde.[11]

Hasse hat die Bedeutung des Furtwänglerschen Beweises sofort erkannt. Wenig später, am 26. November 1928 schreibt er in einem Brief an Mordell u.a. folgendes:

> „*... Vielleicht ist es nicht ohne Interesse für Sie, zu erfahren, dass ganz kürzlich Furtwängler, auf dem Boden der Artinschen Arbeit, den Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie* (*vgl. meinen Bericht, S. 45*) *vollständig bewiesen hat, durch Reduktion auf eine Frage in der Theorie der endlichen Gruppen.*“

[11] Gleichzeitig ersehen wir aus jenem Brief, dass in dem ursprünglichen Manuskript von Furtwängler ein Fehler steckte, der von Artin und Schreier berichtigt worden war.

Hier bezieht sich Hasse auf seinen Klassenkörperbericht, Teil I aus dem Jahre 1926, wo er den Hauptidealsatz als eines der ungelösten Probleme aus der Klassenkörpertheorie aufgeführt hatte.

Hasse hat den Furtwänglerschen Beweis in seinen Klassenkörperbericht II aufgenommen. Allerdings scheint das nicht von vorneherein klar gewesen zu sein. In dem Brief Nr. 20 vom 14. 11. 1928 drängt Artin darauf, dass Hasse doch den Beweis von Furtwängler in seinen Bericht aufnehmen möge – wenn aus Platzgründen nicht anders möglich dann doch zumindest für den Fall von drei „Basisklassen", d.h. wenn die in Rede stehende Gruppe drei Erzeugende modulo der Kommutatorgruppe besitzt. Dieser Fall, so schreibt Artin, zeige ja die Dinge vollständig und sei kurz genug. Offenbar hatte Hasse zunächst gezögert, wahrscheinlich weil der Furtwänglersche Beweis ihm zu undurchsichtig und außerdem zu lang war. (Der Beweis in [Fur29] umfasst 22 Seiten.) Der Artinsche Vorschlag in jenem Brief hat Hasse dann offenbar doch bewogen, den Furtwänglerschen Beweis zu übernehmen, allerdings nur soweit, „*dass das Gerüst des Beweises klar zutage tritt*", wie es in [Has30a] heißt. Insbesondere nur für drei Basisklassen.

Interessant sind dabei die gruppentheoretischen Vorbemerkungen, in denen Hasse rein gruppentheoretisch nachweist, dass die Verlagerungsabbildung ein Homomorphismus ist. Das findet sich bei Furtwängler nicht, weil dort die in Rede stehende Homomorphie-Eigenschaft aus der Zahlentheorie gefolgert wird: die durch Einbettung gegebene Abbildung der Idealklassengruppe eines Zahlkörpers in die Idealklassengruppe eines Erweiterungskörpers ist trivialerweise ein Homomorphismus. Demnach hat also erst Hasse in seinen Vorbemerkungen die Grundeigenschaften der Verlagerungsabbildung rein gruppentheoretisch begründet – ohne allerdings zu wissen, dass das Schur schon 1902 gemacht hatte, in der bereits oben zitierten Arbeit [Sch02].

Bei der Darstellung des Furtwänglerschen Beweises hat sich Hasse bemüht, statt der Matrizen bei Furtwängler die Sichtweise der modernen Algebra zu benutzen, d.h. von Operatorgruppen und Darstellungen zu sprechen. Er schreibt dazu, dass er sich u.a. die Arbeit von Emmy Noether [Noe29] über „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie" zum Vorbild genommen habe. Allerdings kann Hasse dies nicht vollständig durchhalten; er muss schließlich doch explizit mit Matrizen und Determinanten rechnen, wie Furtwängler. Im Nachhinein können wir sehen, woran das gelegen hat: Er hat nämlich wie Furtwängler mit einer Basis der Faktorkommutatorgruppe operiert, und solche Basen führen zu Matrizendarstellungen. Es ist an dieser Stelle, wo sich Hasse, dem Ratschlag von Artin folgend, darauf beschränkt,

nur noch den Fall von drei Basisklassen im einzelnen auszuführen, da dann nur dreireihige Matrizen erscheinen. Danach sagt dann Hasse:

> „*Der durch vollständige Induktion zu erbringende allgemeine Beweis erfordert zwar noch recht ausgedehnte Überlegungen und Rechnungen. Jedoch sind die Schwierigkeiten rein kombinatorischer Natur. ... Es wäre zu wünschen, dass ... ein von komplizierten formalen Rechnungen freier Beweis dieses Satzes gegeben würde.*“

Dieses Desideratum wurde in der Folge in der Tat realisiert.

13.1.4 Die weitere Entwicklung

Nicht nur Hasse war der Meinung, dass der Furtwänglersche Beweis vielleicht zu umständlich und nicht so durchsichtig war, wie man es sich wünschte. So berichtet z.Bsp. Olga Taussky in ihren Erinnerungen [Tau81] über ein Göttinger Seminar (1931) bei Emmy Noether:

> „*Once the proof of Furtwängler of the Hauptidealsatz came up and Emmy Noether repeated what almost everybody said, namely that it was an unattractive proof.*“

Sie berichtet weiter, dass sie daraufhin leidenschaftlich die Sache ihres akademischen Lehrers Furtwängler verteidigt hatte. Das war natürlich nicht notwendig, denn Furtwängler war ein weithin anerkannter Mathematiker, dessen Resultate wesentliche Beiträge zur Zahlentheorie lieferten; insbesondere sein Beweis des Hauptidealsatzes wurde von der mathematischen Fachwelt als eine große Leistung anerkannt und gewürdigt. Nichtsdestoweniger war und ist das Streben nach Vereinfachung eine wichtige Motivation für den Fortschritt in den mathematischen Wissenschaften (und nicht nur dort). Hasse benutzte dafür oft den Terminus „Durchsichtigkeit“, den ein mathematischer Beweis haben solle; das helfe, den Sachverhalt besser zu verstehen. So war es auch im Falle des Furtwänglerschen Beweises. Man begann, nach Vereinfachungen und „durchsichtigen“ Beweisen zu suchen.

Die erste Vereinfachung stammte von **Magnus.**[12] Seine Arbeit über den Hauptidealsatz erschien 1934 im Crelleschen Journal [Mag34]. In dem von Bernhard Neumann verfassten Jahrbuch-Referat heißt es dazu:

[12] Wilhelm Magnus war ein Schüler von Max Dehn in Frankfurt. Er wurde 1931 promoviert, mit einer gruppentheoretischen Dissertation über freie Gruppen mit einer Relation.

„*Den Satz beweist Verf. nun in wesentlich vereinfachter Form unter Heranziehung der von O. Schreier* [Sch26a] *und K. Reidemeister* [Rei26] *geschaffenen Methoden für die Untersuchung von Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind.*“

Im selben Jahr erschien dann die Arbeit [Iya34] von **Iyanaga** in den Hamburger Abhandlungen. In dem von Arnold Scholz angefertigten Jahrbuch-Referat heißt es:

„*Nachdem vor kurzem Magnus eine Beweisvereinfachung für den Furtwänglerschen Hauptidealsatz geliefert hat, folgt hier nun eine weitere Vereinfachung, die den Beweis vor allem auch durchsichtiger gestaltet...*“

Im Vorwort sagt Iyanaga, dass der größte Teil der Arbeit zusammen mit Artin entstanden sei; demnach ist anzunehmen, dass die wesentlichen Ideen zur Vereinfachung von Artin stammen. Wesentlich für den neuen Beweis ist der Satz von Artin über die Existenz einer Zerfällungsgruppe: Ist U abelscher Normalteiler der Gruppe G, so lässt sich eine Obergruppe $\overline{G}$ von G finden, die wiederum einen abelschen Normalteiler $\overline{U}$ enthält derart, dass $G\overline{U} = \overline{G}$ und $G \cap \overline{U} = U$, und dass $\overline{G}$ über $\overline{U}$ zerfällt. Dadurch kann das Problem auf den Fall einer zerfallenden Gruppenerweiterung zurückgeführt werden, und in diesem Fall werden die Verlagerungsformeln sehr einfach.

Als kleine Nebenbemerkung sei angefügt, dass Emmy Noether daraufhin versucht hatte, den Beweis von Iyanaga noch weiter zu vereinfachen. Am 31. Oktober 1934 schrieb sie nämlich von Bryn Mawr aus an Hasse:

...Noch eine etwas prinzipiellere Sache habe ich mir anläßlich eines Vortrags beim New Yorker Meeting überlegt: Man kann vom Artin-Iyanaga-Beweis des Hauptidealsatzes den ganzen §3 streichen, mit Ausnahme von 3 Zeilen auf der letzten Seite ...

Allerdings stellte sich heraus, dass sie dabei einem Fehlschluss erlegen war, worauf sie Hasse in seiner Antwort aufmerksam machte.

Der Beweis von Iyanaga-Artin wurde von Zassenhaus in sein 1937 erschienenes Lehrbuch der Gruppentheorie [Zas37] aufgenommen und dadurch weithin bekannt. Der Beweis ist gültig nicht nur für endliche Gruppen, sondern die Endlichkeitsvoraussetzung kann etwas abgeschwächt werden: die

Faktorkommutatorgruppe soll endlich sein, und die Kommutatorgruppe jedenfalls endlich viele Erzeugende besitzen. Witt [Wit36] zeigte, dass diese Voraussetzungen nicht entbehrt werden können.

Eine weitere Vereinfachung schließlich gab **Witt** auf dem internationalen Mathematikerkongress in Amsterdam 1954 [Wit54]. Witt linearisiert das Problem und wandelt die Verlagerungsabbildung in eine gleichwertige additive Homomorphie um. Diese „Linearisierung“ der Verlagerung gab den Anstoß, dass die gruppentheoretische Verlagerungsabbildung schließlich in den Rahmen der homologischen Algebra eingefügt wurde; vgl. Cartan-Eilenberg [CE56].

13.1.5 Verallgemeinerung

Zu Beginn seines Briefes sagt Artin, dass sich seine Methode noch auf „beliebige galoissche Körper in einem gewissen Sinn“ anwenden lasse. Was meint Artin damit?

Vielleicht hatte Artin damals schon die Verallgemeinerung im Auge, die später (1931) von Iyanaga [Iya31] gegeben wurde. Iyanaga spricht von einem „allgemeinen Hauptidealsatz“. Es handelt sich dabei um die folgende Situation:

Statt des Hilbertschen Klassenkörpers betrachtet man den Strahlklassenkörper $K|k$ zu gegebenem Führer $\mathfrak{f}$. Gesucht ist ein Modul $\mathfrak{F}$ in K derart, dass alle Ideale des Grundkörpers k in den Strahl von K modulo $\mathfrak{F}$ fallen. Die Konstruktion von $\mathfrak{F}$ geschieht mit Hilfe der Geschlechter, und deshalb wird $\mathfrak{F}$ der „Geschlechtermodul“ genannt. Es wird gezeigt, dass der zu $\mathfrak{F}$ gehörige Klassenkörper $K^*|K$ zweistufig metabelsch über k ist, und dass gruppentheoretisch dieselbe Situation vorliegt wie beim gewöhnlichen Hauptidealsatz. Demnach kann der Beweis von Furtwängler angewandt werden und liefert das Ergebnis. (Die späteren Beweisvereinfachungen, die wir im vorangegangenen Abschnitt 13.1.4 beschrieben haben, waren 1931 noch nicht bekannt.)

Eine andere Untersuchungsrichtung behandelt das sogenannte „Kapitulationsproblem“. Nämlich: Gegeben ein Teilkörper des Hilbertschen Klassenkörpers; welche Ideale des Grundkörpers werden in diesem Teilkörper zu Hauptidealen? Dies wird in den Briefen Nr. 20-22 behandelt; wir verweisen dazu auch auf unsere dortigen Kommentare.

14 06.08.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 6. August 1927

Lieber Herr Hasse!

Sie haben mir anscheinend den Ausdruck λ-Ge-ixe übel vermerkt. Ich wollte damit weiss Gott nichts gegen die $\mathfrak{l}$-adik sagen von der ich sehr wohl weiss, dass sie für die Behandlung der Rez[iprozitäts]ges[etze] unentbehrlich ist. Mich ärgerte nur das λ und Λ-Geixe bei Takagi an der Stelle der Normenreste, die dort auftretenden langwierigen und doch langweiligen Rechnungen mit Potenzsummen, das „Klettern“ auf höhere Exponenten und all die „schönen“ Dinge. Ich glaube, da sind Sie doch auch meiner Meinung. Dasselbe tritt dann bei den Geschlechtern nochmals auf. Was das λ-Ge-ixe bei der Ranguntersuchung betrifft, so beachten Sie bitte: Es ist nur ein „klein-λ“-Ge-ixe und nicht allzulang; bei weitem nicht so hässlich wie bei den Normenresten. Was dann die relativen Grundeinheiten betrifft[1], so kommt mein ganz besonderer Zorn auf sie daher, weil ich mich im Kolleg zweimal verheddert habe und erst nach dem dritten Mal alles einwandfrei erledigte. Mein besonderer Fluch gilt dem Symbol $[\xi]$, dessen besondere Tücken sich – natürlich – im Fall $\ell = 2$ offenbaren. Wissen Sie wenigstens in diesem Fall ein einfaches Hilfsmittel? Man muss da schrecklich „klettern“.

Ich habe übrigens gestern und heute andauernd λ-ge-ixt. Ohne Erfolg. Ihre Bemerkungen zu $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ im Fall ℓ^n hatten mich gereizt.[2] Mir war natürlich klar, dass die „gewöhnliche Definition“ bei $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ versagt, in der Arbeit[3] bin ich deshalb nicht darauf eingegangen, weil dort (stillschweigend – denn bisher handhabte man $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ meistens so) $\mathfrak{p}$ fremd zu m vorausgesetzt wurde. In meinem ersten oder zweiten Brief an Sie habe ich aber, glaube ich, den Fall $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ gestreift, hatte mir aber bis jetzt noch nicht überlegt, welche Zahl zu nehmen ist. Ihr Resultat und vor allem die schöne Formel für $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ ist doch neu? Vielleicht ist es Ihnen aber doch nützlich, wenn auch vielleicht nicht neu, wenn ich Ihnen meine „Erfahrungen“ über $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ schreibe. Ich habe nur den Fall ℓ^2 versucht. Denn wenn man da durchkommt, gelingt es sicher auch

[1] Siehe 14.1.

[2] Siehe 14.2.

[3] Gemeint ist Artins Arbeit [Art27a] mit dem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes.

allgemein. Ich schreibe wie Sie: $\zeta_1 = \ell$-te E[inheits]w[urzel]; $\lambda_1 = 1 - \zeta_1$.

Der von Ihnen angegebene Modul $\ell^2\lambda_1$ für ℓ^2 primär ist es nun in dem Sinn: Wenn $\mu \equiv x^{\ell^2} \pmod{\ell^2\lambda_1}$, so ist μ sicher ℓ^2 primär. Sie schreiben nun, der Modul $\ell^2\lambda_1$ sei für $\ell \neq 2$ auch erforderlich. Ich kann dem nur den folgenden Sinn zuschreiben: Für keinen kleineren Modul folgt aus der angegebenen Kongruenz dass *allgemein* μ ℓ^2-primär ist. Ich glaube aber nicht, dass diese Kongruenz (bez. die zugehörige für den Primteiler $\mathfrak{l}$ – ich bleibe der Einfachheit halber bei λ_1) erforderlich ist.

Denn wenn $\mu \equiv x^{\ell^2} \pmod{\ell^2\lambda_1}$, so ist doch insbesondere μ sicher $\underline{\underline{\ell}}$-hyperprimär.[4] Also zerfällt $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell]{\mu})$, so dass durch diese Forderung sicher nicht der Fall erfasst wird, wo $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ unzerlegt bleibt. In der Überzeugung, dass dieser Fall zuerst untersucht werden muss, nahm ich ihn mir vor. Dann muss es eine Zahl x aus k geben, so dass $\mu \equiv x^\ell \pmod{\ell\lambda_1}$ ist und eine Zahl y aus $k(\sqrt[\ell]{\mu})$, so dass $\sqrt[\ell]{\mu} \equiv y^\ell \pmod{\ell\lambda_1}$ ist.[5] Das x kann man natürlich zu 1 normieren. Nicht aber y; denn das ist ja dem Körper $k(\sqrt[\ell]{\mu})$ entnommen. Deshalb kommt man – wenigstens ich – nicht auf den Modul $\ell^2\lambda_1$ beim heruntersteigen, ich habe das herunterklettern überhaupt nicht fertig gebracht. Nach mehreren vergeblichen Versuchen liess ich es liegen.

Dann versuchte ich die „richtige Zahl" zu finden und begann mit den ganz schlechten Ansätzen (wie ich hinterher merkte)

$$\frac{\sqrt[\ell^2]{\mu} - 1}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[\ell^2]{\mu} - 1}{\lambda_2} \,.$$

Ging alles nicht recht. Dann dachte ich etwas respektvoller darüber nach und entdeckte, dass hier ein „alter Bekannter" von mir vorlag. Ich dachte immer an den „schärfsten Fall" dass $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ unzerlegt bleibt. Dann ist ja der Restklassenkörper $\bmod \mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ ein relativ cyklischer Körper vom Grad ℓ^2 über dem Restklassenkörper in k; und gerade mit cyklischen Erweiterungen vom Grad ℓ^2 eines Körpers der Charakteristik ℓ (hier gibt es kein Wurzelziehen) hatten Herr Schreier und ich uns in der Note „Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper" im vorigen Heft des Parteiblättchens, also Bd 5 Seite 225 beschäftigt. Ich möchte bemerken, dass der in Frage kommende Teil unabhängig ist von der Theorie der reellen Körper, also unabhängig gelesen werden kann. Wir hatten recht lange gerechnet, bevor wir auf alles gekommen sind und gesehen, wie schwer die Sache ist.

[4] Artin unterstreicht ℓ mehrmals. Dadurch will er darauf hinweisen, dass dann der Divisor $\mathfrak{l}$ zwar in $k(\sqrt[\ell]{\mu})$, aber nicht notwendig in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ zerfällt.

[5] Das Zerlegungsgesetz der Primideale in einer zyklischen Erweiterung $k(\sqrt[\ell]{\mu})$ konnte Artin als bekannt voraussetzen.

Wir haben dort *alle* cyklischen Erweiterungen dieser Art aufgestellt und die Gleichungen bestimmt, denen die Zahlen genügen. Damit kennt man - angewendet auf unseren Fall - natürlich noch nicht die gesuchte Zahl. Man weiss von ihr nur, dass sie einer Kongruenz vom ℓ^2-ten Grad (diese finden Sie in der Arbeit wenn auch nicht explizit) genügen muss denn, wenn $\mathfrak{l}$ unzerlegt bleibt, muss die Zahl eine Körpererzeugende $\bmod \mathfrak{l}$ sein. Ich konnte bisher damit noch nichts anfangen. Ich bin aber überzeugt, dass es mit $\mathfrak{l}$-adik gehen muss. Ich möchte noch erwähnen, dass die in der Arbeit angegebenen Kongruenzen nachweislich die *einfachsten* sind. Zum Beispiel kann man ξ^{p-1} (wenn ich mich der Bezeichnung in der Arbeit bediene) *nicht entbehren* oder durch eine niedrigere Potenz ersetzen. Ich betone das nur, um Ihnen die Rechenarbeit zu ersparen die wir hinter uns haben und die vergeblich war. Denn *wir* haben – natürlich – auch mit den kleinsten Potenzen von ξ begonnen und haben uns überzeugt, dass es nur mit der *höchsten* geht. Übrigens ist die Zahl $\frac{\sqrt[\ell]{\mu}-1}{\lambda_1} = \xi$ gerade das ξ, denn sie genügt der Kongruenz:[6]

$$\xi^\ell + \frac{\ell}{\lambda_1^{\ell-1}}\xi \equiv \frac{\mu-1}{\lambda_1^\ell} \pmod{\mathfrak{l}} .$$

Da nun $\frac{\ell}{\lambda_1^{\ell-1}} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{l}}$[7] ist, genügt ξ der Kongruenz $\xi^\ell - \xi \equiv \frac{\mu-1}{\lambda_1^\ell}$ $\pmod{\mathfrak{l}}$, so dass das in unserer Arbeit vorkommende a den Wert $\frac{\mu-1}{\lambda_1^\ell}$ hat. Die von Ihnen gesuchte Zahl, nennen wir sie η, genügt der Kongruenz:

$$\eta^\ell - \eta \equiv \varphi(\xi) \pmod{\mathfrak{l}} ,$$

wobei $\varphi(\xi)$ ein Polynom $(\ell-1)$-ten Grades in $\xi = \frac{\sqrt[\ell]{\mu}-1}{\lambda_1}$ ist, nämlich eine passende Lösung $\ell - 1$-ten Grades der Differenzengleichung:

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) \equiv \left(x + \frac{\mu-1}{\lambda_1^\ell}\right)^{\ell-1} - x^{\ell-1} \pmod{\mathfrak{l}}$$

Vielleicht erleichtert es das Auffinden von η, wenn man beachtet, dass eine *passende erzeugende* Substitution der Galoisgruppe die Wirkung hat:

$$\sigma(\xi) \equiv \xi + 1 ; \quad \sigma(\eta) \equiv \eta + \xi^{\ell-1} ; \quad (\sigma^\ell(\eta) \equiv \eta - 1) .$$

[6]Im folgenden rechnet Artin doch modulo $\mathfrak{l}$, dem Primteiler von ℓ im zugrundeliegenden Körper k – obwohl er oben angekündigt hat, dass er „der Einfachheit halber“ mit λ_1 rechnen will.

[7]Artin schreibt in der vorstehenden Formel irrtümlich λ_1^ℓ statt $\lambda_1^{\ell-1}$ im Nenner.

Die Aufgabe ist nun, η auszudrücken durch $\sqrt[\ell^2]{\mu}$. Dazu genügt es, dass η bei der Anwendung von σ die angegebene Substitution erfährt.

Hoffentlich können Sie etwas damit anfangen!

Mit herzlichen Grüßen

Ihr Artin

Ich danke Ihnen auch für die freundliche Übersendung der Arbeit von Tschebotareff. Sie liegt bei. Es war ja klar, dass das schon bekannt sein musste.[8] Haben Sie eigentlich die Korrekturen bekommen? [9] Ich frage nicht, weil ich Sie etwa mit Korrekturarbeiten belasten will, sondern weil ich Ihnen sonst noch ein Exemplar senden müsste. Bitte fassen Sie es aber nicht so auf, dass Sie sich bemühen. Ich bekomme demnächst die zweiten Korrekturen. Wollen Sie ein Exemplar?

---

[8]Hierzu siehe 11.3.1.

[9]Gemeint sind die Korrekturen zu Artins Arbeit über das allgemeine Reziprozitätsgesetz. Artin hatte im Brief Nr. 8 vom 17. 7. 1927 angekündigt, dass Hasse die Korrekturen bekommen wird.

Kommentare zum Brief Nr.14:

Mit dem Ausdruck „Ge-ixe" bezieht sich Artin auf seinen Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1027. Dort spricht er allerdings von einem Π und π Ge-ixe; er benutzt also hier andere Bezeichnungen.

Mit λ-Ge-ixe meint Artin offenbar das Rechnen mit λ-adischen Potenzreihenentwicklungen in Körpern, die die ℓ-ten Einheitswurzeln enthalten. Dabei ist $\lambda = 1 - \zeta$, unter ζ eine primitive ℓ-te Einheitswurzel verstanden. (Das ist die u.a. bei Hasse und Artin gängige Bezeichnungsweise.) Im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln wird dann entsprechend $\Lambda = 1 - \zeta_{\ell^n}$ gesetzt. Offenbar ärgert sich Artin über die bei Takagi vorkommenden umständlichen Rechnungen mit λ und Λ, beteuert aber, dass er grundsätzlich nicht gegen die $\mathfrak{l}$-adik von Hensel eingestellt ist. In der Tat hatte Artin die Vorteile des Rechnens mit ℓ-adischen Potenzreihen von Hasse gelernt; vgl. Brief Nr. 4, in dem Artin schreibt: „*Ich mache langsam Fortschritte in ℓ-adik. Nun logarithmiere ich schon!*"

14.1 Relative Grundeinheiten

Wenn Artin von „relativen Grundeinheiten" spricht, so bezieht er sich auf den Zahlbericht von Hilbert [Hil97] §55. Dort wurde dieser Begriff für zyklische Zahlkörper-Erweiterungen $K|k$ (von ungeradem Primzahlgrad) eingeführt. Auch das Symbol $[\xi]$ findet sich ebenfalls schon bei Hilbert und bezeichnet diejenigen Einheiten des Erweiterungskörpers K, deren ℓ-te Potenzen im Grundkörper k liegen. Die relativen Grundeinheiten dienten Hilbert dazu, für die Kohomologie der Einheitengruppe $H^1(G, E) \neq 1$ nachzuweisen (das wiederum war entscheidend für seinen Beweis von Satz 94 über die Kapitulation von Idealklassen). Dies findet sich auch in der Takagischen Klassenkörpertheorie, im Zusammenhang mit dem sog. „Einheitenhauptgeschlechtssatz". Die dazugehörigen Rechnungen werden bei Hasse in seinem Klassenkörperbericht Ia [Has27a] §12 wiedergegeben, dort zwar schon in etwas vereinfachter Form, aber ein Blick auf diese umfangreichen Rechnungen (Artins „Ge-ixe") zeigt, dass der Zorn Artins durchaus berechtigt war. Man kann sich dabei in der Tat verheddern, insbesondere wenn man seine Vorlesungen ohne schriftliches Manuskript hält.[10]

Später, im Jahre 1931, liefert Artin einen besonders einfachen Beweis für die Existenz relativer Grundeinheiten [Art32b], allerdings handelt es sich

[10] Dies wissen wir von Vorlesungen Artins in späteren Jahren, wir wissen allerdings nicht, ob Artin schon 1927 seine Vorlesungen ohne Manuskript zu halten pflegte.

dann nicht mehr um Grundeinheiten im Sinne von Hilbert, sondern Artin benutzt die von Herbrand gegebene Definition, welche für beliebige relativ-galoissche Erweiterungen $K|k$ gilt und darauf hinausläuft die Galois-Struktur der Einheitengruppe von K zu beschreiben, insbesondere deren Kohomologie. Im Fall absolut-galoisscher Erweiterungen geht diese Definition und der Existenzbeweis auf Minkowski [Min00] zurück; heute wird dazu Herbrand [Her30], [Her31b] zitiert, und in der Tat sagt Artin in [Art32b], dass er nur einen einfacheren Beweis für den Satz von Herbrand liefern will. Artins Motivation für diese Arbeit [Art32b] ergab sich daraus, dass alle Rechnungen in der Klassenkörpertheorie, die auf der Existenz von relativen Grundeinheiten beruhten, durch die Arbeiten von Chevalley und Herbrand ganz außerordentlich vereinfacht worden waren, nämlich mit Hilfe des heute sogenannten „Herbrandschen Lemmas“. Siehe dazu Artins Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931, in dem er sagt:

> „*Begeistert bin ich über die neuen ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie, die von Herbrand und Chevalley stammen. Man braucht jetzt so gut wie gar keine schlimmen Rechnungen mehr.*“

Die Begeisterung Artins in jenem Brief wird uns verständlich, wenn wir seinen Zorn über „diese schlimmen Rechnungen“, wie Artin ihn in dem vorliegenden Brief zum Ausdruck bringt, in Betracht ziehen. Vgl. auch 39.1.

14.2 Die schöne Formel und Artin-Schreier

Es geht um das Potenzrestsymbol für einen Primzahlpotenz-Exponenten $m = \ell^n$. Der Grundkörper k enthalte die m-ten Einheitswurzeln. Das Primideal $\mathfrak{p}$ sei im Körper $K = k(\sqrt[m]{\mu})$ unverzweigt, d.h. μ sei „primär“ für $\mathfrak{p}$. Dann ist nach Hasse das erweiterte Potenzrestsymbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ durch die folgende Formel definiert (siehe 10.2):

$$(26) \qquad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{\sigma_{\mathfrak{p}} \sqrt[m]{\mu}}{\sqrt[m]{\mu}} \; ;$$

wobei $\sigma_{\mathfrak{p}}$ den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Frobenius-Automorphismus bedeutet. Wenn $\mathfrak{p}$ nicht in m aufgeht, dann kann $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ auch durch die klassische Eulersche Kongruenz charakterisiert werden (siehe (1), Seite 42):

$$(27) \qquad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \mu^{\frac{|\mathfrak{p}|-1}{m}} \bmod \mathfrak{p}\,.$$

Dies ist die Formel, die meist in den gängigen Darstellungen der klassischen Reziprozitätgesetze angegeben wird. Sie versagt jedoch wenn $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von ℓ ist. Die Primteiler von ℓ im Körper k werden bei Artin und Hasse stets mit $\mathfrak{l}$ bezeichnet. Im Zusammenhang mit dem zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz sucht man nun nach einer Kongruenz modulo einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{l}$, die das Potenzrestsymbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ in entsprechender Weise kennzeichnet – immer unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[m]{\mu})$ unverzweigt, also μ primär für $\mathfrak{l}$ ist.

Für den Fall $n = 1$ (also $m = \ell$) hat Hasse in [Has27e][11] eine solche Formel gefunden, nämlich

$$(28) \qquad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) \equiv 1 - \lambda_1 S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\mu - 1}{\ell\lambda_1}\right) \bmod \mathfrak{l}\lambda_1$$

mit folgenden Bezeichnungen:[12]

ζ_1 eine ℓ-te Einheitswurzel,

$\lambda_1 \; = 1 - \zeta_1\,,$

$S_{\mathfrak{l}}$ die absolute Spur im Restklassenkörper modulo $\mathfrak{l}$.

Es wird dabei vorausgesetzt, dass $\mu \equiv 1 \bmod \ell\lambda_1$, was keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Denn μ ist genau dann primär für $m = \ell$, wenn μ *bis auf einen ℓ-Potenzfaktor* der Kongruenz $\mu \equiv 1 \bmod \ell\lambda_1$ genügt.

Artin sagt in seinem Brief, dass er auch schon über eine solche Formel nachgedacht habe, dass er sich aber noch nicht überlegt habe, „*welche Zahl zu nehmen ist*“. Diese „Zahl“ ist nun nach Hasse $\xi = \frac{\mu-1}{\ell\lambda_1}$. Artin bezeichnet die Formel (28) als „*schöne*“ Formel und fragt, ob sie neu ist.[13] In Artins

[11] Wir haben über diese Arbeit schon in 10.2 berichtet.

[12] Dies sind Artins Bezeichnungen in seinem Brief. In der zitierten Crelle-Arbeit von Hasse wird ζ_0, λ_0, e_0 statt ζ_1, λ_1, e_1 geschrieben. – Übrigens findet sich in der entsprechenden Formel in jener Crelle-Arbeit von Hasse ein Druckfehler, indem als Kongruenzmodul $\mathfrak{l}^{e_0-1}$ statt $\mathfrak{l}^{e_0+1} = \mathfrak{l}\lambda_0$ (Hassesche Bezeichnungen) angegeben wird. In Hasses Klassenkörperbericht Teil II ist dieser Druckfehler korrigiert.

[13] Wahrscheinlich war sie neu.

Brief wird die Formel nicht explizit hingeschrieben, er bezieht sich auf Hasses vorangegangenen Brief, den wir nicht kennen. Hasse hatte diese Formel offenbar in seinem Brief mitgeteilt; möglicherweise hatte Hasse sogar schon das Manuskript seiner Arbeit [Has27e] fertiggestellt und Artin eine Kopie oder die Korrekturfahnen dazu geschickt.

Wie Hasse in der genannten Crelle-Arbeit zeigt, kann man der Formel (28) auch die Form

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right) = \zeta_1^{\,S_{\mathfrak{l}}(\frac{\mu-1}{\ell\lambda_1})} \tag{29}$$

geben. Vielleicht war es diese, die Artin als „schöne Formel" bezeichnete?

Die Formeln (28), (29) gelten, wie gesagt, für einen Primzahlexponenten $m = \ell$. Artin diskutiert in seinem Brief nun einen Ansatz für $m = \ell^2$. Wir können annehmen, dass Hasse angefragt hatte, ob Artin eine Idee hätte, wie man die Formeln für Primzahlpotenz-Exponenten $m = \ell^n$ mit beliebigem n verallgemeinern könnte, und dass dies die Antwort von Artin ist.

In seiner Diskussion setzt Artin voraus, nicht nur dass $\mathfrak{l}$ unverzweigt ist in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$, sondern auch, dass $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ *unzerlegt* ist; das bedeutet, dass der Trägheitsgrad den maximalen Wert ℓ^2 annimmt und also die Frobenius-Substitution $\sigma_{\mathfrak{l}}$ die Ordnung ℓ^2 besitzt. Artin bezeichnet dies als den „schärfsten Fall."

Es ist nun außerordentlich bemerkenswert und von großer Tragweite, dass Artin ein Resultat ins Spiel bringt, das er vor kurzem zusammen mit Otto Schreier in einem völlig anderen Zusammenhang erarbeitet hatte, nämlich die heute so genannte Artin-Schreier-Erzeugung von zyklischen Körpern ℓ-ten Grades der Charakteristik ℓ. Dieses Resultat ist enthalten in der Arbeit „*Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper*" [AS27], die soeben im, wie Artin sagt, „Parteiblättchen" erschienen war, also in den Hamburger Abhandlungen. Artin bemerkt, dass die Zahl

$$\xi = \frac{\sqrt[\ell]{\mu} - 1}{\lambda_1}$$

aus dem Körper $k(\sqrt[\ell]{\mu})$ in dessen Restklassenkörper gerade eine Artin-Schreier-Erzeugende liefert und gibt die zugehörige Kongruenz mod $\mathfrak{l}$ explizit an, nämlich

$$\xi^\ell - \xi \equiv \frac{\mu - 1}{\lambda_1^\ell} \bmod \mathfrak{l}\,.$$

Diese Kongruenz findet sich übrigens auch in der o. g. Arbeit von Hasse [Has27e], ohne allerdings dass Hasse den Zusammenhang mit der Artin-Schreier-Theorie erwähnte, die er damals wahrscheinlich noch nicht gekannt hatte.

Der Artinsche Ansatz im vorliegenden Brief geht nun davon aus, dass er in der erwähnten Arbeit mit Schreier auch zyklische Körpererweiterungen von Grad ℓ^2 in Charakteristik ℓ behandelt hatte. In der Tat hatten Artin und Schreier gezeigt, dass in Charakteristik ℓ jede zyklische Erweiterung vom Grad ℓ in eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ^2 eingebettet werden kann, und sie hatten die Bedingung für die zugehörigen Artin-Schreier-Erzeugenden η in der zweiten Stufe angegeben. Die Arbeit von Artin-Schreier war zum Zeitpunkt der Abfassung des vorliegenden Briefes noch so frisch, dass Artin bei Hasse nicht deren Kenntnis voraussetzen konnte; deshalb erläutert er in seinem Brief den Sachverhalt genauer.

Artin spricht von „der von Ihnen gesuchten Zahl". Offenbar suchte Hasse eine Zahl η, die im Falle $m = \ell^2$ denselben Dienst leistet wie das obige ξ im Falle $m = \ell$. Artin gibt nun einen Ansatz für die Zahl η, indem er die Kongruenzeigenschaften von η modulo $\mathfrak{l}$ beschreibt, gestützt auf die Ergebnisse der Artin-Schreier-Arbeit. Aber er gibt keine explizite Form für ein solches η an, er hofft nur, dass Hasse mit diesen Eigenschaften „*etwas anfangen kann*".

Als Nebenbemerkung erfahren wir, dass Artin und Schreier viel gerechnet hatten, um zu ihrem in der Publikation so einfach erscheinenden und einleuchtenden Ergebnis für zyklische Körper in Primzahl-Charakteristik zu kommen. Artin spricht von der „*Rechenarbeit, die wir hinter uns haben, und die vergeblich war*".

14.2.1 Die weitere Entwicklung

Wie es scheint, wurde der Ansatz von Artin zunächst nicht weiter verfolgt, weder von Hasse noch von Artin selbst. Ein Grund wird wohl gewesen sein, dass man die Erzeugung der zyklischen Körper vom ℓ-Potenzgrad ℓ^n in Charakteristik ℓ für $n \geq 2$ noch nicht im Detail beherrschte. Einige Jahre später gab Albert (der mit Hasse in Briefwechsel stand) einen Mechanismus an, wie solche Körper zu erzeugen sind. Er schrieb am 6. 2. 1934:[14]

[14] Uns ist unbekannt, ob Albert seine Untersuchungen auf Anregung von Hasse durchgeführt hatte, oder unabhängig von Hasse. Denn es sind nur die Briefe von Albert an Hasse erhalten, nicht die von Hasse an Albert.

„*Dear Professor Hasse, I am happy to be able to write to you of my success in generalizing the Artin-Schreier results...*“.

Albert publizierte seine Resultate 1934 im Bulletin of the AMS [Alb34]. Wiederum einige Zeit später entwickelte H. L. Schmid im Rahmen seiner (von Hasse angeregten) Untersuchungen zum Reziprozitätsgesetz in algebraischen Funktionenkörpern eine Variante der Albertschen Konstruktion, die zwar substantiell dasselbe lieferte jedoch formale Vereinfachungen beinhaltete [Sch36]. Diese Konstruktion von H. L. Schmid wurde dann von Witt als die heute sogenannte „Wittsche Vektorrechnung“ erkannt [Wit37]. Die Resultate von H. L. Schmid und Witt wurden 1936 in der Göttinger Arbeitsgemeinschaft für Algebra und Zahlentheorie vorgetragen; sie erschienen 1937 im Crelleschen Journal.

Als Hasse in jener Arbeitsgemeinschaft die Wittsche Vektorrechnung kennenlernte, da griff er sie sofort auf, um damit das Problem, das sich aus dem hier vorliegenden Artinschen Brief ergab und bis dahin ungelöst war, in Angriff zu nehmen. Im selben Heft des Crelleschen Journals, in dem auch die Arbeit über Wittsche Vektoren erschien, publizierte Hasse seine Lösung, indem er die Formel (29) für einen beliebigen Primzahlpotenz-Exponenten ℓ^n statt nur ℓ verallgemeinerte [Has37]. Die Verallgemeinerung sieht äußerlich ganz ähnlich aus wie (29), jedoch ist statt der Zahl $\xi = \frac{\mu-1}{\ell\lambda_1}$ ein Witt-Vektor ξ zu nehmen, dessen erste n Komponenten den Restklassenkörper erzeugen, und der nach Witt als ganze ℓ-adische Zahl über dem Restklassenkörper von k zu interpretieren ist. Dazu muss Hasse zunächst die Potenzierung von $\mathfrak{l}$-adischen Einseinheiten mit solchen Wittschen Vektoren in geeigneter Weise definieren. In diesem Sinne hat sich also die Ahnung von Artin bewahrheitet, wenn er schreibt: „*Ich bin aber überzeugt, dass es mit $\mathfrak{l}$-adik gehen muss.*“

In derselben Arbeit [Has37] gelingt es Hasse auch, das von Artin angeschnittene Problem der Beschreibung „primärer“ Zahlen μ für $\mathfrak{l}$ zu lösen. Artin schreibt ja richtig, dass die von Hasse angegebene Kongruenz $\mu \equiv x^{\ell^2}$ $(\mathrm{mod}\ \ell^2\lambda_1)$ zwar hinreichend aber nicht notwendig sei dafür, dass es sich bei μ um eine ℓ^2-primäre Zahl (für $\mathfrak{l}$) handelt, d. h. dass $\mathfrak{l}$ in $k(\sqrt[\ell^2]{\mu})$ unverzweigt ist. Das Problem der Bestimmung ℓ^n-primärer Zahlen für $n \geq 2$ wird von Artin wiederum in einem der folgenden Briefe angeschnitten (nämlich in Nr. 16 vom 4. 9. 1927) jedoch erst mit der Hasseschen Arbeit [Has37] gelöst. Demgemäß trägt jene Arbeit auch den Titel: „Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p.“

Im Falle $n = 1$ war das Resultat wohlbekannt, denn Wittsche Vektoren der Länge 1 sind nichts anderes als Zahlen des Körpers. Hasse verweist

in Teil Ia seines Klassenkörperberichts auf Heckes Buch über algebraische Zahlen [Hec23].

Wir sehen, dass diese hochinteressanten Entwicklungen ihren Ursprung in dem vorliegenden Brief von Artin hatten, der auf den Zusammenhang mit den sogenannten Artin-Schreier-Erzeugenden in Primzahlcharakteristik hinwies. Später, im Jahre 1949, nahm I. R. Shafarevich[15] [Sha51] die Fragestellung wieder auf und führte die Hasseschen Untersuchungen zu einem gewissen Abschluss. Die Arbeit erschien 1951 auf Russisch in den Doklady Akad. Nauk. SSSR; eine ausführliche Darstellung auf Deutsch gab Hasse im selben Jahr [Has51a]. Ebenfalls im selben Jahr 1951 gab Martin Kneser [Kne51] eine vereinfachte Darstellung; vgl. dazu auch das zugehörige Zentralblatt-Referat von Witt. Die Arbeit von Shafarevich wurde 1956 von Emma Lehmer ins Englische übersetzt [Sha56].

[15] Dies ist die heute gebräuchliche englische Transkription. Hasse benutzt in [Has51a] die Transkription „Šafarevič“. In der deutschen Literatur wurde früher auch „Schafarewitsch“ geschrieben.

15 19.08.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 19.8.27

Lieber Herr Hasse!

Ich habe so lange nicht geantwortet[1], weil ich mich mit den vorliegenden Problemen herumgeschlagen habe. Zu meinem grössten Ärger habe ich nichts, aber auch rein gar nichts herausgebracht. Nichts zum Hauptidealsatz, nichts zu ℓ^n-primär, nichts zu $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$. Ich glaube, man muss die Sachen erst einmal ein wenig abliegen lassen. Was den Hauptidealsatz betrifft, so scheinen mir zunächst tiefere Untersuchungen über Gruppen mit Abelscher Faktorgruppe erforderlich. Die Schreierschen Methoden schaffen es noch nicht; jedenfalls bin ich zu dumm dazu. Sie können sich doch sicher lebhaft in meine ärgerliche Lage hineindenken. Da hat man diesen Satz sozusagen schon vor der Nase, es ist nur der letzte, auf den ersten Blick am einfachsten scheinende Schritt zu tun, und man kommt nicht vom Fleck.[2]

Was ich zum Klassenkörperturm meine? Den halte ich nicht für ein gruppentheoretisches Problem. Ich glaube nämlich, dass rein gruppentheoretisch „beliebig" hohe (unendliche) Türme denkbar sind. Ich meine das so. Sei $\mathfrak{g}_1$ die Gruppe des ersten Klassenkörpers $\mathfrak{g}_2$ die des zweiten ect. Dann muss $\mathfrak{g}_{i-1}$ die Faktorgruppe der „$(i-1)$-ten Kommutatorgruppe" von $\mathfrak{g}_i$ sein. Ich glaube nun, dass es unendliche Folgen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ dieser Eigenschaft gibt. Erst die spezielle arithmetische Natur des Grundkörpers wird hier den Ausschlag geben. Nach wie vor glaube ich, dass der beste Beweisansatz die Verschärfung der Minkowskischen Abschätzung ist. Wie man an diese herankommen soll ist eine Frage für sich.[3]

Die in ihrem vorletzten Brief bemerkten Schwierigkeiten zur Klassenkörpertheorie sind mir natürlich klar. Hier muss es eben die neue Idee schaffen. Schliesslich sah man doch zunächst auch nicht, wie man die Beweise für die R[eziprozitäts]g[esetze] vereinfachen sollte. Zur abstrakten Klassenkör-

[1]Seit dem letzten Brief vom 6. August sind 13 Tage vergangen.

[2]In Retrospektive erkennen wir, dass Artins Gefühl durchaus berechtigt war; er hatte die Lösung des Hauptidealproblems wirklich schon „vor der Nase". Wenige Monate später fand Furtwängler mit den Artin-Schreierschen Methoden den Beweis. Wir haben das schon in 13.1.3 berichtet. Andererseits war der Furtwänglersche Beweis keineswegs einfach oder auf der Hand liegend; der Beweis des Hauptidealsatzes war wirklich „schwer", wie Artin ja schon im Brief Nr. 13 vom 2. August festgestellt hatte.

[3]Siehe 15.1.

pertheorie möchte ich noch einiges bemerken, was Sie sicher interessieren wird.[4]

Zu irgend einem Galoisfeld adjungiere man die Variable t und nenne den so erhaltenen Körper R. Also der Körper meiner Dissertation. Natürlich gilt hier die ganze Klassenkörpertheorie aber mit Modifikationen: Erstens gibt es wieder unendliche Primteiler, die durch „Vorzeichen" der höchsten Potenz von t hereinkommen wenn wir quadratische Körper nehmen. Analog gibt es aber auch kubische ect. Was aber besonders bemerkenswert ist, ist die Tatsache, dass es bereits einen unendlich hohen Klassenkörper über R gibt (unverzweigt). Man muss nämlich, will man alle abelschen Erweiterungen haben, als Klassenteilungen ausser „Vorzeichen" und Restklassen, noch den Grad in betracht ziehen. Sie sehen ja, welches die unendliche unverzweigte Erweiterung ist: Die des zu Grunde gelegten Galoisfeldes. Z.B. ist eine quadratische Erweiterung des Galoisfeldes ein Klassenkörper über R, der zum Strahl der Funktionen geraden Grades gehört. Analog beliebig viele Beispiele, bei denen etwa der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von t eine Rolle spielt. Sie sehen, was auf der einen Seite sich vereinfacht, ℓ ist Körperelement, wird durch die Tatsache der Charakteristik ℓ wieder kompliziert.

Vielen Dank für Ihre Sendung.[5] Ich habe mir vorgenommen, sie genau durchzulesen. Mit Ihrer Formalisierung bin ich voll und ganz einverstanden und finde sie keineswegs scheusslich. Darf ich mir noch eine Frage dazu erlauben. So viel ich sehe ist Ihr Beweis des „Zerlegungssatzes" nur gültig, wenn k die Einheitswurzel enthält. Oder habe ich etwas übersehen? Es wäre doch schade wenn wegen der einen Seite die dadurch eingespart wird diese Lücke bliebe. Wollen Sie sie nicht ausfüllen?

Kann man jetzt eigentlich das Eisensteinsche R[eziprozitäts]g[esetz] rasch beweisen?

Was Ihre Ansätze zu ℓ^n-primär betrifft, so glaube ich dass Sie da durchkommen werden. Ich habe leider nichts herausgebracht. Besonders schön wäre es, wenn man zu einer vernünftigen Definition von $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ gelangen könnte.

Auch bezüglich der σ-Formulierung für $\left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)_K = \left(\frac{NA}{\mathfrak{a}}\right)_k$ bin ich ratlos. Aber Sie brauchen doch dieses Übertragungsgesetz gar nicht und ich kann mir nicht denken dass es eine andere Bedeutung als die eines Hilfssatzes beim Beweis des R[eziprozitäts]g[esetzes] hatte. Überdies waren die Beweise dafür

[4]Siehe 15.2.
[5]Siehe 15.3.

nicht gerade schön.

Nun möchte ich gerne meinerseits ein paar Fragen stellen. Wie Sie wissen ist es eines meiner Ziele, an die nicht-abelschen Körper heranzukommen. Aus diesem Grunde habe ich mich auch hauptsächlich mit der Arithmetik hyperkomplexer Zahlen beschäftigt, da ich ziemlich überzeugt bin, dass man diese braucht.

Beim rel[ativ] abelschen Körper liegt nun folgender Sachverhalt vor: Die einem Primideal $\mathfrak{p}$ zugeordnete Substitution heisse nach Ihrem Vorschlag $\sigma_{\mathfrak{p}}$. Sie ist das Analogon zum Legendre-Symbol. Das Analogon zum Jacobi-Symbol ist $\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{p}_1}\sigma_{\mathfrak{p}_2}\ldots\sigma_{\mathfrak{p}_r}$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_r$ ist. Dann ist also $\sigma_{\mathfrak{a}b} = \sigma_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{b}}$ und $\sigma_{\mathfrak{a}}$ hängt nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ ab.

Anders bei nicht abelschen Körpern. Nach dem R[eziprozitäts]g[esetz] bei abelschen Körpern ist zu vermuten, dass die Substitutionen gerade wieder das Analogon zur Klassenteilung liefern. Hier ist aber einem Primideal eine Klasse $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ von Substitutionen der galois'schen Gruppe zugeordnet.

Was ist hier das Jacobische Symbol? Man beachte, dass im Abelschen Fall $\sum \frac{\sigma_{\mathfrak{a}}}{N\mathfrak{a}^s}$ eine L-Reihe liefert, wenn $\sigma_{\mathfrak{a}}$ ersetzt wird durch einen Charakter der Klassengruppe. Man wird ähnliches im nicht Abelschen Fall erwarten. Dort aber *kennt* man nicht die Reihenentwicklung von $L(s,\chi)$ sondern nur die von $\log L(s,\chi)$. Es ist

$$\log L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}^n} \frac{\chi(\mathfrak{p}^n)}{n\,N\mathfrak{p}^{ns}}\ ,$$

wenn nämlich $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}$ die Klasse der n-ten Potenzen der Substitutionen von $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ ist. Da sich nun Charaktere wie die Klassen zusammensetzen liegt der Ansatz:

$$e^{\sum\limits_{\mathfrak{p}^n} \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}}{n\,N\mathfrak{p}^{ns}}} = \sum \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}^{(1)}}{N\mathfrak{a}^s}$$

nahe. Dies gibt zunächst, wenn die Primidealpotenzen die zu verschiedenen Primidealen links gehören getrennt werden:

$$\prod_{\mathfrak{p}} e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}}{n\,N\mathfrak{p}^{ns}}} = \sum \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}^{(1)}}{N\mathfrak{a}^s}$$

woraus:

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}^{(1)} = \mathcal{C}^{(1)}_{\mathfrak{p}_1^{\nu_1}}\,\mathcal{C}^{(1)}_{\mathfrak{p}_2^{\nu_2}}\cdots\mathcal{C}^{(1)}_{\mathfrak{p}_r^{\nu_r}}$$

folgt, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ die Primidealpotenzzerlegung von $\mathfrak{a}$ ist. Dabei ist noch $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}^{(1)}$ zu bestimmen. Man hat für jedes $\mathfrak{p}$:

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}}{n\, N\mathfrak{p}^{ns}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}^{(1)}}{N\mathfrak{p}^{ns}}$$

zu setzen, woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^{(1)} &= \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \;; \\
\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2}^{(1)} &= \frac{1}{2}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \;; \\
\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^3}^{(1)} &= \frac{1}{3}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^3} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2} + \frac{1}{6}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \;; \\
\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^4}^{(1)} &= \frac{1}{4}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^4} + \frac{1}{3}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^3} + \frac{1}{8}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2} + \frac{1}{4}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2} + \frac{1}{24}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \;.
\end{aligned}$$

Wie Sie sehen, ziemlich unübersichtliche Ausdrücke.

Ich habe noch einiges zu sagen vergessen: Unter $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}$ verstehe man jetzt die richtiggehende Summe der Elemente dieser Klasse im hyperkomplexen Zahlsystem, dessen Basiseinheiten die Gruppenelemente sind. Mit Klassen rechnet man dann kommutativ. Also $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}^2}$ z.B. ist ein Aggregat von Gruppenelementen das durch formales Ausmultiplizieren erhalten wird und übrigens sich linear aus Klassen zusammensetzt.

Ich komme da natürlich nicht weiter. Man müsste sehen, welche Bedeutung dem Jakobischen Symbol im abelschen Fall zukommt und darum möchte ich Sie gerade fragen. Es genügt der Fall der Primidealpotenz. Können Sie, eventuell mit $\mathfrak{p}$-adik, eine direkte Definition von $\sigma_{\mathfrak{p}^n}$ geben?

Eine solche wäre vielleicht verallgemeinerungsfähig und man brauchte dann vielleicht keine expliziten Ausdrücke für $\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}^{(1)}$.

Sie werden von den $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}^n}^{(1)}$ entsetzt sein und sagen, sie seien wertlos. Nein! Gerade diese Ausdrücke oder ähnliche treten in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen auf und ich bin überzeugt dass man sie dort wiederfindet. Ich habe natürlich nur ganz nebelhafte Vorstellungen über das wie. Ich denke immer, dass etwa ein nicht abelscher Körper eine Art Klassenkörper für gewisse hyperkomplexe Zahlen liefert.

Ich finde es sehr richtig, dass Sie

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{\sigma_{\mathfrak{p}}(\sqrt[m]{\alpha})}{\sqrt[m]{\alpha}}$$

definieren wollen.[6]

Ich habe heute die Separata erhalten und lege Ihnen ein Stück für Dr. Rauter bei.[7] Wissen Sie übrigens die Adresse von Tschebotareff? Ich möchte ihm auch gern ein Separatum schicken.[8]

Ich fahre etwa am 8.–10. September von hier fort. Sind Sie bis dahin schon zurück?

Mit herzlichen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin sowie den besten Wünschen zur Erholung

Ihr Artin

---

[6]Siehe 14.2, sowie auch den Brief Nr. 10 vom 21.7.1927, Fußnote 3.

[7]Offenbar handelt es sich um Sonderdrucke von Artins Arbeit mit dem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. – Herbert Rauter war ein Gymnasiallehrer in der ostpreußischen Stadt Tilsit und war 1926 bei Hasse in Halle promoviert worden. Seine Dissertation behandelte das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_p(x)$. Siehe [Roq02b].

[8]Im Jahre 1928 war Tschebotareff von Odessa nach Kazan umgezogen. Hasse stand mit ihm in brieflicher Verbindung und konnte Artin wohl seine neue Adresse mitteilen.

Kommentare zum Brief Nr.15:

15.1 Zum Klassenkörperturm

15.1.1 Das Problem

Offenbar hatte Hasse gefragt, was Artin zum Klassenkörperturmproblem meine.

Das Klassenkörperturmproblem war von Hasse in Teil I seines Klassenkörperberichtes [Has26a] als ein ungelöstes Problem der Klassenkörpertheorie aufgeführt worden. Es sei $k = k_0$ ein Zahlkörper und sukzessiv k_i der Hilbertsche Klassenkörper von k_{i-1}. Man erhält einen Körperturm

$$k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset k_3 \subset \cdots$$

und es entsteht das Problem, zu entscheiden, ob dieser Turm immer abbricht. Wenn ja, dann bedeutet das, dass k in einen unverzweigten Körper mit der Klassenzahl 1 eingebettet werden kann; das wäre, so sagt Hasse, ein gewisses Seitenstück zum Hauptidealsatz.

Hasse schreibt in seinem Bericht, dass dieses Problem von Furtwängler aufgeworfen worden sei, und er bezieht sich dabei auf eine mündliche Mitteilung von Artin. Allerdings schreibt Furtwängler dazu in einem Brief an Hasse vom 23. 6. 1926:

> „*. . . Ich möchte noch eine kurze Bemerkung über Ihren schönen Bericht hinzufügen. Die Angabe über eine Mitteilung des Herrn Artin bezüglich des Klassenkörperturmes dürfte auf einer Verwechslung mit Herrn Dr. Schreier beruhen, mit dem ich öfter über diese Dinge gesprochen habe.*“

Das bedeutet anscheinend, dass die Problemstellung von Schreier stammt, und dass Furtwängler dies aus seinen Gesprächen mit Schreier übernommen hatte.

Interessant ist, dass Artin dieses Turmproblem von vorneherein *nicht* als gruppentheoretisches Problem ansieht, während er doch beim Hauptidealsatz davon überzeugt war, dass dieser auf ein rein gruppentheoretisches Problem zurückläuft, was er schon im Brief Nr. 13 vom 2. August zum Ausdruck gebracht hatte. Beides hat sich bewahrheitet: Einerseits bewies Furtwängler 1928 den Hauptidealsatz mit Hilfe eines gruppentheoretischen Satzes, der aufgebaut war auf der von Artin und Schreier ausgearbeiteten Verlagerungstheorie (siehe 13.1.1). Andererseits konnte schließlich nachgewiesen

werden, dass die von Artin in seinem Brief beschriebenen unendlichen Folgen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ von Gruppen wirklich existieren, und dass es auf die spezielle arithmetische Struktur des Grundkörpers ankommt, ob der Klassenkörperturm endlich oder unendlich ist.

Die von Artin erwähnte *„Verschärfung der Minkowskischen Abschätzung“* findet sich bereits in Teil I des Hasseschen Klassenkörperberichtes [Has26a] erwähnt, nämlich: Es handelt sich um die Minkowskische Abschätzung des Diskriminantenbetrages $|d|$ eines Zahlkörpers. Danach ist

$$|d| > \frac{\left(\frac{\pi}{4}e^2\right)^n}{2\pi n\, e^{1/6n}} \tag{30}$$

wobei n der Grad des in Rede stehenden Zahlkörpers ist. Könnte diese Abschätzung auf der rechten Seite verschärft werden durch die n-te Potenz irgend einer gegen $+\infty$ strebenden Funktion als Faktor, also etwa $(\log n)^n$ oder $(\log\log n)^n \ldots$, so könnte aus dieser verschärften Abschätzung, angewandt auf einen hinreichend hohen Körper des Klassenkörperturms, geschlossen werden, dass der Klassenkörperturm stets abbricht. Das ist die Artinsche Idee, die Hasse in seinem Bericht [Has26a] ausführt.

Wie wir aus diesem Brief entnehmen, hält Artin dies immer noch für den aussichtsreichsten Beweisansatz, um die Endlichkeit des Klassenkörperturms zu beweisen. Es ist allerdings nicht klar, ob Artin meint, dass der Klassenkörperturm stets endlich ist, also für einen beliebigen Zahlkörper als Grundkörper, oder ob er bereits die Möglichkeit in Betracht zieht, dass der Klassenkörperturm manchmal endlich und auch manchmal unendlich sein kann, je nach der „speziellen arithmetischen Natur des Grundkörpers“, wie er sich ausdrückt. Wir neigen dazu, anzunehmen, dass Artin die letztere Möglichkeit meint, die sich dann ja auch in der Folge bewahrheitet hat.

Nachstehend geben wir einen Überblick über die weitere Entwicklung zum Klassenkörperturmproblem.

15.1.2 Arnold Scholz 1928

Wir haben Arnold Scholz bereits in 12.1.4 erwähnt. Scholz (1904-1942) hatte bei I. Schur in Berlin studiert. Er pflegte schon als junger Student einen regen Briefwechsel mit Hasse, der erst mit Scholz’ Tod 1942 endete; insgesamt enthält der Nachlass von Hasse mehr als 100 Briefe von und an Scholz, vollgepackt mit Mathematik.

Im Oktober 1928 teilte Scholz in einem Brief an Hasse mit, dass und wie er Zahlkörper mit beliebig großem Klassenkörperturm konstruieren könne. Hasse informierte Artin sofort über dieses Resultat; wir schließen das daraus, dass sich Artin in seinem Brief Nr. 20 vom 14.11.1928 dafür bedankt. Für die Einzelheiten der Scholzschen Konstruktion, die 1929 im Crelleschen Journal erschien, verweisen wir auf 20.1.1. Demnach wusste Artin spätestens zu diesem Zeitpunkt, dass es beliebig hohe Klassenkörpertürme gibt, auch für Grundkörper vom Primzahlgrad ℓ. Allerdings blieb die Frage offen, ob ein Klassenkörperturm unendlich sein kann.

15.1.3 Artin 1934

In Hasses Tagebuch haben wir eine Eintragung aus späterer Zeit gefunden, datiert im „Februar 1934", mit dem Titel:

> *Konstruktion von Körpern mit beliebig hohem Klassenkörperturm (nach Artin).*

In der ersten Februarwoche 1934 hatte Hasse auf Einladung von Artin in Hamburg eine Vortragsserie gehalten, über seinen neuen Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper (vgl. Brief Nr. 48). Die in Rede stehende Tagebucheintragung beruht offenbar auf einem bei dieser Gelegenheit geführten Gespräch Hasses mit Artin. Sie zeigt uns, dass Artin sich 1934 immer noch mit dem Klassenkörperturmproblem beschäftigte.

Die Artinsche Konstruktion ist so einfach, dass wir die Hassesche Eintragung nachstehend wörtlich wiedergeben, insbesondere weil sie niemals publiziert wurde und ganz unbekannt ist.

> *Zu jeder gegebenen endlichen Gruppe G kann man einen algebraischen Zahlkörper k mit einem galoisschen Relativkörper $K|k$ der Gruppe G konstruieren. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die Diskriminantenprimteiler von $K|k$. Dann sind die zugehörigen Körper $K_{\mathfrak{P}_i}$ metazyklisch. Man kann nun einen zu $K|k$ fremden Körper $\overline{k}$ so konstruieren, dass seine Lokalisierungen für die Stellen $\mathfrak{p}_i$ mit den $K_{\mathfrak{P}_i}$ übereinstimmen. Dann ist $K\overline{k}|\overline{k}$ unverzweigt mit der Gruppe G. So kann man Körper von beliebig hohem Klassenkörperturm konstruieren.*

Der letzte Satz ist offenbar so zu interpretieren, dass *durch geeignete Wahl der Gruppe G* der Klassenkörperturm von $\overline{k}$ beliebig groß wird. In der Tat:

wenn G metabelsch von der Stufe n ist, dann ist $K\overline{k}$ im n-ten Klassenkörper von $\overline{k}$ enthalten.

Einen Hilfskörper $\overline{k}$ im angegebenen Sinne kann man ganz elementar finden, unter Benutzung des Henselschen Lemmas: Sei $f_i(X)$ ein definierendes Polynom von $K_{\mathfrak{P}_i}$ über $k_{\mathfrak{p}_i}$; sein Grad ist $n_i = [K_{\mathfrak{P}_i} : k_{\mathfrak{p}_i}]$. Es bedeute n das kleinste gemeinsame Vielfache der n_i. Man approximiere nun die Polynome $f_i(X)^{n/n_i}$ simultan durch ein Polynom $g(X) \in k[X]$ vom Grad n. Dann nehme man $\overline{k}$ als den Körper einer Nullstelle von $g(X)$; wenn die Approximation hinreichend gut ist so zerfällt $g(X)$ über $k_{\mathfrak{p}_i}$ als die n/n_i-te Potenz eines über $k_{\mathfrak{p}_i}$ irreduziblen Polynoms, welches denselben Körper $K_{\mathfrak{P}_i}$ erzeugt wie $f_i(X)$.

Die Artinsche Konstruktion unverzweigter Körper ist aber nicht nur für das Klassenkörperturmproblem von Interesse. Denn ein Klassenkörperturm liefert ja stets *metazyklische* Galoisgruppen, während hier gezeigt wird, dass *jede* endliche Gruppe als Galoisgruppe eines relativ unverzweigten Zahlkörpers auftritt. Wir wissen aus einem späteren Brief, dass Artin darüber sehr erstaunt war; vgl. Brief Nr. 37 vom 6.5.1931. Bis dahin hatte Artin nicht geglaubt, dass „*es überhaupt einen unverzweigten, nicht metazyklischen Körper gibt.*“

15.1.4 Problem von Taussky

Im weiteren wurde versucht, unabhängig vom Klassenkörperturmproblem, also auf rein gruppentheoretischem Wege, das von Artin aufgeworfene gruppentheoretische Turmproblem zu lösen, nämlich ob es beliebig lange (oder gar unendliche) Folgen endlicher nichttrivialer Gruppen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots$ gibt derart, dass $\mathfrak{g}_{i-1}$ die Faktorgruppe der $(i-1)$-ten Kommutatorgruppe von $\mathfrak{g}_i$ ist. Wir sprechen dann kurz von „Gruppentürmen“. Und zwar sucht man nach solchen großen Türmen, deren erstes Glied $\mathfrak{g}_1$ (also die Faktorkommutatorgruppe) eine vorgegebene abelsche Gruppe G ist. Mit der letztgenannten Bedingung geht die Problemstellung über die in dem vorliegenden Brief aufgeworfene Frage von Artin hinaus, denn Artin spricht nicht davon, dass die Faktorkommutatorgruppe vorgegeben sein soll. Die von Scholz konstruierten großen Türme (über die wir in 15.1.2 berichteten) sind dafür nicht geeignet, da die Faktorkommutatorgruppe (also die Idealklassengruppe des Grundkörpers) mit der Höhe des Turmes wächst.

Das Problem wird etwas einfacher, wenn man p-Türme betrachtet, also solche Türme, bei denen die Gruppen $\mathfrak{g}_i$ p-Gruppen sind, wobei p eine Primzahl bedeutet. Und entsprechend p-Klassenkörpertürme.

Im Jahre 1935 publizierte Magnus eine Arbeit [Mag35], in welcher er eine neue Methode präsentierte, um mit Gruppen zu arbeiten, die durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind. Sozusagen als Nebenprodukt stellt er fest, dass es für $p = 3$ beliebig große 3-Gruppentürme gibt, deren erstes Glied $\mathfrak{g}_1$ eine abelsche Gruppe vom Typ $(3, 3, 3)$ ist, also direktes Produkt von drei zyklischen Gruppen der Ordnung 3. Dieses Ergebnis, obwohl rein gruppentheoretisch, wurde sofort registriert als relevant für die Untersuchung der Klassenkörpertürme: das wurde sowohl im Zentralblatt-Referat (von Olga Taussky) als auch im Referat des „Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik“ (von Arnold Scholz) betont. Es scheint jedoch nicht klar zu sein, ob es gelingt, mit dieser Methode auch unendliche Gruppentürme zu bauen.

1958 publizierte Olga Taussky-Todd [Tau58] als *Research Problem* die Aufgabe, zu gegebener abelscher p-Gruppe G die Höhe von Gruppentürmen abzuschätzen, die mit G als Faktorkommutatorgruppe beginnen. 1970 zeigte Serre [Ser70], dass es stets unendliche Gruppentürme dieser Art gibt, ausgenommen die Fälle, die schon Taussky bekannt waren, nämlich wenn G zyklisch ist oder eine 2-Gruppe vom Typus $(2, 2)$.[9] Damit wurde also die Frage von Artin-Taussky im gruppentheoretischen Sinn beantwortet.

Die Serresche Konstruktion ist im Rahmen der pro-p-Gruppen einfach und übersichtlich: Wenn nicht einer der Ausnahmefälle vorliegt, so lässt sich $G = A \times B$ als direktes Produkt zweier nichttrivialer abelscher p-Gruppen A und B darstellen, wobei mindestens eine, etwa A, eine Ordnung $|A| > 2$ besitzt, während jedenfalls $|B| \geq 2$. Sei $A \star B$ das freie Produkt in der Kategorie der p-Gruppen. Der Kern R des natürlichen Homomorphismus $A \star B \to A \times B$ ist gleich der Kommutatorgruppe von $A \star B$ und wird erzeugt von den Kommutatoren $[a, b]$ mit $a \in A, b \in B$ und $a, b \neq 1$. Und zwar ist R die *freie* pro-p-Gruppe mit diesen Erzeugenden. Deren Anzahl ist > 1 und somit ist die absteigende Kommutator-Reihe unendlich.

15.1.5 Golod-Shafarevich

Im Jahre 1964 erschien die Arbeit [GS64] von Golod und Shafarevich mit dem Ergebnis, dass es unendliche Klassenkörpertürme gibt. Das kam ziemlich überraschend, nicht weil man die Endlichkeit der Klassenkörper-Türme erwartete, sondern weil man bis dahin keine Möglichkeit sah, an das Problem heranzukommen. Diese Arbeit liefert eine glänzende Bestätigung für die Artinsche Vision im vorliegenden Brief, nämlich dass „*erst die spezielle*

[9] Für den letztgenannten Fall siehe Furtwängler [Fur16] und Taussky [Tau37].

arithmetische Natur des Grundkörpers hier den Ausschlag geben“ wird. In der Tat wird in der Arbeit gezeigt, dass der Klassenkörperturm unendlich ist, wenn der Rang der Idealklassengruppe hinreichend groß ist.

Genauer gesagt, geht es um p-Klassenkörpertürme für eine vorgegebene Primzahl p. Gegeben sei ein Zahlkörper k vom Grad n. Ferner sei d_p der p-Rang seiner Idealklassengruppe. Aus den Resultaten von Golod-Shafarevich ergibt sich: Wenn

$$d_p \geq 2 + 2\sqrt{n+1} \qquad (31)$$

so ist der p-Klassenkörperturm über k unendlich. (Siehe dazu auch [Roq67] und [RZ69].) Und zwar ist diese arithmetische Bedingung die Folge einer gruppentheoretischen Bedingung im Rahmen der pro-p-Gruppen, nämlich wie folgt:

Nach der Klassenkörpertheorie ist d_p der Rang der Galoisgruppe G des Hilbertschen p-Klassenkörpers, und diese ist die Kommutator-Faktorgruppe der Galoisgruppe $\widehat{G}$ des gesamten p-Klassenkörperturms. Also ist d_p auch der Rang der pro-p-Gruppe $\widehat{G}$, d.h. die Minimalanzahl der Erzeugenden von $\widehat{G}$. Es sei r_p die Minimalanzahl der *Relationen* zwischen diesen Erzeugenden, d.h. der Rang der Relationengruppe. Nach Golod und Shafarevich bedingt die gruppentheoretische Ungleichung

$$d_p > 2\sqrt{r_p} \qquad (32)$$

dass die pro-p-Gruppe $\widehat{G}$ unendlich ist. In einer endlichen p-Gruppe gibt es also relativ viele Relationen, mehr als die angegebene Ungleichung erlaubt.

Der Übergang von (32) zu (31) wird geliefert durch eine Abschätzung der Relationenanzahl r_p im Vergleich zu arithmetischen Invarianten des Körpers k, insbesondere zum Rang der Einheitengruppe. Diese Abschätzung beruht auf der kohomologischen Deutung der Klassenkörpertheorie im Sinne der Theorie von Artin und Tate [AT68], die Anfang der 1950er Jahre im Seminar von Artin in Princeton entwickelt worden war. Die Methoden dafür waren zur Zeit des vorliegenden Briefes, also 1927, noch nicht verfügbar. Immerhin ist es interessant, dass Artin die Methoden der kohomologischen Algebra, die in den 1930er Jahren im Entstehen begriffen war, im Hinblick auf Anwendungen in der Klassenkörpertheorie schon damals vorangetrieben hat. Das geht aus späteren Briefen von Artin an Hasse hervor.

Für quadratische Körper ($n = 2$) liefert (31) die Bedingung $d_p > 5$. Durch Verfeinerung der Methoden konnten Koch und Venkov [KV75] zeigen, dass für quadratische Körper sogar $d_p > 2$ ausreicht, damit der p-Klassenkörperturm unendlich ist, jedenfalls für ungerade Primzahlen p. Das

ist interessant, weil schon früher (1934) Arnold Scholz und Olga Taussky [ST34] Beispiele quadratischer Körper mit 3-Klassengruppe vom Rang 2 und *endlichem* 3-Klassenkörperturm angegeben hatten. Wenn $p = 2$ ist, dann geht es um den 2-Rang d_2 der 2-Klassengruppe eines quadratischen Zahlkörpers. Die Geschlechtertheorie von Gauss liefert bekanntlich Idealklassengruppen von beliebig großem Rang, abhängig von der Anzahl der Diskriminantenteiler; danach ist es leicht, numerische Beispiele von quadratischen Körpern mit unendlichem Klassenkörperturm anzugeben. Golod und Shafarevich nennen z.Bsp. $\mathbb{Q}(\sqrt{-30030})$. Unter Ausnutzung weiterer arithmetischer Eigenschaften des Körpers lassen sich jedoch noch numerisch kleinere Beispiele finden.

Zur Weiterentwicklung siehe [Koc70] und auch [Win01].

15.2 Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper

Hier geht es wieder um die Grundlagen der Klassenkörpertheorie, vielleicht um eine abstrakte Axiomatik, vielleicht aber auch nur um das Interesse an den Analogien zwischen Zahlkörpern und Funktionenkörpern. Mit dem „vorletzten" Brief von Hasse, den Artin hier anspricht, meint er vielleicht einen Brief, den Hasse ihm als Antwort auf den Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1927 geschickt hatte, vgl. 12.1.

Wenn man nach der Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper sucht, dann ist es ratsam, sich an der einfachsten Situationen zu orientieren, nämlich dem Fall eines rationalen Funktionenkörpers. Artin weist darauf hin, dass es über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(t)$ einen unendlichen zyklischen unverzweigten Körper gibt, nämlich die maximale Konstantenerweiterung $\mathbb{F}_{q^\infty}(t)$, wobei $\mathbb{F}_{q^\infty}$ die Vereinigung aller $\mathbb{F}_{q^n}$ für $n \to \infty$ bedeutet. Insofern unterscheidet sich die Klassenkörpertheorie globaler Körper der Charakteristik p von der Klassenkörpertheorie der Zahlkörper.

Interessant ist, dass Artin den Körper $R = \mathbb{F}_q(t)$ als „den Körper meiner Dissertation" bezeichnet. Dabei hatte er doch in seiner Dissertation lediglich den rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_p(t)$ über dem *Primkörper* $\mathbb{F}_p$ betrachtet. Wenn er nun allgemein auch ein beliebiges Galoisfeld $\mathbb{F}_q$ als Konstantenkörper zulässt, so entspricht das einer Äußerung, die er kurz nach seiner Promotion, am 13. November 1921, in einem Brief an seinen akademischen Lehrer Herglotz geschrieben hatte:[10]

[10] Dieser Brief ist im Herglotz-Nachlass vorhanden, der in der Handschriftenabteilung der SUB Göttingen aufbewahrt wird.

> „*Zunächst ist zu bemerken dass die Theorie wortwörtlich für beliebige galoissche Felder gilt falls man nur unter p nicht eine Primzahl, sondern die betreffende Primzahlpotenz auf deren Exponenten es weiter nicht ankommt, versteht. Dies ist natürlich selbstverständlich und weiter nichts neues.*“

Wir ersehen aus dem vorliegenden Brief, dass Artin nach wie vor so denkt.

Weiter erscheint uns bemerkenswert, dass es Artin sozusagen als selbstverständlich ansieht, dass hier, also über dem Körper $R = \mathbb{F}_q(t)$, „die ganze Klassenkörpertheorie“ gilt. Es erscheint uns nicht plausibel, dass er damit meint, die Klassenkörpertheorie über globalen Körpern von Primzahlcharakteristik sei bereits voll gesichert. Dazu hätte nach dem damaligen Stand der Klassenkörpertheorie gehört, dass er die Theorie der ζ-Funktion eines beliebigen globalen Körpers von Primzahlcharakteristik p entwickelt hätte, dazu die Theorie der L-Reihen mit Restklassencharakteren – abgesehen von der Durchführung der diversen Index-Berechnungen, die Artin ja einmal als „Ge-ixe“ abgetan hatte. (Siehe Brief Nr. 14 vom 6. 8. 1927.)

All dies war zwar im Jahre 1927 bereits von F. K. Schmidt in seiner Erlanger Habilitationsschrift entwickelt worden[11], erschien aber erst viel später im Druck, nämlich im Jahre 1930, und Artin erwähnt F. K. Schmidt in seinem Brief überhaupt nicht. Wir haben kein Anzeichen dafür gefunden, dass Artin zu diesem Zeitpunkt Kenntnis von den Arbeiten F. K. Schmidts gehabt hat. Aus der Korrespondenz Hasse-F. K. Schmidt ist zu entnehmen, dass Hasse die Resultate von F. K. Schmidt kannte. Wenn Hasse in einem seiner vorangegangenen Briefe Artin darüber informiert hätte, dann hätte wohl Artin sich in seinem Brief auf F. K. Schmidt bezogen und nicht gesagt, dass die Klassenkörpertheorie hier „natürlich“ gilt.

Hinzu kommt, dass F. K. Schmidt seine Theorie nur für abelsche Körpererweiterungen vom Grad $\not\equiv 0 \bmod p$ entwickeln konnte. (p bedeutet hier die Charakteristik.) Die Hinzunahme von zyklischen Körpern vom Grad p erfordert, dass man solche Körper durch die sog. Artin-Schreier-Gleichungen erzeugt. Die Artin-Schreier-Theorie war zwar soeben, im Jahre 1927, entdeckt worden, aber es liegen keine Anzeichen vor, dass Artin bereits zu diesem Zeitpunkt daran gedacht hatte, diese für die Klassenkörpertheorie zu verwenden. Dies wurde erst später, im Jahre 1934, durch Hasse in einer Arbeit im Crelleschen Journal durchgeführt [Has34c].

Viel wahrscheinlicher erscheint uns, dass diese Äußerung Artins als eine Zukunftsvision zu verstehen ist, ohne den Anspruch, die Einzelheiten schon

[11] Zu F. K. Schmidt siehe [Roq01].

durchgeführt zu haben. Artin wollte, in Beantwortung einer Hasseschen Anfrage, lediglich darauf hinweisen, dass es dabei doch wohl einige Unterschiede zum Zahlkörperfall gebe, nämlich dass es unendliche abelsche unverzweigte Erweiterungen gibt, während doch bei Zahlkörpern der Hilbertsche Klassenkörper endlichen Grad besitzt.

15.3 Das Konzept zum Klassenkörperbericht II

Wir wissen nicht genau, woraus die „Sendung“ von Hasse bestanden hat, für die sich Artin bedankt. Aus dem Zusammenhang scheint hervorzugehen, dass Hasse ihm ein frühes Konzept für den Teil II seines Klassenkörperberichts [Has30a] geschickt hatte. Schließlich war das Konzept dieses Teils II vollständig auf das Artinsche Reziprozitätsgesetz als Grundlage ausgerichtet.

Wir entnehmen diesem und anderen Briefen Artins, dass er das Konzept und die Niederschrift des Hasseschen Klassenkörperberichts II in den verschiedenen Stadien interessiert beobachtet und kommentiert hat. Und Hasse hat ihn offenbar laufend informiert.

15.3.1 Der Zerlegungssatz

Der von Artin erwähnte „Zerlegungssatz“ findet sich in §11 des Klassenkörperberichts II. Und zwar bezieht sich dieser Satz auf das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ für zwei Elemente α, β aus einem Zahlkörper k [12]. Eigentlich handelt es sich um zwei Zerlegungssätze:

$$\left(\frac{\beta_1\beta_2,\,\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta_1,\,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\beta_2,\,\alpha}{\mathfrak{p}}\right), \qquad \left(\frac{\beta\,,\alpha_1\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta,\,\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\beta,\,\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right).$$

Diese bedeuten, dass das Hilbertsche Symbol in jeder der beiden Variablen multiplikativ ist. Hasse nennt die erste Relation den „vorderen“ Zerlegungssatz, weil er sich auf die vordere Variable β bezieht. Entsprechend wird die zweite Formel als „hinterer“ Zerlegungssatz bezeichnet. Natürlich sind diese beiden Zerlegungssätze gleichbedeutend zufolge der bekannten „Vertauschungsregel“

$$\left(\frac{\beta\,,\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\,,\beta}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

[12] Hasse schreibt in seinem Klassenkörperbericht stets $\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$, während Artin hier $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ bevorzugt. In anderen Briefen schreibt Artin auch $\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{w}}\right)$ in Anlehnung an die Schreibweise im Hilbertschen Zahlbericht [Hil97].

In Hasses Aufbau im Klassenkörperbericht II wird jedoch bei dem Beweis der Vertauschungsregel sowohl der vordere als auch der hintere Zerlegungssatz benutzt, die demzufolge zuerst getrennt bewiesen werden.

Das Hilbertsche Symbol bezieht sich auf einen vorgegebenen Exponenten m, und es wird in diesem Zusammenhang stets vorausgesetzt, dass die m-ten Einheitswurzeln im Grundkörper k liegen. Hier setzt nun die Frage Artins ein: Kann der Beweis des Zerlegungssatzes nicht auch geführt werden, wenn die m-ten Einheitswurzeln nicht in k liegen? Auf den ersten Blick erscheint diese Frage sinnlos, weil ja das Hilbertsche Symbol garnicht definiert ist, wenn nicht die einschlägigen Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Die Frage erscheint jedoch verständlich, wenn man die Hassesche neue Definition des Hilbert-Symbols berücksichtigt.

Denn Hasse definiert das Hilbert-Symbol mit Hilfe des Normsymbols $\left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)$, das von ihm im Anschluss an das Artinsche Reziprozitätsgesetz eingeführt wird. Dabei ist K eine beliebige abelsche Erweiterung von k, und $\beta \in k^{\times}$. Wir berichten darüber in 26.1.[13] Die Werte dieses Normsymbols liegen in der Galoisgruppe von $K|k$. Wenn Artin sich mit Hasses „Formalisierung" einverstanden erklärt, so bezieht er sich darauf, dass Hasse die Definition dieses Normsymbols zunächst ganz formal ohne Bezug auf Normen gibt und auch die einschlägigen funktoriellen Eigenschaften auf diese formale Definition gründet; erst danach wird die Normeigenschaft gezeigt (das heißt: die durch $\beta \to \left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)$ gegebene Abbildung ist ein Isomorphismus der $\mathfrak{p}$-lokalen Normgruppe auf die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$).

In der Definition des Normsymbols $\left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)$ wird nicht vorausgesetzt, dass die m-ten Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Artins Frage bezieht sich also wahrscheinlich auf diesen Fall und er meint, dass bei Hasse hier die zum „Zerlegungssatz" analogen Formeln fehlen. Er fordert Hasse auf, diese Lücke zu schliessen. In der endgültigen Fassung des Klassenkörperberichts II, §6 finden sich diese Formeln, nämlich:

$$\left(\frac{\beta_1\beta_2\,,K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta_1\,,K}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta_2\,,K}{\mathfrak{p}}\right)\,, \qquad \left(\frac{\beta\,,K_1K_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta\,,K_1}{\mathfrak{p}}\right)\times\left(\frac{\beta\,,K_2}{\mathfrak{p}}\right)$$

wobei K_1K_2 ein Kompositum abelscher Körper über k bezeichnet.[14]

[13] Der Brief Nr. 26 stammt vom Mai 1929. Wenn unsere Interpretation richtig ist, dann können wir daraus schließen, dass Hasse die dort diskutierten Resultate schon jetzt, also im August 1927, erhalten hatte.

[14] Die Galoisgruppe G von K_1K_2 ist dabei aufzufassen als eine Untergruppe des direkten

Der „Zerlegungssatz“ für das Hilbertsche Symbol beruht nun in Hasses Klassenkörperbericht II direkt auf diesen Formeln für das Normsymbol . Und zwar ist das evident aufgrund der Hasseschen Definition des Hilbertschen Symbols (für gegebenen Exponenten m), die wie folgt lautet:

$$\left(\frac{\beta\,,\alpha}{\mathfrak{p}}\right) := \left(\frac{\beta\,,k(\sqrt[m]{\alpha})}{\mathfrak{p}}\right) \tag{33}$$

Dabei ist vorauszusetzen, dass $\mathfrak{p}$ in $k(\sqrt[m]{\alpha})$ unverzweigt ist, d.h. dass α m-primär ist für $\mathfrak{p}$.

Wir halten es für unwahrscheinlich, dass Hasse dies nicht auch in seiner Sendung an Artin erwähnt hat. Wir nehmen daher an, dass Artin hier „etwas übersehen“ hat, was er ja auch selbst in seinem Brief als möglich andeutet. Es ist aber auch denkbar, dass Hasse in seinem frühen Konzept einen anderen Beweis des Zerlegungssatzes für das Hilbertsche Symbol im Auge hatte, vielleicht in Verallgemeinerung seiner früheren Arbeit [Has25c] aus dem Jahre 1925 im Falle $m = \ell$. Wir kennen jedoch jenes frühe Konzept nicht, falls es überhaupt existiert hat.

15.3.2 Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz

Artin fragt an, ob sich jetzt das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz „rasch“ beweisen läßt. Wir wissen nicht, was Hasse darauf geantwortet hat. In §16 des Klassenkörperberichts II leitet Hasse das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz für den Fall einer ungeraden Primzahl $m = \ell$ her, über dem ℓ-ten Einheitswurzelkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{1})$. Aber die dortige Herleitung kann man wohl nicht als „rasch“ bezeichnen. Sie beruht auf der Produktformel für das Hilbertsche Symbol, und die daran anschließenden Rechnungen sind dann dem Typus nach dieselben, die auch schon vorher, ohne das Artinsche Reziprozitätsgesetz, durchgeführt wurden.

Hasses „Ansätze zu ℓ^n-primär“, die Artin in seinem Brief erwähnt, sind wahrscheinlich in §14 des Klassenkörperberichts II eingegangen. Als „vernünftige“ Definition von $\left(\frac{\alpha\,,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$, die Artin anmahnt[15], ist wahrscheinlich noch nicht die Definition in §11 des Hasseschen Klassenkörperberichts II

Produkts $G_1 \times G_2$, und in diesem Sinne ist das „Produkt“ der Automorphismen $\left(\frac{\beta\,,K_1}{\mathfrak{p}}\right)$ und $\left(\frac{\beta\,,K_2}{\mathfrak{p}}\right)$ zu verstehen. Wir haben das zu verdeutlichen versucht, indem wir das Zeichen $\times$ gesetzt haben; bei Hasse findet sich dieses Zeichen nicht. Wenn K_1 und K_2 linear disjunkt sind über k dann ist $G = G_1 \times G_2$.

[15] Wie bei Artin und Hasse üblich, bedeutet $\mathfrak{l}$ stets einen Primteiler von ℓ.

anzusehen. Denn in der dortigen, der obigen Formel (33) entsprechenden Definition mit Hilfe des Normsymbols wird das letztere immer noch mit Hilfe des *globalen* Artinschen Reziprozitätsgesetzes definiert. Erst später, im Frühjahr 1932, gelang Hasse eine *rein lokale* Definition; er hat sie in seiner Arbeit [Has33a] publiziert, die er Emmy Noether aus Anlass ihres 50. Geburtstages am 23. März 1932 gewidmet hatte. Die Widmung für Emmy Noether war u.a. damit begründet, dass sie seit einer Reihe von Jahren dafür plädiert hatte, die Normenresttheorie rein lokal mit Hilfe der Algebrentheorie aufzubauen, was dann Hasse schließlich auch gelang.[16]

Die von Artin erwähnte Formel

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)_K = \left(\frac{NA}{\mathfrak{a}}\right)_k \tag{34}$$

für das m-te Potenzrestsymbol bezieht sich auf eine Körpererweiterung K von k. Es wird vorausgesetzt, dass die m-ten Einheitswurzeln in k liegen. Auf der linken Seite ist das Potenzrestsymbol (Jacobisches Symbol) in K zu nehmen, auf der rechten Seite in k. Und NA bezeichnet die Norm von $A \in K^\times$ nach k. Diese Formel erscheint in §14,2 des Klassenkörperberichts II. Wenn Artin von der „σ-Formulierung“ spricht, so meint er offenbar eine entsprechende Formel für das Normsymbol. Diese findet sich in §6,3 des Klassenkörperberichts II. Es scheint, dass Hasse den Beweis dieser Formeln und ihren Zusammenhang zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes noch nicht gefunden hatte, und dass er daher Artin danach gefragt hatte. Beim Beweis macht es einige Schwierigkeiten, zu zeigen: wenn in (34) die linke Seite definiert ist, dann ist es auch die rechte Seite. Dazu benötigt Hasse ein von ihm vorher abgeleitetes Primäritätskriterium. Vielleicht ist das der Grund, weshalb Artin schreibt, er sei „ratlos“, weil dieses Kriterium zu dem Zeitpunkt des Briefes noch nicht bekannt war.

15.4 Nicht-abelsche Körper

Artin bezeichnet es als „*eines seiner Ziele, an die nicht-abelschen Körper heranzukommen*“. In der Tat scheint es ja jetzt, dass er diesem Ziel einen wichtigen Schritt näher gekommen ist. Denn durch den Beweis des Reziprozitätsgesetzes ist nunmehr auch die Artinsche Theorie der L-Reihen gesichert, die er schon 1923 in seiner L-Reihenarbeit konzipiert hatte. Die Artinschen L-Reihen beziehen sich ja auf beliebige galoissche, nicht notwendig abelsche

[16] Vgl. dazu [Roq05b], sowie [LR06].

Zahlkörper und sie waren konzipiert im Hinblick auf das von Artin jetzt explizit formulierte Ziel.[17]

Interessant erscheint uns die Festellung Artins, dass er sich hauptsächlich im Hinblick auf dieses Ziel mit der *Arithmetik der Algebren* beschäftigt habe. Dabei bezieht er sich auf die zwei großen Arbeiten [Art28b], [Art28c] über Algebren. Beide Arbeiten haben eine außergewöhnliche Bedeutung erlangt, die weit über die Klassenkörpertheorie hinausgeht. Die erstgenannte Arbeit enthält die Theorie der heute so genannten „Artinschen Ringe“, während die zweitgenannte Arbeit die Idealtheorie von Maximalordnungen behandelt, insbesondere stellt sie die Brandtsche Theorie der Gruppoide von Idealen auf eine solide Grundlage – als nichtkommutatives Gegenstück zu der Idealtheorie von Maximalordnungen in Zahlkörpern im Sinne von Dedekind und Emmy Noether.[18]

In diesen Arbeiten hatte Artin übrigens nichts verlauten lassen über sein Ziel, damit an die nicht-abelschen Körper heranzukommen. Die Arbeiten sind zwar erst 1928 erschienen, sie sind jedoch vom Autor mit „Januar 1927“ bezw. „Februar 1927“ datiert. Das heißt, sie wurden bereits *vor* Abfassung dieses Briefes zur Publikation vorgelegt, und sogar *bevor* Artin den Beweis seines Reziprozitätsgesetzes fand. Wir wissen nicht, ob Hasse zum Zeitpunkt des vorliegenden Briefes diese Arbeiten von Artin kannte. Wir möchten das aber annehmen, da Artin die Arbeiten in seinem Brief nicht kommentiert, also wohl deren Kenntnis bei Hasse voraussetzt. Vielleicht hatte Artin an Hasse eine Kopie seines Manuskripts geschickt, oder evtl. schon einen Korrekturabzug.

Was nun die Artinschen Ausführungen im vorliegenden Brief betrifft, so geht es um die Frage, was denn das Analogon zum Jacobischen Symbol im Falle einer nicht-abelschen Erweiterung ist. Im abelschen Falle ist der Frobenius-Automorphismus $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ eines unverzweigten Primideals $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt als Element der Galoisgruppe G. Artin schreibt dafür $\sigma_{\mathfrak{p}}$, wie in seiner Arbeit [Art27a]. Im nicht-abelschen Falle ist jedoch der Frobenius-Automorphismus nur bis auf Konjugierte in G bestimmt, d.h. jedem Primideal $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers k ist eine Konjugationsklasse in G zugeordnet.

[17] Siehe [Fre04].

[18] Diese beiden Arbeiten Artins haben übrigens Hasse angeregt, die Arithmetik der Algebren auf der lokalen Theorie aufzubauen, nach dem Muster von Hensel für Zahlkörper. Siehe 35.2. Das führte dann einerseits zur lokalen Definition des Normsymbols auf algebrentheoretischer Grundlage, andererseits zum Lokal-Global-Prinzip für einfache Algebren.

Artin schreibt $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$.[19] Im abelschen Falle ist das Jacobi-Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$ für ein Ideal $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{\nu_i}$ multiplikativ erklärt (alle $\mathfrak{p}_i$ sollen unverzweigt in K sein). Artin schreibt dafür $\sigma_{\mathfrak{a}}$. Was aber, so fragt Artin, sollte seine Entsprechung $\mathcal{C}_{\mathfrak{a}}$ im nicht-abelschen Fall sein?

Artin lehnt sich dabei an die Formeln für die L-Reihen aus seiner L-Reihen-arbeit an [Art23b]. Die von ihm hingeschriebenen Formeln sind in der Tat „unübersichtlich", wie er schreibt.

Betrachtet man das Zentrum des Gruppenringes von G (das von den Konjugationsklassen additiv erzeugt wird) als dual zu dem Charakterring von G, so sind die Abbildungen $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \mapsto \mathcal{C}_{\mathfrak{p}^\nu}$ als dual zu den sog. *Adams-Operatoren* $\chi \mapsto \chi^{(\nu)}$ anzusehen. Vielleicht könnte man im Umfeld der Adams-Operatoren Formeln finden, die denen von Artin dual sind. Es lohnt aber wohl nicht, dieser Frage nachzugehen. Denn der Ansatz von Artin ist unseres Wissens nicht mehr weiter verfolgt worden, weder von Artin selbst noch von anderen.

---

19 Hasse hat in [Has30a] dafür die Bezeichnung $\left[\frac{K}{\mathfrak{p}}\right]$ eingeführt und nennt dies das „Artin-Symbol". Es ist denkbar, dass Hasse diese Terminologie in Erinnerung an Artins Ausführungen in dem vorliegenden Brief gewählt hat. Diese Bezeichnung hat sich jedoch nicht durchgesetzt.

16 04.09.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, am 4. September 1927 [1]

Lieber Herr Hasse!

Ich bin in grosser Sorge dass Sie meinetwegen Ihre ganzen Pläne umwerfen müssen und ich möchte Sie bitten das doch nicht zu tun, sondern mir einfach abzuschreiben wenn es Ihnen nicht passt. Mein jetziger endgültiger Reiseplan hat sich nun etwas verschoben. Ich fahre am Dienstag den 13. September, vermutlich morgens hier ab und bin so gegen halb eins in Halle. Die genaue Zeit schreibe ich noch. Es würde nun von Ihrer Zeit abhängen, ob ich Sie einen oder zwei Tage in Anspruch nehmen darf. Aber bitte doch ja nichts meinetwegen zu verschieben. Ihre Angelegenheiten gehen doch selbstverständlich vor und passt es Ihnen jetzt nicht, so lässt sich doch vielleicht auf meiner Rückreise etwas machen. Darf ich Sie bitten, mir noch zu schreiben ob es Ihnen zur angegebenen Zeit passt und entschuldigen Sie mein andauerndes Verschieben des Datums. Jetzt steht es fest. Haben Sie auch nochmals herzlichen Dank für die freundliche Einladung. [2]

In den letzten Tagen bin ich zu nichts gekommen aber vor acht Tagen bin ich unter die Rechner gegangen. Die ganzen Dinge mit ℓ^n-primär und $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$ haben mich so geärgert, dass ich beschloss spezielle Fälle auszurechnen.[3]

Ich nahm die Fälle 4, 8, 9 im Körper der zugehörigen Einheitswurzeln. Die Resultate sind diese:

Ist $\zeta_n = e^{2\pi i/\ell^n}$, so dass also $\zeta_{n-1} = \zeta_n^\ell$ etc. ist und wird $\lambda_n = 1 - \zeta_n$ gesetzt, so gilt der zweite Ergänzungssatz in der bekannten, leicht verallgemeinerten Fassung.

Für $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda_n}$ im Körper $R(\zeta_n)$ gilt:

$$\boxed{\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)_{\ell^n} = \zeta_n^{-S\left(\zeta_n \frac{\log \alpha}{\ell^n \lambda_n}\right)}}$$

[1] Artin schreibt 1928, aber der Inhalt des Briefes deutet ganz klar darauf hin, dass es sich um das Jahr 1927 handelt.

[2] Nach dem Tagebuch von Hasse hat Artin ihn am 13. September 1927 besucht. Dieses Datum ist in die Mathematikgeschichte eingegangen, weil Artin an diesem Tag, wohl erstmalig, seine berühmte Vermutung über Primitivwurzeln geäußert hat. Siehe 17.2.

[3] Es geht um den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz für den Exponenten $m = \ell^n$. Siehe 16.1.

Sie stimmt wie gesagt für $2^2, 2^3$ und 3^2. Natürlich kann ich sie nicht allgemein beweisen.

Für den Fall ℓ^2 kann ich aber wenigstens allgemein zeigen, dass:

$$\left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2^{\ell^2}}\right) = \zeta_2^{-S\left(\zeta_2 \frac{\log(1-\lambda_2^{\ell^2})}{\ell^2\lambda_2}\right)}$$

ist. Da nun die Elemente $(1-\lambda_n^a)$ für $a < \ell^n$ mit zu ℓ primen a und noch $(1-\lambda_n^{\ell^n})$ eine multiplikative Basis bilden (Ersatz für Takagische Basis), so ist gezeigt, dass im Fall ℓ^2 die obige Formel für das letzte Basiselement $(1-\lambda_2^{\ell^2})$ gilt. Da nun

$$\left(\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n^a}\right)_{\ell^n} = 1$$

ist, wenn a prim zu ℓ, so hat man noch zu beweisen:

$$S\left(\zeta_2 \frac{\log(1-\lambda_2^a)}{\ell^2\lambda_2}\right) \equiv 0 \pmod{\ell^2}$$

für $(a, \ell) = 1$. Wenn das gezeigt ist, hat man die Formel allgemein. Das aber kann ich nicht (oder nur für 4,8,9).

Für ℓ^3 kann ich aber nicht einmal mehr zeigen dass die Formel für $(1-\lambda_3^{\ell^3})$ stimmt.

Ich bin jetzt fest überzeugt, dass dies der zweite Ergänzungssatz im Kreiskörper ist und bin über die einfache Bauart dieser Formel ausserordentlich erstaunt. Wenn nun α primär ist, so folgt aus Ihrer Formulierung des R[eziprozitäts]g[esetzes] [4], dass $\left(\frac{\alpha}{\lambda_n}\right)$ durch dieselbe Formel gegeben ist.

Weitere Fälle wie 27, 25, 49, 16 ect. auszurechnen ohne allgemeine Methode, übersteigt meine rechnerische Geduld, da das dazu erforderliche Berechnen von $S(\lambda_n^i)$ für zu grosse Werte von i notwendig wird und bereits für 8 und 9 sehr langweilig ist. Hoffentlich fällt Ihnen da etwas ein.[5]

Für das R[eziprozitäts]g[esetz] selbst gilt sicher eine ähnliche Formel wie die von Ihnen aufgestellte, doch habe ich sie mir nicht überlegt. Sie ist ganz bestimmt nicht irgendwie komplizierter und das ist doch erstaunlich.

Aber was ℓ^n-primär ist, weiss ich für 4, 8, 9. Ich habe mich bemüht eine gemeinsame Formel für die drei Fälle zu finden und fand nur die folgende,

[4] Siehe (19),(20) in 10.2.

[5] Hasse konnte diese Formel dann allgemein beweisen. Es entstand die gemeinsame Arbeit [AH28].

von der ich aber überzeugt bin, dass sie *nicht* die allgemeine ist, da ich schon ihre Invarianz gegen Substitutionen des Körpers bezweifle. Immerhin gebe ich sie in der fraglichen Form schon der Abkürzung halber.

Für $\ell^n = 4$, 8 und 9 ist α eine ℓ^n-primäre Zahl, wenn (für $\alpha \equiv 1 \pmod{\lambda_n}$)

$$\log \alpha \equiv a(\ell\lambda_1 + \ell^2\lambda_2 + \ldots + \ell^n\lambda_n) + \ell^n \log \xi \pmod{\ell^n \lambda_1}$$

ist. Dabei ist a irgend eine rationale Zahl und $\xi \equiv 1 \pmod{\lambda_n}$ irgend eine Zahl des Kreiskörpers.

Ich bin aber überzeugt, dass das nicht allgemein stimmt, da sie nur für 4,8,9 invariant ist. Vielleicht fällt Ihnen aber jetzt die richtige Verallgemeinerung ein. Das Glied $\ell^n \log \xi$ rührt natürlich von dem Beitrag ξ^{ℓ^n} bei α her und ist für $n > 1$ keineswegs zu vernachlässigen. Vielleicht kann man mit seiner Hilfe der ersten Klammer die „richtige" Gestalt geben.

Ich habe bei meinen mannigfachen Versuchen gesehen, wie schwer die Dinge mit der bisherigen ℓ-adik sind. Ein Jammer, dass man nichts vernünftiges mit $\sqrt[\ell^n]{\alpha}$ anfangen kann, da ja die Reihe nicht immer konvergiert. Ebenso, dass es keine Formel gibt um *stets* vom $\log \alpha$ zu α zu gelangen, da wieder $e^{\log \alpha}$ nicht immer konvergiert.[6]

Mit der Henselschen Arbeit über diese Frage kann ich auch nichts anfangen. Aber da wissen Sie ja besser Bescheid. [7]

Mit vielen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

Es scheint mir als wäre allgemein für primäres μ: [8]

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)_{\ell^n} = \zeta^{S_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\mu - 1}{\ell\lambda_1}\right)} ?$$

[6]Diese Schwierigkeiten konnte Hasse erst 1936 durch Einführung eines erweiterten Potenzbegriffes in lokalen Körpern überwinden. Das findet sich in seiner Arbeit „*Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p*", die 1937 im Crelleschen Journal erschien. Vgl. auch 14.2.1.

[7]Artin meint wahrscheinlich die Arbeit mit dem Titel „*Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers*", die im Crelleschen Journal 1916 erschienen war [Hen16].

[8]Das ist im allgemeinen nicht richtig, da in die Formel für $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right)$ der Hassesche erweiterte Potenzbegriff eingeht. Vgl. Fußnote 6.

Kommentare zum Brief Nr.16:

16.1 Der zweite Ergänzungssatz für ℓ^n

In dem vorliegenden Brief sehen wir Artin an der Arbeit, genauer an der *Rechenarbeit.* Er vermutet, anscheinend aufgrund numerischer Evidenz, die Gültigkeit der im Brief eingerahmten Formel für das ℓ^n-te Potenzrestsymbol.[9] Es handelt sich um den 2. Ergänzungssatz. Artin arbeitet hier im Körper $k = \mathbb{Q}(\sqrt[\ell^n]{1})$ der ℓ^n-ten Einheitswurzeln; dort ist λ_n ein Primelement für den (einzigen) Primteiler $\mathfrak{l}$ von ℓ. Artin setzt voraus, dass $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda_n$; dies garantiert zwar noch nicht, dass $\mathfrak{l}$ unverzweigt ist in $k(\sqrt[\ell^n]{\alpha})$, d.h. dass α ℓ^n-primär ist für $\mathfrak{l}$. Wenn aber α ℓ^n-primär ist, so stellt Artin fest, dass nach der „Hasseschen Formulierung des Reziprozitätsgesetzes“ [10] gilt:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) .$$

Demnach liefert dann die eingerahmte Formel dieses Briefes, im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln, auch eine explizite Formel für das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}}\right)$, das er im Brief Nr. 14 vom 6. 8. 1927 diskutiert hatte. (Dort schrieb Artin μ statt α.) Siehe 14.2.

Für den Exponenten ℓ erscheint die eingerahmte Formel bereits in der gemeinsamen Arbeit von Artin und Hasse aus dem Jahre 1923. Jetzt geht es also darum, sie für ℓ^2 und allgemeiner für beliebigen Exponenten ℓ^n zu beweisen.

Zwar kann Artin diese Formel nur in den von ihm angegebenen speziellen Fällen beweisen. Er teilt Hasse alles mit, was er darüber weiß, in der Hoffnung, dass Hasse da etwas einfällt, weil seine (Artins) rechnerische Geduld nicht ausreicht, weil er aber andererseits fest davon überzeugt ist, dass dies der zweite Ergänzungssatz im Kreiskörper ist. Im nächsten Brief Nr. 17 vom 27. 10. 1927 werden wir sehen, dass Hasse in der Tat einen Beweis liefern kann. Die Formel ist dann in die gemeinsame Arbeit von Artin und Hasse [AH28] eingegangen. Überdies gilt die Formel nicht nur im Kreiskörper selbst, sondern in jedem Zahlkörper k, der die ℓ^n-ten Einheitswurzeln enthält.

---

[9] Die Artinschen Bezeichnungen sind im Brief erläutert bis auf S, womit die absolute Spur aus dem Grundkörper, also dem Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln bezeichnet wird. R ist der rationale Zahlkörper, also $R(\zeta_n)$ der Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln.

[10] Siehe (19),(20) in 10.2.

17 27.10.1927, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, 27. Oktober 1927

Lieber Herr Hasse!

Ich bin leider erst vorgestern wieder hier angekommen[1], so dass ich erst jetzt Ihre Sendung hier vorfand. Besten Dank. Ich wüsste nicht was ich am Manuskript ändern sollte. Einige kleine Bemerkungen die ich Ihnen noch schreiben wollte fand ich von selbst darin vor, so dass sich auch das erübrigt hat. Neu und amüsant finde ich auch noch Ihre letzte Rechnung $\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^{\ell^n}}\right)$, da sie mir gleich eine Vermutung $= \zeta^{\pm 1}$ widerlegt. Die Arbeit kommt in unser nächstes Heft, mit dessen Druck bald begonnen wird. [2]

Nun muss ich noch Ihren letzten Brief nach Reichenberg beantworten.[3] Mich haben die Ausführungen sehr interessiert, vor allem deshalb, weil sie doch zeigen dass man möglicherweise durchkommt. Man müsste meines Erachtens einmal die ganze Primzahltheorie mit $\pi(x) <$? durchackern statt mit $\pi(x) = A + O(\ )$ und die Abschätzungen so gut wie möglich machen. Einerseits ist es wegen des fehlenden sehr bequemen O schwerer, andrerseits aber leichter als ich ursprünglich dachte, da ich glaubte, man müsse die Konstante im O-Glied bestimmen. Es genügt aber schon ein $\pi(x) <$ und das ist viel einfacher. Leider habe ich momentan keinen Doktoranden, der sich für diese Dinge interessiert. Wie steht es damit bei Ihnen?

Auch ich habe mich übrigens (ohne Erfolg) um $\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)$ und $\left(\frac{\lambda_i}{\alpha}\right)$ bemüht. Es wird wohl keine einfache Formel geben.

Ich komme jetzt zu Ihrem letzten Brief. Ich muss sagen, da staune ich. Erstens dass Sie auf dem Wege durchgekommen sind (ich hätte das garnicht gewagt) und zweitens über die merkwürdige Bauart der Formel.[4] Ich konnte bisher natürlich noch nicht über sie nachdenken, Sie wissen ja, wie es in den ersten Tagen nach der Rückkehr zugeht, aber hoffe in den nächsten Tagen

---

[1] Artin hatte sich einige Wochen in Reichenberg aufgehalten, wo er aufgewachsen war. Auf der Hinfahrt hatte er Hasse für ein paar Tage in Halle besucht, beginnend am 13. 9. 1927.

[2] Es handelt sich um das Manuskript für die gemeinsame Arbeit [AH28] mit dem Titel „*Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der ℓ^n-ten Potenzreste im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln*“. Siehe 17.1.

[3] Siehe 17.2.

[4] Siehe 17.3.

dazu zu kommen. Bis dahin sind Sie ja natürlich schon wieder viel weiter gekommen. Denn wenn Sie einmal so weit sind, wird es auch noch gehen. Ich bin schon ausserordentlich gespannt auf Ihren nächsten Brief.

Hecke habe ich vom zweiten Erg[änzungs]satz erzählt. Er war sehr erstaunt darüber dass es geht. Ich muss ja nun doch sagen, dass wir ein bisschen Glück bei der Sache hatten.

Ich lege Ihnen den versprochenen Beweis über die Einheiten in Körpern bei. Sie erinnern sich wohl noch. Hoffentlich gefällt Ihnen die Anordnung. [5]

Nun muss ich Ihnen nochmals meinen herzlichen Dank aussprechen für die liebenswürdige und grosse Gastfreundschaft. Ich habe noch die ganze Zeit im langweiligen Reichenberg davon geschwelgt.

Hoffentlich kann ich nun bald wieder an die Arbeit kommen und Ihnen was ordentliches erzählen.

Mit einer Empfehlung an Frau Gemahlin und besten Grüssen

Ihr Artin

Darf man Ihnen schon gratulieren? [6]

---

[5] Siehe 17.4.

[6] Hasses Tochter Jutta wurde am 23. 10. 1927 geboren.

Beilage zum Brief Nr.17:

Ich schicke einen von Minkowski stammenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz: Die Matrix $(a_{ik})_{i,k=1,\ldots,r}$ habe folgende Eigenschaften: $a_{ii} > 0$ dagegen $a_{ik} < 0$ für $i \neq k$, und ferner für jedes k sei $\sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu k} > 0$. Dann gilt: $|a_{ik}| \neq 0$.

Beweis: (von Furtwängler) Andernfalls wäre das Gleichungssystem $\sum_{k=1}^{r} a_{ik} t_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$ in nicht trivialer Weise lösbar. Man darf annehmen, dass unter den t_i positive Zahlen vorkommen und zwar (wegen der Symmetrie der Voraussetzungen), dass etwa $t_1, t_2, \ldots, t_s > 0$ sind, dagegen alle übrigen ≤ 0.

Man addiere die ersten s Gleichungen und erhält:

$$(1) \qquad t_1 \sum_{i=1}^{s} a_{i1} + t_2 \sum_{i=1}^{s} a_{i2} + \ldots + t_s \sum_{i=1}^{s} a_{is} + \ldots + t_r \sum_{i=1}^{s} a_{ir} = 0 \ .$$

Was weiss man nun über $\sum_{i=1}^{s} a_{ik}$? Wäre die Summe bis r erstreckt, so wäre sie nach Annahme > 0. Wenn nun $k \leq s$ sind, fehlen in der tatsächlich vorkommenden Summe nur negative Glieder, sie ist also erst recht > 0. Für $k > s$ aber besteht die Summe aus lauter negativen Gliedern, sie ist also < 0. Nun erkennt man, dass in (1) kein Glied linker Hand negativ, die ersten s Glieder sogar positiv sind. *Widerspruch!* q.e.d.

Es sei jetzt k unser Zahlkörper n-ten Grades und $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Minimalbasis. Man fasse die ω_i als hyperkomplexe Zahlen auf und bilde bei beliebigen reellen x_i die Zahl

$$x = x_1\,\omega_1 + x_2\,\omega_2 + \ldots + x_n\,\omega_n$$

Der Zahl x ordne man zu den Punkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im R_n.

Wir erweitern vorübergehend den Begriff „Hauptideal“ indem wir auch das von x erzeugte Hauptideal ins Auge fassen. Es bestehe (x) aus allen Vielfachen von x, also $x\gamma$, wo γ alle *ganzen Körperzahlen* durchläuft. Wenn x selbst ganze oder gebrochene Körperzahl ist, bildet (x) ein Gitter mit dem Maschenvolumen $|Nx|$. Ist x beliebig, so gilt aus Stetigkeitsgründen dasselbe (in der Nähe von x liegen Körperzahlen) nur muss, damit ein Gitter entsteht, natürlich $Nx \neq 0$ sein.

Man betrachte nun ($\xi = \xi_1\omega_1 + \ldots + \xi_n\omega_n$ gesetzt, wo ξ wieder eine beliebige allgemeine Zahl ist) den Würfel $|\xi_i| \leq \sqrt[n]{|Nx|}$. Sein Volumen ist $2^n\,|Nx|$ so dass er einen vom Ursprung verschiedenen Gitterpunkt des Ideals (x) enthält. Also gibt es ein ganzes $\gamma \neq 0$ aus k, so dass, $\xi = x\gamma$ gesetzt, $|\xi_i| \leq \sqrt[n]{|Nx|}$ ist.

Nun ist $N\xi$ eine ganze rationale homogene Funktion n-ten Grades in den ξ_i. Ist also C das Maximum von $|N\xi|$ für $|\xi_i| \leq 1$, so ist $C \cdot h^n$ das Maximum von $|N\xi|$ für $|\xi_i| \leq h$. Also gilt:

Es gibt eine nur von k abhängige Zahl C, von der Art, dass bei beliebigem x eine ganze Zahl γ existiert so dass für $\xi = x\gamma$ gilt:

$$(2) \qquad |\xi_i| \leq \sqrt[n]{|Nx|} \quad \textit{und} \quad |N\xi| \leq C \cdot |Nx|\,.$$

Daraus folgt $|Nx\gamma| \leq C \cdot |Nx|$, also $|N\gamma| \leq C$.

Man betrachte nun (γ hängt ja noch von x ab) die von den möglichen γ erzeugten Hauptideale (γ). Da sie von beschränkter Norm sind, gibt es nur endlich viele, etwa: $(\mu_1),\ (\mu_2), \ldots, (\mu_\kappa)$. Wir wissen jetzt, dass es bei beliebigem x stets eines von unseren μ_i gibt, sowie eine Einheit ε, derart dass für $\xi = x\varepsilon\mu_i$ die Ungleichungen (2) bestehen.

Es sei $\xi = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2 + \ldots + \xi_n\omega_n$ und $\eta = \xi\mu_i^{-1} = x\varepsilon$. Bei dieser Multiplikation mit μ_i^{-1} (einer gewissen unserer κ festen Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_\kappa$) werden die ξ_i durch passende Linearkombinationen η_i ersetzt. Da nur endlich viele μ_i in Frage kommen, sind die Koeffizienten dieser Linearkombinationen beschränkt und da $|\xi_i| \leq \sqrt[n]{|Nx|}$ ist, folgt für die η_i wenigstens eine Abschätzung der Form $|\eta_i| \leq D \cdot \sqrt[n]{|Nx|}$, wo D eine absolute Konstante ist:

Satz 1 Es gibt eine nur von k abhängige Konstante D von der Art, dass es zu jeder Zahl x mit $Nx \neq 0$ eine Einheit ε gibt, so dass, $\eta = x\varepsilon = \eta_1\omega_1 + \ldots + \eta_n\omega_n$ gesetzt, gilt

$$|\eta_i| \leq D \cdot \sqrt[n]{|Nx|}\ .$$

Angewendet auf „allgemeine Zahlen" x mit $|Nx| = 1$ heisst das, dass sich jede solche Zahl durch Multiplikation mit einer passenden Einheit in einen festen endlichen Volumteil schaffen lässt.

Sie sehen auch, dass dieser Satz wörtlich für Schiefkörper gilt.

Aus ihm ergeben sich nun leicht im Falle eines Zahlkörpers die üblichen Existenzsätze über Einheiten.

Man denke sich nämlich die Körper in der üblichen Weise angeordnet: Erst r_1 reelle, dann r_2 komplexe, dann die dazu konjugiert komplexen. Man bilde

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
x^{(1)} &= \omega_1^{(1)} x_1 + \omega_2^{(1)} x_2 + \ldots + \omega_n^{(1)} x_n \\
x^{(2)} &= \omega_1^{(2)} x_1 + \omega_2^{(2)} x_2 + \ldots + \omega_n^{(2)} x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \;. \\
x^{(n)} &= \omega_1^{(n)} x_1 + \omega_2^{(n)} x_2 + \ldots + \omega_n^{(n)} x_n
\end{aligned}
$$

Dabei denke man sich $x^{(1)}, \ldots$ als wirkliche Zahlen und nicht mehr als hyperkomplexe. Das ist ja übrigens damit gleichwertig, wenn unter x immer gleich das System der Konjugierten verstanden wird. Die linken Seiten in (3) dürfen beliebig reell vorgeschrieben werden, wenn nur für konjugiert komplexe Konjugierte dieselbe reelle Zahl genommen wird. Dies gibt für die linken Seiten $r+1$ Möglichkeiten ($r = r_1 + r_2 - 1$).

Man wähle nun r dieser $r+1$ Zahlen „enorm gross“ und bestimme die $(r+1)$-te so, dass $|Nx| = |x^{(1)}| \ldots |x^{(n)}| = 1$ wird. Zu diesem x gibt es eine Einheit ε, so dass die Koordinaten von $x\varepsilon$ absolut kleiner D sind ($|Nx| = 1$). Wenn nun die Koordinaten von $x\varepsilon$ beschränkt sind, so haben die Konjugierten $x^{(i)}\varepsilon^{(i)}$ auch „bescheidene“ Werte, da sie nur Linearformen der Koordinaten sind. Folglich muss $\varepsilon^{(i)}$ auf diejenigen Konjugierten $x^{(i)}$ verkleinernd gewirkt haben, die „enorm gross“ gewählt wurden. Für diese muss $|\varepsilon^{(i)}| < 1$ sein. Die restliche (oder beide restlichen – falls konjugiert imaginär) Konjugierte $|\varepsilon^{(i)}|$ muss jetzt > 1 sein, damit $|N\varepsilon| = 1$ ist. Diese restliche kann unter den ersten $r+1$ beliebig ausgewählt werden:

Satz 2. Bei beliebig gegebenem i zwischen 1 und $r+1$ gibt es eine Einheit ε_i für die gilt:

$$
|\varepsilon_i^{(\kappa)}| < 1 \quad \text{wenn} \quad \kappa \neq i, \quad \kappa \leq r+1; \quad \text{dagegen} \quad |\varepsilon_i^{(i)}| > 1 \; .
$$

So erhält man $r+1$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r+1}$. Von diesen behalte man nur die ersten r.

Ist ε eine beliebige Einheit, so setze man

$$
\ell_i(\varepsilon) = d_i \log |\varepsilon^{(i)} \quad \text{wo} \quad d_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_i \text{ reell} \\ 2 & \text{wenn } k_i \text{ imaginär} \end{cases} \qquad \text{ist.}
$$

Dabei sei $1 \leq i \leq r+1$. Kennt man die Logarithmen, so kennt man auch $|\varepsilon^{(i)}|$ und zwar für alle $i \leq r$.[7] Haben Einheiten gleiche Logarithmen, so hat ihr Quotient die Logarithmen Null. Dann ist $|\varepsilon^{(i)}| = 1$, also ε eine Einheitswurzel, was wie üblich leicht bewiesen wird.

[7] Artin schreibt $i \leq n$. Gemeint ist aber wohl $i \leq r$.

Durch Angabe der Log[arithmen] ist also eine Einheit bis auf Einheitswurzeln bestimmt. Es genügt aber wegen $\sum_{i=1}^{r+1} \ell_i(\varepsilon) = \log|N\varepsilon| = \log 1 = 0$, die ersten r Logarithmen zu kennen.

Man nehme nun einen r-dimensionalen Raum und ordne jeder Einheit ε zu den Vektor mit den Komponenten $x_i = \ell_i(\varepsilon)$. Diese Vektoren bilden eine additive Gruppe. Beschränkte x_i bedeuten beschränkte Logarithmen (auch der $r+1$-te wegen der Relation) also beschränkte Beträge der Konjugierten. Da es ganze Körperzahlen sind, tun dies nur endlich viele. In einem endlichen Volumteil liegen somit nur endlich viele. Also bilden unsere Vektoren einen Vektormodul ohne Häufungspunkte, also ein Gitter. Bleibt zu zeigen, dass es r-dimensional ist, dass es also r linear unabhängige Vektoren gibt. Das tun nun die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$. Denn es ist $\ell_i(\varepsilon_\kappa) < 0$ für $i \neq \kappa$ dagegen $\ell_i(\varepsilon_i) > 0$.

Ferner ist $\sum_{\nu=1}^{r} \ell_\nu(\varepsilon_i) = \log|N\varepsilon| - \ell_{r+1}(\varepsilon_i) = -\ell_{r+1}(\varepsilon_i) > 0$, da wegen $i \neq r+1$ stets $\ell_{r+1}(\varepsilon_i) < 0$ ist. Hilfssatz zeigt jetzt $|\ell_i(\varepsilon_\kappa)| \neq 0$.

q.e.d.

Das ist doch alles ganz gut zu verstehen und, wie mir scheint, besser als mit den bisherigen Beweisen. Sie überlegen sich leicht, wie man im Kolleg die Klippe mit hyperkomplex umgeht, was nicht schwer ist.

Natürlich ist auch klar, dass prinzipiell auch im letzten Teil keine Logarithmen erforderlich sind, doch wäre eine Vermeidung nur gekünstelt und wenigstens bei diesem Beweis nicht am Platze.

Satz 1 ist meines Erachtens nach bereits die wesentliche Existenzaussage. Dass bei den Zahlkörpern ihre genauere Struktur noch hinzu kommen muss um zu den üblichen Sätzen zu gelangen ist ja selbstverständlich.

Kommentare zum Brief Nr.17:

Artin antwortet in diesem Brief auf drei Sendungen von Hasse. Und zwar:

1. Die Sendung, die, wie Artin schreibt, er erst jetzt nach seiner Ankunft in Hamburg vorgefunden hat. Es handelt sich um das Manuskript der gemeinsamen Arbeit über die beiden Ergänzungssätze. Hasse hatte die Redaktion der Arbeit übernommen, und jetzt schickt er das Manuskript, das in den Hamburger Abhandlungen erscheinen soll. Wir werden das in 17.1 kommentieren.

2. Hasses „letzter Brief nach Reichenberg". [8] Artins Antwort darauf findet sich in Absatz 2 des Artinschen Briefes. Es geht um die Artinsche Vermutung über Primitivwurzeln. Wir werden dies in 17.2 kommentieren.

3. Hasses „letzter Brief", offenbar nicht nach Reichenberg, sondern direkt nach Hamburg. Artins Antwort findet sich in Absatz 4 seines Briefes. Eine mögliche Interpretation werden wir in 17.3 geben.

17.1 Gemeinsame Arbeit über die Ergänzungssätze

Das Thema der Ergänzungssätze für den Exponenten ℓ^n war in früheren Briefen ausführlich zur Sprache gekommen. Hasse hatte die Niederschrift der gemeinsam zu publizierenden Arbeit [AH28] übernommen, und Artin bestätigt nun den Erhalt des Manuskripts.

Sei $\zeta_n = e^{2\pi i/\ell^n}$ die normierte ℓ^n-te primitive Einheitswurzel und $\lambda_n = 1 - \zeta_n$ der Primteiler von ℓ im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln. Gesucht ist eine Rechenvorschrift für die Berechnung der Potenzrestsymbole $\left(\frac{\zeta_n}{\alpha}\right)$ (1. Ergänzungssatz) und $\left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right)$ (2. Ergänzungssatz) für $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda_n$ im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln. Diese Symbole werden in der Form ζ_n^L angesetzt und es geht nun darum, den auftretenden Exponenten L in den beiden Fällen zu berechnen. (Im Falle $\ell = 2$ ist $n \geq 2$ vorauszusetzen.)

---

[8] Wie Artin in dem vorangehenden Brief Nr. 16 vom 4. 9. 1927 angekündigt hatte, hat er Hasse am 13. 9. 1927 in Halle besucht. Er blieb dort einige Tage und reiste dann weiter nach Reichenberg in Böhmen. Reichenberg war die Heimatstadt Artins, wo er aufgewachsen war, und wo jetzt seine Mutter und sein Stiefvater lebten. (Heute heißt die Stadt Liberec und gehört zur Tschechischen Republik.)

Im Falle des zweiten Ergänzungssatzes ergibt sich

$$L = \frac{1}{\ell^n} S_n \left(-\frac{\zeta_n}{\lambda_n} \log \alpha \right) \tag{35}$$

wobei $\log \alpha$ den ℓ-adischen Logarithmus bedeutet, und S_n die Spur im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln. Dies ist dieselbe Formel wie sie Artin in seinem vorangegangenen Brief Nr. 16 vom 4. 9. 1927 aufgestellt hatte, aber nicht allgemein beweisen konnte. Es ist anzunehmen, dass Artin bei seinem Besuch in Halle am 13. September 1927 mit Hasse darüber gesprochen hatte, und dass sich der Beweis schliesslich aus dieser Diskussion ergeben hat.

Der Beweis ist jedoch keineswegs trivial und erfordert ganz neuartige Überlegungen. Die Idee ist die folgende: Für $\alpha \equiv 1 \bmod \ell^n \lambda_1 \lambda_n$ ist die Formel trivial, weil dann α hyperprimär ist und beide Seiten gleich 1 sind.[9] Daher genügt es, die Formel für die Zahlen einer Basis der Gruppe aller Restklassen modulo $\ell^n \lambda_1 \lambda_n$, die $\equiv 1 \bmod \lambda_n$ sind, zu beweisen. Eine solche Basis hatte Hensel in seiner grundlegenden Arbeit 1916 im Crelleschen Journal angegeben. Die Basiselemente sind $\eta_a = 1 - \lambda_n^a$ mit geeignetem a aus dem Intervall $1 \leq a \leq \ell^n$. (Nämlich für $(a, \ell) = 1$ oder $a = \ell^n$.) Mit diesen Basiselementen hatte Artin zu rechnen versucht, war aber damit nicht durchgekommen, wie er das in seinem Brief Nr. 16 vom 4. 9. 1927 schilderte.[10] Nun wird für den vorliegenden Zweck eine andere Basis konstruiert, nämlich mit Elementen τ_a, deren ℓ-adischer Logarithmus die Entwicklung

$$\log \tau_a = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{a\ell^\nu}}{\ell^\nu} \tag{36}$$

besitzt. (Diese werden als „reine“ Logarithmen bezeichnet, weil im Nenner nur reine Potenzen von ℓ vorkommen.) Die Benutzung dieser Basiselemente ist für den Erfolg der Rechnung entscheidend. Trotzdem sind die Rechnungen nicht trivial und ziemlich langwierig; sie ziehen sich in der publizierten Arbeit über 10 Seiten hin.

Da Artin in seinem Brief nicht eigens darauf eingeht, so ist anzunehmen, dass er schon vorher über diese Wahl der Basis τ_a informiert war. In seinem letzten Brief hatte er es noch mit einer anderen Basis versucht, und somit ist anzunehmen, dass beide im gemeinsamen Gespräch in Halle entschieden hatten, diese Basis τ_a zu nehmen.

[9] „Hyperprimär“ bedeutet, dass der zu ℓ gehörende Primdivisor des Einheitswurzelkörpers in der durch $\sqrt[\ell^n]{\alpha}$ erzeugten Kummerschen Erweiterung voll zerfällt. Siehe Seite 43.

[10] Artin schrieb in seinem Brief τ_a statt η_a. Wir benutzen hier die Hassesche Notation; das Symbol τ_a wird von Hasse in dem unten angegebenen Sinne (36) benutzt.

Die Relation (36) kann auch in der Form $\log \tau_a = g(\lambda_n^a)$ geschrieben werden, wobei

$$g(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\ell^\nu}}{\ell^\nu}\,. \tag{37}$$

Diese Potenzreihe hat in der späteren Literatur der Witt Vektoren sowie der Algebren in Charakteristik ℓ eine Rolle gespielt; ihre Umkehrung wird heute als „Artin-Hasse exponential series" bezeichnet.[11]

Artin erwähnt insbesondere, dass er die Berechnung des ℓ^n-ten Potenzrestsymbols $\left(\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n^{\ell^n}}\right)$ „amüsant" findet, so wie sie Hasse durchführt. Diese Rechnung findet sich am Schluss der Arbeit. Offenbar hat Artin die Formel vorher nicht gekannt, denn er schreibt, dass er als Ergebnis $\zeta_n^{\pm 1}$ vermutet hätte. Dies tritt jedoch nur für $n = 2$ und für $n = 3, \ell = 2$ ein. Wie es scheint, hatte Artin höhere Exponenten nicht numerisch getestet. Die von Hasse gefundene Formel ist eine Folge der oben genannten langwierigen Rechnungen. Die Hassesche Formel besitzt die Form $\left(\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n^{\ell^n}}\right) = \zeta_n^{L_n}$ mit

$$L_n = \sum_m \frac{1}{m} \sum_{1\le\mu\le m} (-1)^{\mu-1} \binom{m\ell^{\lceil \frac{n}{2}\rceil -1}}{\mu\ell^{\lceil \frac{n}{2}\rceil -1}} \tag{38}$$

wobei m die zu ℓ teilerfremden Zahlen des Intervalls $1 \le m \le n - \lceil \frac{n-1}{\ell} \rceil$ durchläuft. Die Klammern rechts bedeuten den entsprechenden Binomialkoeffizienten. Siehe auch 17.3.

17.2 Artins Vermutung über Primitivwurzeln

Der zweite Absatz des Briefes ist auf den ersten Blick unverständlich. Wir haben ihn jedoch interpretieren können durch Heranziehung des Hasseschen Tagebuchs.

Wir bemerken: Im vorangegangenen Brief Nr. 16 vom 4. 9. 1927 hatte Artin mitgeteilt, dass sich seine Reisepläne geändert hätten und er beabsichtige, am 13. 9. 1927 in Halle einzutreffen. In Hasses Tagebuch finden sich zwei Eintragungen unter dem Datum vom 13. September 1927 mit dem Vermerk: „*Nach mündlicher Mitteilung von Artin*".

[11] Siehe z.Bsp. [Die57].

-45-

Die Dichte der Primzahlen p, für die a primitive Wurzel ist.

(Nach mündlicher Mitteilung von Artin 13. IX. 27)
(27. IX. 27)

Es sei $a > 1$ eine positive ganze Zahl, die nicht Potenz einer kleineren positiven ganzen Zahl ist. Damit a primitive Wurzel für eine Primzahl p ist, die prim zu $2, 3, a$ vorausgesetzt wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Kongruenz

$$x^q \equiv a \mod. p$$

für keine Primzahl $q / p-1$ eine Lösung besitzt. Da diese Kongruenz für $q / p-1$ mit einer Lösung stets q verschiedene Lösungen besitzt, und für die $q \nmid p-1$ und $q \neq p$ stets eine aber auch nur eine Lösung besitzt, kann man das Kriterium auch so aussprechen:

Eine zu $2, 3, a$ prime Primzahl p hat a dann und nur dann zur primitiven Wurzel, wenn die Kongruenz

$$x^q \equiv a \mod. p$$

für keine Primzahl $q \neq p$ q verschiedene Lösungen besitzt.

Dann und nur dann, wenn jene Kongruenz für ein zu $2, 3, a$ primes $p \neq q$. q verschiedene Lösungen besitzt, zerfällt p in $R(\sqrt[q]{a})$ in verschiedene Primideale 1. Grades, kurz: p zerfällt voll in $R(\sqrt[q]{a})$. (Die Diskriminante von $R(\sqrt[q]{a})$ hat höchstens q und Primteiler von a zu Teilern, und kein davon verschiedenes p ist Teiler der Diskriminante von $x^q - a$). Dann und nur dann, wenn das letztere für ein zu $2, 3 a$ primes $p \neq q$ der Fall ist, zerfällt ferner p voll im zugehörigen Galoisschen Körper $R(\zeta_q, \sqrt[q]{a})$, wo ζ_q eine primitive q-te Einheitswurzel ist. Da nun q selbst

Abbildung 4: Aus Hasses Tagebuch 1927
(Quelle: Handschriftenabteilung SUB Göttingen)

Zusammengenommen schliessen wir daraus, dass Artin am 13. September einen Besuch bei Hasse in Halle machte, auf dem Weg in seine Heimatstadt Reichenberg.

Eine der beiden genannten Tagebuch-Eintragungen trägt die Überschrift:

Die Dichte der Primzahlen p, für die a primitive Wurzel ist.

Dort also, in Halle am 13. 9. 1927, hat Artin seine berühmte Vermutung über Primitivwurzeln ausgesprochen, und das Hassesche Tagebuch ist das erste Dokument, in dem diese Vermutung formuliert ist. Wir können demnach den 13. September 1927 als den „Geburtstag“ der Artinschen Vermutung ansehen.

Die Vermutung besagt: Ist $a \in \mathbb{Z}$ kein Quadrat und ist $a \neq \pm 1$, dann gibt es unendlich viele Primzahlen p, für welche a Primitivwurzel modulo p ist. Und zwar besitzt die Menge dieser p eine Dichte. Wenn a keine Potenz einer kleineren Zahl ist, so vermutete Artin die Dichte

$$d = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right)$$

wobei sich das Produkt über alle Primzahlen q erstreckt. Diese Zahl d wird heute „Artin-Konstante“ genannt, und sie ist numerisch ziemlich genau bekannt. Hasse bemerkt in seinem Tagebuch, dass $\frac{1}{4} < d < \frac{5}{12}$.

Es wäre natürlich interessant zu wissen, in welchem Zusammenhang Artin auf diese Vermutung gestoßen ist und welches Problem Anlass dazu gegeben hat. Dazu gibt es einige Anhaltspunkte, die aus dem Hasseschen Tagebuch und seine kurz davor liegenden Publikationen entnommen werden können. Wir werden darauf an anderer Stelle zurückkommen.

Etwas später, am 28. 9. 1927, kommt Hasse in seinem Tagebuch noch einmal auf die Artinsche Vermutung zu sprechen[12] und bemerkt folgendes: Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ und $\pi_q(x)$ die Anzahl derjenigen Primzahlen $p \leq x$, welche im Körper $\mathbb{Q}(\zeta_q, \sqrt[q]{a})$ zerfallen, dann würde es zum Beweis der Artinschen Vermutung genügen, zu zeigen dass

$$\frac{\pi_q(x)}{\pi(x)} < \frac{c}{q(q-1)} \qquad \text{für alle} \quad q,\, x$$

ist, wobei die Konstante c von q und x unabhängig ist.

[12] In der Zwischenzeit hatte Hasse an der DMV-Tagung in Bad Kissingen teilgenommen, die vom 18.-24. 9. stattfand. Artin war nicht in Bad Kissingen; er war überhaupt selten auf DMV-Tagungen.

Offenbar ist es dies, was Hasse in seinem Brief nach Reichenberg geschrieben hatte, und worauf Artin im vorliegenden Brief antwortet. Artin sagt, man müsse einmal die ganze Primzahltheorie mit $\pi(x) < ?$ durchackern und die Abschätzungen so gut wie möglich machen.

Artin schlägt vor, einen Doktoranden für dieses Thema zu interessieren und fragt an, ob Hasse vielleicht einen solchen Doktoranden habe. Erst einige Jahre später hat Hasse einem seiner Doktoranden, nämlich Herbert Bilharz, vorgeschlagen, die Artinsche Vermutung zu bearbeiten. Es stellte sich jedoch heraus, dass Bilharz beträchtliche Schwierigkeiten bei diesem Thema hatte; außerdem erfuhr Hasse durch Davenport, dass sich auch ein junger ungarischer Mathematiker namens Paul Erdös mit dem Thema beschäftigte und, wie es schien, schon beträchtliche Fortschritte erzielt hatte. Daher änderte Hasse das Thema für seinen Doktoranden Bilharz dahingehend ab, dass die entsprechende Frage für Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper bearbeitet werden solle. Nach einiger Zeit (und unter kräftiger Mithilfe von Hasse) konnte Bilharz dann das Analogon der Artinschen Vermutung für Funktionenkörper beweisen – unter Annahme der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper, die zwar damals noch nicht allgemein bewiesen war, jedoch später von A. Weil bestätigt wurde [Wei48]. Die Arbeit von Bilharz erschien 1937 in den Mathematischen Annalen [Bil37].[13]

Übrigens ist aus dem Ansatz von Erdös auch nichts geworden. In einem Brief an Hasse vom 14. 4. 1935 schreibt er:

> „*Ich habe meinen Beweis durchgedacht. Der Beweis beruht auf einem Satz, welcher – wie es mir scheint – eine Folge der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung ist. Um dies zu entscheiden, kenne ich die analytische Idealtheorie nicht genügend gut. Davenport hielt den Satz für wahrscheinlich, doch war er auch unschlüssig...*“

Später ist Erdös nicht mehr darauf zurückgekommen.

Im Falle von Bilharz, also in Funktionenkörpern, müssen andere Ansätze für die Dichte der betreffenden Primdivisoren genommen werden. Das war von Anfang an klar, weil sich nämlich die Automorphismengruppen von Einheitswurzelkörpern im Falle von Primzahlcharakteristik anders verhalten als bei Charakteristik 0. Aber auch in Zahlkörpern stellte sich schliesslich

[13] Nach seiner Promotion ging Bilharz bis 1945 an die Deutsche Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig. 1952 wurde er Professor für angewandte Mathematik in Würzburg; er starb 1956.

heraus, dass die von Artin vermutungsweise angegebene Dichte im allgemeinen nicht stimmt, sondern in einigen Fällen modifiziert werden muss, z. Bsp. wenn a eine Primzahl $\equiv 1 \bmod 4$ ist. Artin selbst hat diese Modifikation 1953 in einem Brief an Emma Lehmer vorgenommen, nachdem er von dieser informiert worden war, dass seine Vermutung nicht recht mit den numerisch berechneten Werten übereinstimmte.[14] Siehe dazu [Ste03].

Auch nach der Korrektur der zu erwartenden Primzahldichten hat sich die Artinsche Vermutung als sehr schwierig erwiesen. Es ist hier nicht der Ort, im einzelnen die Geschichte nachzuzeichnen. 1967 gelang es Hooley [Hoo67], die Vermutung unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung zu beweisen – jedoch ohne den von Erdös vermuteten Satz. (Bei Hooley handelt es sich um die klassische Riemannsche Vermutung, also nicht um das Analogon für Funktionenkörper.) Später gelang Heath-Brown [HB86] u.a. für Primzahlen „fast" ein Beweis, in dem Sinne, dass es höchstens 2 Primzahlen a gibt, für welche die Artinsche Vermutung falsch ist. Man weiß allerdings nicht, welches diese evtl. Ausnahmen sind, wenn es sie überhaupt gibt.

Zur Artinschen Vermutung siehe auch [Mur88]. Für Verallgemeinerungen verweisen wir auf [Len77].

17.3 Explizite Formeln für das Reziprozitätsgesetz

Artin erwähnt einen „letzten Brief" Hasses und daraus eine Formel „merkwürdiger Bauart", die schwer abzuleiten sei, so schwer, dass Artin sich „nicht daran gewagt" hätte. Und er fügt hinzu, er staune darüber, dass Hasse mit seinen aufwendigen Rechnungen durchgekommen ist.

Es ist nicht klar, um welche Rechnungen es sich dabei gehandelt hatte. Eine erste Interpretation wäre die, dass es sich um die Rechnungen zur Herleitung der oben angegebenen Formel (38) gehandelt hat. In der Tat erscheint (38) auf den ersten Blick als eine Formel „merkwürdiger Bauart". Andererseits ist (38) ja nur ein expliziter Ausdruck für die Formel (35), und Formeln dieser Bauart, die den ℓ-adischen Logarithmus enthalten, waren aus der Theorie der Reziprozitätsgesetze wohlbekannt. Hinzu kommt, dass Hasses Rechnung für $\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^{\ell^n}}\right)$ von Artin ja bereits in dem ersten Absatz seines Briefes erwähnt wird; zwischendurch, im 2. Absatz, behandelt er ein ganz

[14] Der Brief von Artin an Emma Lehmer ist in dem Nachlass von Lehmer an der Universität in Berkeley enthalten. Wir verdanken die Kenntnis dieses Briefes einer freundlichen Mitteilung von Peter Moree.

anderes Thema. Es ist nicht anzunehmen, dass Artin diese Dinge zweimal in seinem Brief kommentiert hat.

Wir neigen jetzt zu der folgenden Interpretation. Es handelt sich danach um einen Entwurf Hasses für seine Arbeit [Has29], in der er Formeln für den sogenannten Umkehrfaktor im Körper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ der ℓ^n-ten Einheitswurzeln herleitet, und zwar unter Zurückführung auf den bereits mit Artin erledigten zweiten Ergänzungssatz (siehe 17.1). Wir haben diesen Entwurf im Hasseschen Tagebuch gefunden, in zwei Einträgen vom 3. und 4. Oktober 1927, also etwa 3 Wochen vor der Antwort Artins, die ja am 27. 10. 1927 datiert ist. Wir nehmen demnach an, dass Hasse den Inhalt seiner Tagebuch-Eintragungen an Artin mitgeteilt hatte, und dass sich Artin in seiner Antwort darauf bezieht. Möglicherweise hatten Artin und Hasse am 13. September, also bei dem Besuch Artins in Halle, auch über das Problem des Umkehrfaktors diskutiert.

Schon im Brief Nr. 10 vom 21. 7. 1927 hatte Artin nach Formeln für den Umkehrfaktor gefragt; wir haben dort bereits auf die in Rede stehende Tagebucheintragung von Hasse und auf die daraus entstandene Arbeit [Has29] hingewiesen. Siehe 10.4.

Wir verzichten hier, im Detail auf Hasses Arbeit einzugehen und verweisen auf die Originalarbeit [Has29], insbesondere auf die dortige Formel (13), die in der Tat eine „merkwürdige Bauart“ besitzt. Zu diesem Ergebnis gelangte Hasse durch eine eingehende, detaillierte Durchführung des Eisensteinschen „eigentümlichen“ Rekursionsverfahrens. Artin hatte dieses Verfahren in seinem Brief Nr. 7 vom 10. 9. 1926 benutzt, war jedoch nur bis zum Exponenten $n = 2$ gelangt. Siehe 7.1. Wenn man nun die Hasseschen neuartigen und aufwendigen Rechnungen im einzelnen verfolgt, so erscheint es verständlich, wenn Artin jetzt sagt, dass er erstaunt sei, dass Hasse auf diesem Weg durchgekommen sei; er selbst (Artin) hätte das nicht gewagt.

Artin fügt hinzu, dass Hasse sicherlich schon weiter gekommen sei, und dass er auf Hasses nächsten Brief außerordentlich gespannt sei. Der nächste Brief Artins ist jedoch erst 10 Monate später datiert, und von dieser Arbeit Hasses ist weder darin noch später die Rede, außer einer kurzen Notiz im Brief Nr. 19 vom 4. 11. 1928, in dem Artin den Erhalt von Hasses Manuskript bestätigt und die baldige Publikation in den *Hamburger Abhandlungen* zusagt. Wir schließen daraus, dass Hasse doch nicht viel weiter gekommen war und sich nach Ablauf eines Jahres entschlossen hatte, die Sache so wie sie war zu publizieren.

Hasse hat sein Ergebnis aus dieser Arbeit nicht in Teil II seines Klassen-

körperberichts aufgenommen, lediglich für den Fall $n = 1$, wo es zu einer glatten Endformel kommt. Zum allgemeinen Fall $n > 1$ sagt er dort, dass eine glatte Endformel bisher nicht existiere, dass man aber immerhin „*auf diese Weise den Umkehrfaktor im ℓ^n-ten Kreiskörper für jeden speziell vorgelegten Primzahlpotenzexponenten ℓ^n beherrscht*“.

17.4 Minkowski und Einheitensatz

Als Beilage zu seinem Brief sendet Artin eine Präsentation des Einheitensatzes mit Hilfe der Minkowskischen Methode. Offenbar hatte ihn Hasse darum gebeten, wahrscheinlich als Vorlage für eine Vorlesung, denn Artin spricht an einer Stelle davon, dass man in einem Kolleg manches anders darstellen müsse, und an anderer Stelle sagt er, dass all dies doch eigentlich ganz gut zu verstehen sei. Der Artinsche Beweis enthält nichts, was damals nicht bekannt war, jedoch ist die Beweisanordnung im Vergleich mit anderen Lehrbuch-Darstellungen der damaligen Zeit hier dichter und übersichtlicher geworden. An einer Stelle sagt Artin selbst, dass dies doch wohl besser sei als bei den bisher üblichen Beweisen.

Möglicherweise war Hasse an der Artinschen Beweisanordnung deshalb interessiert, weil er sie für seine geplante Monographie über algebraische Zahlentheorie verwenden wollte. Wir wissen, dass Hasse eine 2-bändige Zahlentheorie plante, deren erster Teil eine Einführung in die algebraische Zahlentheorie auf der Basis der Henselschen p-adik enthalten sollte, während der zweite Band der Darstellung der Klassenkörpertheorie gewidmet wäre. Die Arbeit daran zog sich sehr in die Länge; der erste Band war erst 1938 fertiggestellt, konnte aber wegen verschiedener Hindernisse erst 1949 unter dem Namen „Zahlentheorie“ im Berliner Akademie-Verlag erscheinen [Has49]. Seitdem erlebte er mehrere Auflagen und Übersetzungen ins Englische und Russische. Der geplante zweite Band über Klassenkörpertheorie ist nie geschrieben worden. Das lag daran, dass sich das Bild der Klassenkörpertheorie in den zwanziger und dreißiger Jahren in stürmischer Weise verändert hatte, nicht zuletzt im Anschluss an die bahnbrechenden Arbeiten von Hasse selbst, die ganz neue Wege eröffneten.

Die Darstellung des Einheitensatzes in der Hasseschen „Zahlentheorie“ enthält dieselben Ideen wie sie auch Artin in diesem Brief entwickelt, ist jedoch angesichts des ganz eigenen Hasseschen Stils von anderer Art als die Artinsche Darstellung.

Kapitel 3

1928–1929

18 05.08.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, 5. August 1928

Lieber Herr Hasse!

Anbei Ihre Liste. *Nicht* erhalten haben davon in Ermangelung der Anschrift die angestrichenen Namen, also: Birkeland, Dickson, Rédei, Rychlík, Strassmann, A. Scholz, Tornier, Tschebotareff, Värman, Wilton, H. Wolff, Wusterhausen, Wiman, Walfisz. [1]

Die Versendung ist übrigens schon vor langer Zeit geschehen, ich habe nur immer vergessen die Liste zurückzusenden. Gleichzeitig habe ich Ihnen die Hälfte der übrig gebliebenen Separate zugesendet. Sie haben sie wohl inzwischen erhalten. Sie sind an das Seminar in Halle adressiert.

Ausser Ihrer Liste haben noch einige Herren, die auf der Durchreise hier waren, wie Radon, Delone etc. Separata erhalten.

Was macht der Bericht über die R[eziprozitäts]g[esetze]? Ich beneide Sie nicht um die Arbeit die Sie damit haben werden. [2]

Mathematisch habe ich von mir aus nichts Neues zu berichten. Vor ein paar Tagen hat Schreier eine Verallgemeinerung des Satzes von Jordan-Hölder über Kompositionsreihen bei Gruppen gefunden die für *beliebige* endliche oder unendliche Gruppen richtig ist, ohne jede Voraussetzung über die Gruppen. Es wird Sie wahrscheinlich interessieren:

Eine Normalteilerkette einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine Kette (endliche) von Untergruppen: $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_n = 1$, die mit $\mathfrak{G}$ beginnt, mit 1 schliesst und bei der $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}_\nu$ ist. (Weggelassen ist die Voraussetzung, dass $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ grösster Normalteiler von $\mathfrak{G}_\nu$ ist, denn einen solchen braucht es nicht zu geben.) Eine solche Kette gibt es natürlich immer, z.B. $\mathfrak{G}, 1$. Was unter einer Verfeinerung der Kette zu verstehen ist ist trivial; zwischen zwei Gliedern werden neue eingeschoben. Der Satz lautet nun:
„Sind zwei Ketten einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, so existieren Verfeinerungen, bei denen die sukzessiven Faktorgruppen, abgesehen von der Reihenfolge,

[1] Hasse hatte an Artin eine Liste geschickt mit Namen von Mathematikern, denen Separata der gemeinsamen Arbeit [AH28] über den zweiten Ergänzungssatz zugeschickt werden sollten. Die Arbeit war in den *Hamburger Abhandlungen* erschienen, die u.a. von Artin herausgegeben wurden. Die Arbeit kam in den Briefen Nr. 16 und Nr. 17 zur Sprache; seitdem sind fast 10 Monate vergangen. – Siehe auch die Liste weiterer Namen am Schluss des Briefes.

[2] Gemeint ist der Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichts . Siehe 10.5.

isomorph ausfallen.“

In diesem Satz sind alle bekannten Sätze über Kompositionsreihen enthalten. Hat nämlich $\mathfrak{G}$ wenigstens eine Kompositionsreihe, (also *mit* Maximalvoraussetzung), so ist diese definitionsgemäss nicht verfeinerungsfähig, jede andere Kette lässt sich also zu einer Kompositionsreihe verfeinern und für alle Kompositionsreihen gilt der Satz von Jordan-Hölder.

Ein gleiches gilt auch für Hauptreihen und charakteristische Reihen. Die Forderung, dass die Kette endlich sein soll, darf aber nicht weggelassen werden. Dann gibt es Gegenbeispiele (unendliche zyklische Gruppe).

Das ist doch die „wahre“ Formulierung des Satzes von Jordan-Hölder.[3]

Sind Sie eigentlich in den R[eziprozitäts]g[esetzen] weiter gekommen? Ihre Methode sieht so vielversprechend aus. Meine schüchternen Versuche darüber sind allerdings alle fehlgeschlagen.

Auch der gruppentheoretische Teil des Hauptidealsatzes trotzt noch immer allen Anstrengungen.[4]

Kommen Sie eigentlich zur Naturforschertagung nach Hamburg?[5] Hoffentlich! Ich darf Sie doch dann bitten mein Gast zu sein, wenn Sie mit meiner Junggesellenbude und den damit verbundenen kleinen Unbequemlichkeiten vorlieb nehmen wollen.

Darf ich bitten Ihrer Frau Gemahlin meine ergebenen Empfehlungen zu übermitteln und seien Sie selbst herzlichst gegrüsst.

Ihr Artin

Ich habe Separata auch noch verschickt an:

P. Alexandroff
F. Bernstein
Bochner
R. Brauer
Carathéodory
Lichtenstein
Mordell
Littlewood

---

[3]Siehe 18.1.
[4]Zum Hauptidealsatz siehe 13.1.
[5]Siehe 18.2.

Kommentare zum Brief Nr. 18:

18.1 Der Satz von Jordan-Hölder-Schreier

Der Satz von Jordan-Hölder hat im Laufe seiner Entwicklung mehrere Verfeinerungs-Stufen durchlaufen. Zuerst bewies C. Jordan 1870 in seinem „Traité des substitutions et des équations algébriques“ dass je zwei Kompositionsreihen einer endlichen Gruppe dieselbe Länge besitzen und ausserdem die Ordnungen der einfachen Faktorgruppen in jeder Reihe übereinstimmen (bis auf die Reihenfolge). Der Satz wurde 1889 verfeinert von O. Hölder in einer Arbeit in den Mathematischen Annalen [Höl89], dahingehend, dass nicht nur die Gruppenordnungen, sondern auch die Isomorphietypen der Faktorgruppen übereinstimmen. Statt der Endlichkeit der Gruppe kann dabei lediglich die Endlichkeit der Kompositionsreihen vorausgesetzt werden; der Beweis ist derselbe. Die dritte, von Schreier herrührende Stufe entstand 1928, und wie wir in dem vorliegenden Brief sehen, hat Artin sie als Neuigkeit sogleich Hasse mitgeteilt. Es wird nicht mehr die Endlichkeit der Länge einer Kompositionsreihe vorausgesetzt, sondern es werden lediglich zwei endliche Normalreihen miteinander verglichen. Schreier hat diesen seinen Satz noch im selben Jahr in den Hamburger Abhandlungen publiziert [Sch28].

Artin scheint sehr angetan von dem Satz und lobt ihn als den „wahren“ Satz von Jordan-Hölder. Wir würden dem zustimmen, gäbe es nicht noch eine weitere Verfeinerung dieses Satzes. Im Jahre 1934 erschien in den Hamburger Abhandlungen eine Arbeit von Zassenhaus, einem Doktoranden von Artin, mit dem Titel „Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier“ [Zas34]. Dort wurde gezeigt, dass es feste Formeln gibt für die Konstruktion der jeweiligen Verfeinerungen der beiden gegebenen Normalreihen. Dieser Satz wurde in das 1937 erschienene Gruppentheorie-Lehrbuch von Zassenhaus (das auf einer Vorlesung von Artin beruht) übernommen und dadurch weithin bekannt [Zas37]. Er gilt nicht nur im Rahmen der Gruppentheorie, sondern auch für Operatorgruppen, Moduln, Ideale und allgemein in Kategorien mit den entsprechenden Eigenschaften. Diese, bislang letzte Stufe des Satzes ist heute unter dem Namen „Jordan-Hölder-Schreier-Zassenhaus“ der Standard in den Lehrbüchern. Manchmal heisst der Satz auch das „Schmetterlingslemma“, weil das Gruppendiagramm, das zur Veranschaulichung der Zassenhausschen Formeln dient, an die Form eines Schmetterlings erinnert.

18.2 Die Hamburger Tagung 1928

Im September 1928 fand in Hamburg die Tagung der „Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte“ statt. Wie damals üblich, wurde parallel dazu die Jahrestagung der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (DMV) abgehalten, und zwar vom 16. bis 23. September. Hasses Name steht nicht auf dem Vortragsprogramm dieser Tagung, er hat demnach dort wohl keinen Vortrag gehalten. Sicherlich hat er aber an der Tagung teilgenommen. Denn Hasse gehörte zu den „Regelmäßigen“, wie ihn Emmy Noether einmal titulierte (in einem Brief vom 22. 8. 1931 an Hasse), d.h. er war regelmäßiger Besucher der DMV-Tagungen. Hinzu kommt, dass sich in Hasses Tagebuch Anfang Oktober, also kurz nach der Hamburger Tagung, einige Eintragungen finden mit dem Vermerk „*nach mündlicher Mitteilung von Artin*“ und eine weitere „*nach O. Schreier*“. Aus diesen Eintragungen können wir wohl schließen, dass Hasse kurz vorher, also im September, mit Artin und Schreier zusammengekommen war. Auch dies deutet darauf hin, dass Hasse an der Hamburger Tagung teilgenommen hatte.[6]

Allerdings konnten wir nicht feststellen, ob Hasse der Einladung Artins in seine „Junggesellenbude“ Folge geleistet hat.

18.3 Hasses Tagebuch-Eintragung

Eine der genannten Tagebuch-Eintragungen, datiert am 16. Oktober 1928, behandelt ein Thema, das auch in den Briefen Artins zur Sprache kommt. Die Eintragung trägt den Titel: „*Zum expliziten Reziprozitätsgesetz der ℓ-ten Potenzreste in ℓ-ten Kreiskörpern*“, mit der Bemerkung: „*Einer Anregung Artins zufolge ausgearbeitet*“. Wir können annehmen, dass sich diese Anregung in gemeinsamem Gespräch während der Hamburger DMV-Tagung ergeben hatte.

Es geht um den sog. *Umkehrfaktor* im Zusammenhang mit dem Reziprozitätsgesetz. Artin hatte danach gefragt in Punkt 5.) des Briefes Nr. 10 vom 21. 7. 1927. (Siehe 10.4.) Im ℓ-ten Kreiskörper wird der Umkehrfaktor durch das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{\lambda}\right)$ gegeben, und Hasse beschreibt in seinem Tagebuch eine Formel dafür (wobei α prim zu λ und $\beta \equiv 1 \bmod \lambda^2$). Hasse hatte schon in einer früheren Arbeit [Has25d] solche Formeln angegeben. Die Anregung von Artin ergibt eine Vereinfachung und gleichzeitige Verallgemeinerung. Da Hasse diese Formel nicht in seine Arbeit [Has29] und

[6] Vgl. auch unsere Fußnote 6 zum nächsten Brief Nr. 19 vom 4. 11. 1928.

auch nicht in den Teil II seines Klassenkörperberichts aufgenommen hat, so ist es vielleicht nicht uninteressant, sie hier zu nennen. Hasse betrachtet die folgende Situation:

ℓ eine ungerade Primzahl

ζ eine primitive ℓ-te Einheitswurzel

$\lambda = 1 - \zeta$ Primelement für den Primteiler von ℓ in $\mathbb{Q}(\zeta)$

S die absolute Spurfunktion in $\mathbb{Q}(\zeta)$

Die in Rede stehende Formel lautet nun:

$$(39) \qquad \left(\frac{\alpha\,,\beta}{\lambda}\right) = \zeta^{[\alpha\,,\beta]} \qquad \text{wobei} \qquad [\alpha\,,\beta] \equiv \frac{1}{\ell} S(\zeta \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \log\beta) \bmod \ell$$

falls α prim zu λ und $\beta \equiv 1 \bmod \lambda^2$. Hierbei bedeutet log den λ-adischen Logarithmus.

Der Nachdruck liegt dabei auf der Tatsache, dass für α keine Kongruenzbedingung verlangt wird, sondern nur, dass α prim zu λ ist. Wenn $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda$ ist, so kann $\frac{\alpha'}{\alpha}$ durch $\log\alpha$ ersetzt werden, sonst aber nicht, weil der λ-adische Logarithmus dann nicht definiert ist. α' ist definiert als die formale Ableitung von α nach ζ bei einer Darstellung $\alpha = \varphi(\zeta)$ als Polynom mit λ-ganzen Koeffizienten. Wenn α prim zu λ ist, so ist der Wert $\frac{\alpha'}{\alpha}$ modulo $\frac{\ell}{\lambda}$ eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Wahl der Darstellung $\alpha = \varphi(\lambda)$.

Wie es scheint, war Hasse von der einfachen Bauart dieser Formel und von der einfachen, eleganten Beweisidee Artins, die er auf der Hamburger Tagung kennengelernt hatte, so angetan, dass er sich in seinem Tagebuch eine Ausarbeitung anfertigte.

19 04.11.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 4. November 1928.

Lieber Herr Hasse!

Ich habe Ihr Manuskript erhalten, sowie die beiden Briefe und komme leider erst jetzt zur Beantwortung. Sie sind mir wohl nicht böse, wenn ich mit Schreibmaschine schreibe, aber dies ist der letzte Versuch, wirksam gegen meine Schreibfaulheit anzugehen, die ja vor allem einer grossen Unlust gegen den Akt des Schreibens entspringt. Ich hoffe dass es jetzt etwas besser mit mir werden wird. Ich verspüre wenigstens bis jetzt noch keine Unlust gegen das Schreiben auf der Maschine. Hoffentlich bleibt das so.

Ihr Manuskript geht bald in die Druckerei und dann erhalten Sie auch bald die Korrekturen.[1]

Was Ihre Bemerkungen zum Teil II Ihres Berichtes betrifft, so bin ich ganz Ihrer Meinung. Insbesondere was den Tschebotareffschen Beweis angeht. Er hat den Vorzug gegen meinen, relativ elementar zu sein, während meiner wieder den Vorzug hat, abgesehen davon dass eine Kleinigkeit mehr heraus kommt, mit denselben Mitteln zu arbeiten, wie man das seit Dirichlet gewohnt ist. Auch ich würde beide aufnehmen.[2]

Ihre Darstellung des Beweises des Reziprozitätsgesetzes finde ich sehr schön; in meiner allerersten Fassung, die Sie nicht kennen, hatte ich dem Hilfssatz auch eine ähnliche Fassung gegeben, fand aber dann, dass der Beweis für Primzahlen einfacher zu führen ist und dass dies genügt, wenn man dafür den Hilfssatz zweimal anwendet. So wie Sie es dargestellt haben, ist der Beweis aber noch einfacher. Allerdings möchte ich nun noch erwähnen, dass man beim Beweis des Hilfssatzes von der Klassenkörpertheorie keinen Gebrauch zu machen braucht. Ich weiss nicht ob ich schon gelegentlich Ihres Hierseins[3] mit Ihnen darüber gesprochen habe.[4]

---

[1] Es handelt sich um das Manuskript der neuen Arbeit [Has29] mit dem Titel „Zum expliziten Reziprozitätsgesetz", das 1929 in den Hamburger Abhandlungen erscheinen soll. Siehe 10.4 und 17.3.

[2] Siehe 19.1.

[3] Hasse hatte im September an der DMV-Tagung in Hamburg teilgenommen und dabei Artin getroffen. Siehe 18.2.

[4] Es handelt sich um denjenigen zahlentheoretischen Hilfssatz, den Artin in seinem Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes verwendet hatte, und den Hasse nun in mo-

Von Scholz habe ich nichts gehört, kenne also auch seine Ergebnisse nicht. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir schreiben könnten worum es sich dabei handelt.[5] Furtwängler hat mir übrigens geschrieben, dass er doch nicht mehr an die allgemeine Gültigkeit seines *verallgemeinerten* Hauptidealsatzes, also an den Hauptidealsatz in geeigneten Unterkörpern (Sie erinnern sich wohl daran), glaubt.[6] Er hat nämlich ein gruppentheoretisches Gegenbeispiel gefunden; das besagt natürlich nichts gegen den Satz, da man den Existenzsatz ja doch nicht hat. Es ist aber doch sehr wahrscheinlich, dass der Satz falsch ist.[7]

Was die Korrektur der Arbeit von Furtwängler betrifft, so erhalten Sie morgen ein Exemplar zugeschickt. Sie kennen ja noch die Hauptberichtigung die man vornehmen muss. Herr Schreier und ich haben alles geprüft, es ist nun alles in Ordnung.[8]

Mit den besten Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

---

difizierter Form in seinen Klassenkörperbericht II aufnehmen wollte. Wir verweisen dazu auf 9.3.

[5]Siehe 20.1.

[6]Da Artin fragt, ob sich Hasse wohl noch daran erinnert, so können wir vielleicht daraus schließen, dass er zu Hasse während ihres Zusammentreffens auf der Hamburger DMV-Tagung im September 1928 darüber gesprochen hat. Siehe 18.2.

[7]Zum „verallgemeinerten Hauptidealsatz" siehe 21.1.

[8]Hier handelt es sich um die Arbeit von Furtwängler mit dem Beweis des Hauptidealsatzes [Fur29]. Siehe 13.1.3. Die Arbeit erschien in den Hamburger Abhandlungen, und Artin hatte die Korrekturbögen als Herausgeber erhalten. Damals wurden solche Korrekturen zur Information an interessierte Mathematiker geschickt, denn es gab noch keine „Preprints". Wie wir hier erfahren, befanden sich in dem ursprünglichen Beweis von Furtwängler einige Unstimmigkeiten, die dann von Artin und Schreier in Ordnung gebracht worden waren.

Kommentare zum Brief Nr. 19:

19.1 Zum Dichtigkeitssatz

Wenn Artin von dem „Tschebotareffschen Beweis“ spricht, so meint er ersichtlich den Beweis des Tschebotareffschen Dichtigkeitssatzes. Offenbar hatte Hasse ihm mitgeteilt, in welcher Form er (Hasse) diesen Beweis in seinem Klassenkörperbericht II [Has30a] darstellen wolle. Wenn Artin in diesem Zusammenhang von „*meinem Beweis*“ spricht, dann meint er denjenigen Beweis des Dichtigkeitssatzes, den er in seiner L-Reihenarbeit [Art23b] gegeben hatte, als Folgerung aus seinem allgemeinen Reziprozitätsgesetz. Damals hatte er allerdings sein allgemeines Reziprozitätsgesetz noch nicht voll bewiesen, aber nunmehr, da das allgemeine Reziprozitätsgesetz gesichert ist, so ist auch sein früherer Beweis des Dichtigkeitssatzes gesichert. Artin sagt, dass bei seinem Beweis „*etwas mehr herauskommt*“. Das betrifft wohl die Abschätzung des Restgliedes. Und mit der Formulierung: „*dieselben Mittel, wie man das seit Dirichlet gewohnt ist*“ meint Artin die Heranziehung der L-Reihen. Diese hatte ja Dirichlet definiert und benutzt, um unendlich viele Primzahlen in einer arithmetischen Progression nachzuweisen und deren Dichte zu bestimmen. Allerdings werden bei Artin jetzt seine neuartigen L-Reihen benutzt, die er in seiner L-Reihenarbeit [Art23b] eingeführt hatte, und die einer beliebigen galoisschen, nicht notwendig abelschen Zahlkörpererweiterung zugeordnet sind.

Hasse hatte offenbar ins Auge gefasst, in seinen Klassenkörperbericht II beide Beweise aufzunehmen: sowohl den „relativ elementaren“ von Tschebotareff als auch den auf der Klassenkörpertheorie beruhenden von Artin. Schließlich aber hat er sich dann doch entschieden, nur einen Beweis zu bringen, nämlich i.w. den von Artin. Er sagt dazu in [Has30a]:

> „*Für mich ist es hier in diesem Bericht das Gegebene, mich auf die Klassenkörpertheorie und das Artinsche Reziprozitätsgesetz zu stützen.*“

Er vergleicht jedoch in §24 seines Berichts den von ihm dargestellten Beweis mit den Beweisen von Tschebotareff [Che26] und von Schreier [Sch26b].

20 14.11.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 14. November 1928.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für die freundliche Mitteilung der Scholz'schen Ergebnisse über Hauptidealisierung in Unterkörpern des Klassenkörpers. Sie haben mich sehr interessiert; natürlich kann ich dazu nicht sehr viele Bemerkungen machen.[1] Namentlich hat mich das Ergebnis über den imaginär quadratischen Körper interessiert und zwar aus folgendem Grunde:

Sie schreiben: „Für einen imaginär quadratischen Körper wird in einem Unterkörper ℓ-ten Grades des ℓ-Klassenkörpers nur eine Untergruppe ℓ-ter Ordnung von ℓ-Klassen zur ℓ-Hauptklasse.“ [2] Ist das nun bewiesen oder eine Vermutung? Ich habe zunächst keine Idee, wie man aus der Tatsache, dass der Grundkörper imaginär quadratisch ist, Schlüsse ziehen kann, insbesondere Schlüsse über die Gruppe des zweiten Klassenkörpers. Allerdings kann es ja sein, dass die Beweise die komplexe Multiplikation benutzen. Dann aber ist es interessant, dass die komplexe Multiplikation Sätze liefert, die allem Anschein nach über die Gruppe des zweiten Klassenkörpers Aufschluss geben. Denn der behauptete Satz ist ja doch nicht für alle Gruppen richtig. Die weiterhin in diesem Abschnitt geäusserten Vermutungen bedeuten ja auch Aussagen über die erwähnte Gruppe und ich sehe zunächst noch nicht wie man solche Aussagen anders als auf dem Wege der komplexen Multiplikation gewinnen kann. Jedenfalls ist das das erste Ergebnis in dieser Richtung. Es kann aber natürlich auch sein, dass das recht einfach zu gewinnen ist und ich es nur wieder einmal nicht sehe. Es würde mich sehr interessieren, zu erfahren, auf welchem Wege dieser Satz gewonnen wurde. Folgt vielleicht doch schon der Satz, wenn man von der Tatsache Gebrauch macht, dass sich die ganze Gruppe zu einer nicht-abelschen Gruppe doppelter Ordnung erweitern lassen muss? Ich glaube nicht, denn dann würde der Satz ja auch für reell quadratische Körper gelten.

Heute ging Ihr Manuskript in die Druckerei[3]. Sie werden also bald die Korrekturen bekommen. Gleichzeitig habe ich eine Arbeit von mir hinge-

[1] Siehe 20.1.2.

[2] Zu dem Satz über imaginär-quadratische Grundkörper siehe 20.1.3.

[3] Es handelt sich um dasselbe Manuskript, das schon im vorangegangenen Brief Nr. 19 vom 4. 11. 1928 erwähnt wurde. Vgl. die dortige Fußnote 1.

bracht, betitelt „Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz“. Es betrifft die sich an den Hauptidealsatz anschliessenden Fragen, die Sie ja zum grössten Teil schon kennen.[4] Allerdings sind nun manche Dinge neu hinzugekommen, welche den ganzen Stoff abgerundet haben. Es zeigt sich, dass alle Fragen über beliebig gegebene Körper mit ganz beliebig gegebener Klasseneinteilung mit den gleichen Mitteln zu behandeln sind und anderes. Alles dies folgt natürlich aus dem gleichen Ansatz und ist mit diesem eigentlich schon gegeben. Es war aber doch notwendig, diese Fragen in voller Allgemeinheit einmal zu behandeln, da ja der eine Abschnitt bei Furtwängler[5] zu speziell auf den Hauptidealsatz zugeschnitten ist. Sobald die Korrekturen da sind, schicke ich Ihnen ein Exemplar.[6]

Nun noch eines zu Ihrem Bericht. Es wäre eigentlich schade, wenn Sie den Furtwänglerschen Beweis in den Bericht nicht aufnehmen könnten. Darf ich den Vorschlag machen, doch den Spezialfall von drei Basisklassen zu behandeln, der die Dinge ja vollständig zeigt und der einfach und kurz genug ist. Natürlich nur, wenn Sie sich nicht doch entschliessen, den ganzen Beweis aufzunehmen.[7]

Mit herzlichen Grüssen und einer Empfehlung an Frau Gemahlin

Ihr Artin

---

[4] Es handelt sich um das Manuskript zur Arbeit [Art29]. Artin hatte seine Ideen dazu schon in einem früheren Brief dargestellt, vgl. Brief Nr. 13 vom 2. 8. 1927, insbesondere Abschnitt 13.1.5.

[5] Hier bezieht sich Artin auf die Arbeit [Fur29] von Furtwängler, in welcher der Hauptidealsatz bewiesen wird.

[6] Artins Arbeit [Art29] erschien 1929 in den Hamburger Abhandlungen, unmittelbar nach der Furtwänglerschen Arbeit [Fur29].

[7] Hasse hat sich schliesslich dazu entschlossen, den Furtwänglerschen Beweis des Hauptidealsatzes in seinen Klassenkörperbericht II [Has30a] aufzunehmen – allerdings nur so weit, „*dass das Gerüst des Beweises klar zutage tritt*“. Die enorme Vereinfachung des Beweises durch Artin und Iyanaga [Iya34] war zum Zeitpunkt der Herausgabe des Klassenkörperberichts II noch nicht verfügbar. Vgl. Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931 und 38.3.

Kommentare zum Brief Nr. 208:

20.1 Arnold Scholz

Artin hatte im vorangegangenen Brief Nr. 19 darum gebeten, ihm die Resultate von Arnold Scholz mitzuteilen. Wir wissen nicht genau, was Hasse nunmehr an Artin über die damals neuesten Resultate von Scholz geschrieben hatte. Es ist jedoch anzunehmen, dass es sich um diejenigen Resultate handelte, die sich in den beiden Briefen finden, die Hasse kurz davor von Scholz erhalten hatte; jene Briefe sind am 15. und 24. 10. 1928 datiert. Es geht in diesen Briefen um die im folgenden genannten drei Themenkreise.

20.1.1 Klassenkörperturmproblem

Wir erinnern daran, dass sich Artin schon vor mehr als einem Jahr zum Klassenkörperturmproblem geäußert hatte, nämlich in dem Brief Nr. 15 vom 19. 8. 27. Damals meinte Artin, dass es sich dabei im Gegensatz zum Hauptidealproblem nicht um eine gruppentheoretische Frage handelt, sondern dass „*erst die spezielle arithmetische Struktur des Grundkörpers den Ausschlag geben wird.*“ Das können wir so interpretieren, dass es nach Artins Meinung wohl Körper mit unendlichem, aber auch solche mit endlichem Klassenkörperturm geben könne, abhängig eben von der arithmetischen Struktur des Körpers. Siehe 15.1.

Scholz zeigt nun in seinem Brief zwar nicht, dass es Zahlkörper mit unendlichem Klassenkörperturm gibt, aber immerhin konstruiert er Körper K mit einem beliebig hohen Klassenkörperturm. Wir haben das schon in 15.1.2 erwähnt. Es ist bemerkenswert, dass die Scholzsche Konstruktion, obwohl sie das Klassenkörpertumproblem nicht löst, tatsächlich *nicht* gruppentheoretischer Natur ist, sondern auf der Konstruktion von Körpern mit speziellen arithmetischen Eigenschaften beruht – so wie es Artin vorgeschwebt hatte.

Genauer: Scholz betrachtet nicht den vollen Klassenkörperturm, sondern den Turm der ℓ-Klassenkörper für eine fest gewählte Primzahl ℓ. (Der ℓ-Klassenkörper ist der maximale unverzweigte abelsche Körper mit ℓ-Potenzgrad.) Die Konstruktion verläuft wie folgt: Es bezeichne K_p^ℓ den zyklischen Körper ℓ-ten Grades im Körper der p-ten Einheitswurzeln, wobei p als Primzahl $\equiv 1 \bmod \ell$ angenommen wird. Der Reihe nach gibt nun Scholz für die Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_{n+1}$ gewisse ℓ-Potenzrestbedingungen an, die garantieren, dass das Kompositum $\overline{K} = K_{p_1}^\ell \cdots K_{p_{n+1}}^\ell$ einen mindestens n-stufigen ℓ-Klassenkörperturm besitzt. Und, so sagt Scholz, dasselbe gilt für jeden zyklischen

Teilkörper $K \subset \overline{K}$, in dem alle $p_1, \ldots, p_{n+1}$ verzweigt sind, denn der erste ℓ-Klassenkörper von K ist $\overline{K}$.

Hasse hat dann diese Arbeit von Scholz in das Crellesche Journal aufgenommen [Sch29b]. Zur weiteren Entwicklung des Klassenkörperturmproblems siehe 15.1.

20.1.2 Kapitulationsproblem

In der Scholzschen Konstruktion, wie sie im vorangegangenen Abschnitt geschildert wurde, wurden an die Primzahlen p_i gewisse Potenzrestbedingungen gestellt. Wenn man nun stattdessen geeignete Nichtrestbedingungen stellt, so „*wird man vermuten*“, schreibt Scholz an Hasse, „*dass man dadurch zu einem niedrigen Klassenkörperturm gelangen kann.*“ In der Tat gelingt es Scholz, durch geeignete Bedingungen an p_1, p_2, p_3 zu erreichen, dass schon ein dreifaches Kompositum $\overline{K} = K^{\ell}_{p_1} K^{\ell}_{p_2} K^{\ell}_{p_3}$ die ℓ-Klassenzahl 1, also einen 0-stufigen ℓ-Klassenkörperturm besitzt.

Daraus schließt er dann, dass jeder zyklische Teilkörper $K \subset K^{\ell}_{p_1} K^{\ell}_{p_2} K^{\ell}_{p_3}$, in welchem p_1, p_2, p_3 verzweigen, die folgende Eigenschaft besitzt:

> *Der ℓ-Klassenkörper von K ist $\overline{K}$, und in jedem über K zyklischen Teilkörper $K' \subset \overline{K}$ kapitulieren schon alle ℓ-Idealklassen*[8] *von K d.h. sie werden zu Hauptidealen.*[9]

Offenbar hatte ihn Hasse gefragt ob es möglich sei, dass schon in einem echten Teilkörper des Hilbertschen Klassenkörpers die volle Idealklassengruppe kapituliert, und Hasse wünschte Beispiele dafür. Durch die oben beschriebene Konstruktion hatte Scholz nun Hasses Frage beantwortet. Im Falle $\ell = 2$ war übrigens ein Grundkörper mit den gewünschten Eigenschaften bereits bekannt, nämlich schon 1916 hatte Furtwängler [Fur16] dafür den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ angegeben. Deshalb fragte Hasse jetzt insbesondere nach einem kubischen Beispiel.

Die Scholzschen Beispiele beziehen sich auf eine beliebige Primzahl $\ell > 2$; insbesondere aber für $\ell = 3$ findet Scholz auf diese Weise einen kubischen Körper K, dessen 3-Klassengruppe nichtzyklisch der Ordnung 9 ist, die aber bereits in einer zyklischen Erweiterung vom Grad 3 vollständig kapituliert.

[8] D.h. Idealklassen von ℓ-Potenzordnung.

[9] Die Terminologie „kapitulieren“ für „zu einem Hauptideal werden“ ist heute allgemein üblich; sie stammt wohl von Arnold Scholz, wie Kisilevsky in seinem Nachruf [Kis97] auf Olga Taussky-Todd berichtet.

Scholz publizierte seine Resultate auf Anraten von Hasse im Crelleschen Journal [Sch29b]. Fast zeitgleich erschien eine Arbeit von Pollaczek [Pol29], die ebenfalls Beispiele für beliebiges $\ell > 2$ enthält.

Zur Frage, ob schon in einem Teilkörper des Hilbertschen Klassenkörpers die volle Idealklassengruppe kapituliert, siehe auch etwa [Iwa89a], [Iwa89b].

20.1.3 Imaginär-quadratische Grundkörper

Wenn Artin zu den Scholzschen Resultaten schrieb: „*natürlich kann ich dazu nicht sehr viele Bemerkungen machen*“, dann handelte es sich wahrscheinlich um diejenigen Resultate von Scholz, die wir in den vorangegangenen beiden Abschnitten 20.1.1 und 20.1.2 besprochen haben. Zu einem weiteren Thema macht er aber dann doch noch einige Bemerkungen, nämlich zu dem Satz über die Kapitulation von Idealen bei *imaginär-quadratischem Grundkörper*. In jeder zyklischen unverzweigten Erweiterung ℓ-ten Grades, so lautet der Satz von Scholz, kapitulieren dann genau ℓ Idealklassen.

Bei diesem Ergebnis geht es also ebenfalls um die Kapitulation von Idealen in einem Teilkörper des Klassenkörpers, wie schon bei dem Problem, das wir in dem vorangegangenen Abschnitt 20.1.2 dargestellt haben. Aber jetzt lautet die Frage nicht, ob in einem Teilkörper viele oder gar alle Ideale des Grundkörpers kapitulieren, sondern es geht darum, Beispiele zu finden, in denen *nicht zu viele* Ideale kapitulieren. Im vorliegenden Falle also kapitulieren nur genau so viel Idealklassen, wie der Grad des betr. Teilkörpers beträgt – vorausgesetzt, dass der Teilkörper zyklisch vom Grad ℓ über dem imaginär-quadratischen Grundkörper ist.

Artin fragt ob dies eine Vermutung oder eine Behauptung sei.

Artin begegnet dieser Frage zunächst gruppentheoretisch; dies entspricht seinem Ansatz, den er in seinem Brief Nr. 13 vom 2. 8. 1927 auseinandergesetzt hatte. (Siehe 13.1.2.)[10] Die gruppentheoretische Strukturaussage, die Artin im Auge hat, bezieht sich auf die Galoisgruppe G des zweiten ℓ-Klassenkörpers . Dies ist eine zweistufig metabelsche ℓ-Gruppe. Die Behauptung über die Kapitulation in einer zyklischen unverzweigten ℓ-Erweiterung des Grundkörpers läßt sich nun nach dem Artinschen Ansatz gruppentheoretisch wie folgt formulieren:

Ist $H \subset G$ eine Untergruppe mit zyklischer Faktorgruppe G/H, so besitzt der Kern der Verlagerungsabbildung $V : G^{ab} \to H^{ab}$

[10] Übrigens erwähnt Artin in dem jetzt vorliegenden Brief, dass er jenen Ansatz etwas ausgearbeitet und nunmehr zur Publikation gebracht habe; siehe Fußnote 4.

die genaue Ordnung $(G : H)$.

Dabei bezeichnet G^{ab} die maximale abelsche Faktorgruppe von G. Dieser Satz ist nicht für alle zweistufig metabelschen ℓ-Gruppen richtig, er bedeutet also eine erhebliche Einschränkung der möglichen Gruppen, die als Galoisgruppen des zweiten ℓ-Klassenkörpers über einem imaginär-quadratischen Körper realisierbar sind.

Artin kann sich nun nicht vorstellen, dass man aus der Tatsache, dass der Grundkörper imaginär-quadratisch ist, einen solchen gruppentheoretischen Satz für die Gruppe G herleiten kann. Es sei denn, man würde die Theorie der komplexen Multiplikation benutzen.

In dem Brief von Scholz an Hasse vom 15. 10. 1928 findet sich nun der in Rede stehende Satz mit einer Begründung, die nicht gruppentheoretisch ist, sondern sich direkt auf die arithmetische Struktur der imaginär-quadratischen Körper bezieht. Scholz schreibt:

> „*Ist nun der Grundkörper* K *ein imaginär–quadratischer Zahlkörper, so wird wegen Fehlens von Einheiten in* K *in einem Unterkörper* ℓ*-ten Grades des Klassenkörpers von* K *nur eine Untergruppe* ℓ*-ter Ordnung von Idealklassen aus* K *zum Hauptideal.*“

Damit wird Artins Frage beantwortet, nämlich: der Scholzsche Satz ist eine Folge des „Fehlens von Einheiten“; gemeint ist natürlich das Fehlen von Einheiten unendlicher Ordnung. Das hat direkt nichts mit komplexer Multiplikation zu tun. Offenbar hat Hasse dies in einem weiteren Brief an Artin erklärt, was wir aus Artins Reaktion in seinem übernächsten Brief Nr. 22 vom 19. 11. 1928 entnehmen (siehe 22.1).

Als numerisches Beispiel diskutiert Scholz in seinem Brief an Hasse den imaginär-quadratischen Grundkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-4027})$, dessen 3-Klassengruppe vom Typus $(3, 3)$ ist. Diese Diskussion führt er später gemeinsam mit Olga Taussky fort; sie mündet 1934 in die Arbeit [ST34].

Bemerkung: Dass die Kapitulation mit der Einheitengruppe E zusammenhängt, geht schon aus Hilberts Beweis des Satzes 94 in seinem Zahlbericht hervor; siehe dort Satz 92. Iwasawa hat gezeigt, dass für eine unverzweigte Erweiterung $K|k$ die Gruppe $H^1(G, E)$ isomorph ist zu der Gruppe der in K kapitulierenden Idealklassen von k [Iwa56].

21 18.11.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 18. November 1928.

Lieber Herr Hasse!

Ich möchte Ihnen kurz einiges über die Hauptidealisierung in Unterkörpern des Klassenkörpers mitteilen, wenn auch nur negatives.[1] Furtwängler hat mir geschrieben und die fragliche Gruppe mitgeteilt. Es handelt sich um folgende: Drei Erzeugende S_1, S_2, T. Es ist dabei T der Kommutator von S_1 und S_2, ist mit den beiden anderen Elementen vertauschbar und es ist $S_1^4 = T,\ S_2^2 = 1$. Also besteht die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe aus 8 Elementen vom Typus 4,2. Es handelt sich also um eine sehr einfache Gruppe der Ordnung 16 und ich versuchte nun einen imaginär quadratischen Körper zu finden, bei dem dieser Sachverhalt eintrifft. Das geht nun in der Tat, denn der erste Körper, für den die Klassengruppe vom Typus 2,4 ist, hat schon diese Eigenschaft. Es handelt sich um $k = R(\sqrt{-65})$. Sein Klassenkörper vom Relativgrad 8 hat schon die gesuchte Eigenschaft, dass in *keinem* seiner Unterkörper *irgend* eine Klasse der Ordnung 4 zum Hauptideal wird; es ist dies erst in K selbst der Fall. Man kann auch noch zeigen, dass auf jeden Fall der zweite 2-Klassenkörper von k die oben angegebene Gruppe hat. Man weiss auch noch, dass dieser zweite 2-Klassenkörper der volle erste Klassenkörper für jeden relativ quadratischen Unterkörper mit je der Klassenzahl 8 und auch noch des Geschlechterkörpers mit der Klassenzahl 4 ist. Alle diese Eigenschaften lassen sich durch sehr wenig Rechnung zeigen, und ergeben sich fast von selbst unter Benutzung der relativ quadratischen Unterkörper. Es ist natürlich nicht so sehr wichtig ein Gegenbeispiel zu haben, aber vielleicht leistet der Körper gelegentlich noch mehr bei der Widerlegung analoger Vermutungen. Aus diesem Grunde habe ich Ihnen geschrieben.

In meinem letzten Brief stellte ich eine Anfrage bezüglich der imaginär quadratischen Körper.[2] Ich bemerke eben, dass sich die dort angegebene Behauptung, wenn sie sich beweisen lässt, nur auf $\ell \neq 2$ beziehen kann. Denn sonst gäbe es Gegenbeispiele. Ich muss auch noch sagen, dass ich diesen Satz

---

[1] Zum folgenden Absatz siehe 21.1.

[2] Dazu siehe 20.1.3. Offenbar hat Artin den vorliegenden Brief geschrieben, ohne die Antwort von Hasse auf seine im vorangegangenen Brief gestellte Frage betr. imaginär quadratische Grundkörper abzuwarten. Erst am nächsten Tag, dem 19. November 1928, erhielt er Hasses Antwort, und er schickte dann sofort wieder eine Rückantwort an Hasse. Vgl. Brief Nr. 22 vom 19. 11. 1928.

bezweifle, falls er nicht etwa schon bewiesen ist. Er erscheint mir noch ein bisschen unwahrscheinlich. Aber ich werde es ja von Ihnen hören, was mit dem Satz los ist. Sonst nichts neues.

Recht herzliche Grüsse und eine Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin,

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr. 21:

21.1 Furtwänglers Vermutung

Schon im Brief Nr. 19 vom 4. 11. 1928 hatte Artin einen „*verallgemeinerten Hauptidealsatz*" erwähnt, den Furtwängler einmal vermutet hatte, aber an den jener jetzt nicht mehr glaube. Allerdings erläutert Artin diese vermutete Verallgemeinerung nicht genauer, er schreibt nur dass es sich um „*den Hauptidealsatz in geeigneten Teilkörpern*" handelt. Artin setzt offenbar voraus, dass Hasse sich daran erinnert. Auch Scholz spricht in einem Brief vom 15. 10. 1928 an Hasse von einem vermuteten „verschärften Hauptidealsatz" von Furtwängler, ohne allerdings diesen genauer zu formulieren. Es scheint sich also um eine damals bei den Fachleuten allgemein bekannte Vermutung gehandelt zu haben.

In seinem Klassenkörperbericht II [Has30c] spricht nun Hasse von der Vermutung,

> „*dass sich der im absoluten Klassenkörper zum Abschluss kommende Prozess des Hauptidealwerdens in den Teilkörpern derart vorbereitet, dass in jedem Teilkörper vom Grade n eine Untergruppe der Klassengruppe des Grundkörpers der Ordnung n in die Hauptklasse fällt.*"

Und im Anschluss daran berichtet Hasse, dass Furtwängler diese Vermutung in einigen Spezialfällen bestätigt habe. Ist dies also der von Artin und Scholz erwähnte, von Furtwängler vermutete „verallgemeinerte Hauptidealsatz"?

Der Sachverhalt klärt sich auf, wenn man einen Brief von Furtwängler an Hasse vom 23. August 1930 heranzieht. Zu diesem Zeitpunkt hatte Hasse seinen Klassenkörperbericht II fertiggestellt, und er hatte die Druckfahnen auch an Furtwängler nach Wien geschickt mit der Bitte um Meinungsäußerung. In seiner Antwort teilte Furtwängler nun mit, dass es sich um zwei verschiedene Vermutungen zum Kapitulationsproblem handele – je nachdem wie der Text, den wir oben zitiert haben, interpretiert wird. Es geht um eine unverzweigte[3] abelsche Körpererweiterung $K|k$ und die Gruppe C derjenigen Idealklassen von k, welche in K kapitulieren. Die erste Version der Furtwänglerschen Vermutung behauptet nun,[4]

[3] Einschließlich der unendlichen Stellen.

[4] Die Bezeichnungen sind unsere; Furtwängler benutzt andere.

> *dass die Ordnung von C* mindestens *so groß ist wie der Körpergrad, also $|C| \geq [K : k]$.*

Hierzu schreibt Furtwängler am 23. August 1930: „*Ich halte diese Vermutung auch heute noch für richtig.*" Diese Version kann also nicht diejenige sein, die Artin in seinem Brief Nr. 19 gemeint hatte, als er schrieb, Furtwängler glaube nicht mehr an die Gültigkeit.

Immerhin wissen wir heute, dass diese erste Vermutung inzwischen verifiziert worden ist. Wenn $K|k$ zyklisch ist, dann handelt es sich um den Hilbertschen „Satz 94", genauer: um den verallgemeinerten Hilbertschen Satz 94, denn Hilbert betrachtet nur den Fall dass der Körpergrad $[K : k]$ eine ungerade Primzahl ist. Es hat jedoch lange gedauert bis diese Furtwänglersche Vermutung (also die erste Version) allgemein bewiesen wurde, d.h. auch für nichtzyklische Körper. Der Beweis wurde erst 1991 durch Suzuki [Suz91] gegeben, und zwar in der gruppentheoretischen Formulierung, die Artin dieser Frage in seiner Arbeit [Art29] gegeben hatte (und auch in dem Brief an Hasse vom 2. 8. 1927), nämlich:

> *Es sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe, die die Kommutatorgruppe von G enthält. Die Ordnung des Kerns C der Verlagerungsabbildung $V : G^{ab} \to H^{ab}$ ist dann mindestens gleich dem Gruppenindex $(G : H)$, also $|C| \geq (G : H)$.*

Es scheint jedoch in Vergessenheit geraten zu sein, dass diese Vermutung von Furtwängler stammt.

Die zweite Version der Furtwänglerschen Vermutung lautete nun, wie er selbst an Hasse schreibt,

> *dass, jedenfalls im zyklischen Fall, die Gruppe C mindestens eine zyklische Untergruppe der Ordnung $[K : k]$ enthält, dass also der* Exponent *von C mindestens so groß ist wie der Körpergrad.*

Es war diese zweite Vermutung, die Furtwängler nicht aufrechterhalten konnte; er schreibt dazu an Hasse am 23. August 1930:

> „*Ich hielt diese Vermutung deshalb für richtig, weil ich annahm, dass sich die Theorie der Relativgrundeinheiten in genügendem Umfang vom Fall einer Primzahl ℓ auf den Fall einer Primzahlpo-*

> *tenz ℓ^e übertragen liesse. Das ist aber nicht der Fall.*[5] *Zur Widerlegung der angegebenen Vermutung habe ich dann eine passende Gruppe aufgesucht, zu der Artin einen zugehörigen Körper gefunden hat.*"

Gemeint ist dabei eine zweistufig metabelsche Gruppe, die als Galoisgruppe des zweiten Klassenkörpers eines geeigneten Grundkörpers realisiert werden könnte. In dem vorliegenden Brief beschreibt also Artin diese Gruppe, die Furtwängler gefunden und ihm dann mitgeteilt hatte. Und ebenso beschreibt er den von ihm (Artin) aufgefundenen zugehörigen Grundkörper, nämlich $\mathbb{Q}(\sqrt{-65})$.

In einer späteren Arbeit [Fur32] ist Furtwängler noch einmal auf dieses Thema im Falle einer 2-elementaren Klassengruppe zurückgekommen, und seine Schülerin Olga Taussky hat dies für Primzahlen $\ell > 2$ diskutiert [Tau32]. Abschliessende Ergebnisse dazu wurden jedoch nicht erzielt. Siehe dazu auch 31.4.

Das Problem der Kapitulation von Idealen des Grundkörpers in Teilkörpern des Klassenkörpers hat danach mehrere Generationen von Mathematikern beschäftigt. Einen Überblick über die reichhaltige Literatur geben Miyake [Miy89] und Jaulent [Jau88]. Auch in dem Nachruf von Kisilevsky für Olga Taussky-Todd [Kis97] findet sich eine Reihe von historischen Angaben zum Kapitulationsproblem.

Zusatzbemerkung: Vielleicht ist es nicht uninteressant, aus dem genannten Brief von Furtwängler an Hasse auch noch die folgenden Sätze zu zitieren, welche zeigen, wie Hasses Klassenkörperbericht II von den zeitgenössischen Fachvertretern eingeschätzt wurde:

> „*Zum Schluss möchte ich doch noch meine Freude darüber zum Ausdruck bringen, dass Sie sich die Mühe gemacht haben, einen so schönen und ausführlichen Bericht zu verfassen. Er ist in seiner Art ausgezeichnet und gibt einen sehr klaren und durchsichtigen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie. Es ist zu hoffen, dass er die Zahl der Interessenten für dieses Gebiet,*

[5] Wir erinnern uns, dass sich schon Artin in seinem Brief Nr. 14 vom 6. 8. 1927 über die Hilbertsche Theorie der relativen Grundeinheiten sehr geärgert hatte. Siehe 14.1. – Aus heutiger Sicht ist der Grund für das Scheitern dieser Vermutung von Furtwängler leicht zu finden: Es ist das „*Herbrandsche Lemma*", das heutzutage in dem vorliegenden Zusammenhang in der Klassenkörpertheorie verwendet wird. Dieses Lemma bezieht sich auf die *Ordnungen* der beteiligten Kohomologiegruppen (bei zyklischer Operatorgruppe), nicht aber auf deren *Struktur*.

das ich zu den schönsten der gesamten Mathematik rechne, erheblich vergrössern wird.“

22 19.11.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 19. November 1928.

Lieber Herr Hasse!

Sehen Sie, da haben wir die Bescherung! Ich arbeite die ganze Zeit mit gruppentheoretischen Überlegungen, da vergesse ich ganz die Herkunft der Theorie und die Sätze die man dabei gewonnen hat. Vielen Dank für die Aufklärung.[1] So viel mir scheint, wird dabei von der Annahme eines relativ quadratischen Grundkörpers zweimal Gebrauch gemacht. Das zweite Mal beim Satz, dass die Anzahl der ambigen Idealklassen der ℓ^n-te Teil der Klassenzahl im Grundkörper ist. Denn im Allgemeinen tritt ja die Anzahl der ambigen Komplexe auf, beziehungsweise hängt die Zahl der ambigen *Klassen* noch von den relativen Grundeinheiten ab.[2]

Im Ganzen zeigt sich also dabei, dass bei imaginär quadratischen Grundkörpern die Gruppe des zweiten Klassenkörpers gewissen Einschränkungen unterworfen ist. Der Beweisansatz, den ich Ihnen in meinem vorletzten Brief mitteilte, ist auch durchführbar, wenn auch noch nicht das von Ihnen gefundene Ergebnis herauskommt.[3] Es handelt sich um folgendes:[4]

Der zweite Klassenkörper ist ja auch in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen galois'sch. Seine Gruppe in bezug auf den quadratischen Körper muss sich also einbetten lassen in eine der doppelten Ordnungszahl. Da aber die Klassenkörper ungeraden Grades nicht abelsch in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen sind, (dies sind nur die Geschlechterkörper) muss die Gruppe doppelter Ordnung die ursprünglich gegebene als Kommutatorgruppe enthalten. Eine gegebene metabelsche Gruppe ungeraden Grades kann also nur dann als Gruppe eines zweiten Klassenkörpers auftreten, wenn sie sich einbetten lässt in eine Gruppe der doppelten Ordnungszahl, und Kommutatorgruppe dieser Gruppe ist.

Herr Schreier, dem ich dieses Problem vorlegte (es gilt dies natürlich auch für die reell quadratischen Körper), hat nun in der Tat metabelsche Gruppen gefunden, bei denen sich diese Einbettung nicht machen lässt, die also

[1] Siehe 22.1.
[2] Siehe 22.2.
[3] Siehe 22.3.
[4] Siehe 22.4

nicht als Gruppen eines zweiten Klassenkörpers auftreten können. Vorläufig sind das noch spezielle Gruppen, ich hoffe, dass er noch mehr darüber herausbekommt. Es wäre sehr interessant zu wissen, welche Einschränkungen aus dieser Annahme folgen und ob diese Einschränkungen die von Ihnen gefundene umfassen.

Zu Ihrem heutigen Brief noch einige Worte. Ich entnehme ihm, dass Sie die Absicht haben, Ihre eigenen so schönen Untersuchungen nur sehr kurz in den Bericht aufzunehmen. Das wäre aber doch sehr schade um diese schönen Dinge. Ich glaube, dass man bei der Abfassung eines Berichtes die Frage, ob andere Leute Eitelkeit herauslesen können, *nicht* berücksichtigen soll. Denn wirklich gut wird er doch dann, wenn man auch sozusagen seine eigenen Kinder hinein verwoben hat. In diesem Fall handelt es sich noch dazu um sachlich berechtigte und sehr schöne „Kinder". Ich hoffe also, dass Sie kein Rabenvater sein werden. Ist Ihnen denn nur ein so kleiner Raum zur Verfügung gestellt worden? Dann müsste man eben bei der Schriftleitung vorstellig werden, Ihnen mehr Raum zur Verfügung zu stellen. Wenn ich Sie vielleicht dabei in irgend einer Weise unterstützen kann? Wenn ausser dem Verfasser noch ein oder mehrere Leute derselben Meinung sind? Ich glaube dass man Ihnen den Platz zur Verfügung stellen wird. Entschuldigen Sie aber meine Einmischung in diese Angelegenheiten. Ich glaube aber dass dem Bericht so viel Platz zur Verfügung gestellt werden muss, als Sie für gut halten und dass einige Vollständigkeit sehr erwünscht ist. Er soll ja doch eine Art Standardwerk sein. Ihr Satz über den Strahlklassenkörper ist sehr schön. Es geht also doch! [5]

Mit den besten Wünschen zum weiteren Gedeihen dieses Werkes und herzlichen Grüssen

Ihr Artin

Von meiner Arbeit[6] werden Sie vielleicht enttäuscht sein. Sie bringt nur die allgemeinen Grundlagen zur Einbettung der Idealklassenbehandlung in die

[5] Siehe 22.5.

[6] Hier geht es wieder um die Arbeit [Art29], die schon in dem Brief Nr. 20 vom 14. 11. 1928 zur Sprache kam.

Gruppentheorie, also Dinge die ich Ihnen im grossen und ganzen schon längst erzählt habe. Furtwänglers Arbeit ist mir nur zu sehr auf den Hauptidealsatz zugeschnitten. Die Dinge mussten einmal allgemein behandelt werden.

Kommentare zum Brief Nr. 22:

22.1 Imaginär-quadratische Grundkörper

Im vorletzten Brief Nr. 20 vom 14. 11. 1928 hatte sich Artin zu dem Scholzschen Resultat der Kapitulation über imaginär-quadratischem Grundkörper geäußert und gefragt, ob das bewiesen oder eine Vermutung sei. (Vgl. 20.1.3.) Und im letzten Brief Nr. 21 vom Tag zuvor hat er die Gültigkeit des Satzes angezweifelt. Jetzt aber hat Hasse ihm offenbar den Beweis geschickt. Artins Erstaunen über den Beweis beruht darauf, dass er bislang das Problem rein gruppentheoretisch aufgefasst hatte. Nun ersieht er aus dem Hasseschen Brief, dass der Beweis auf der Basis der Klassenkörpertheorie ganz einfach ist. Es ist dabei lediglich die Tatsache auszunutzen, dass ein imaginär-quadratischer Körper nur ± 1 als Einheiten besitzt[7], und diese sind Normen von Einheiten aus jeder Erweiterung ungeraden Grades.

22.2 Ambige Idealklassen

In der gängigen Terminologie wird eine Idealklasse des Erweiterungskörpers als „ambig“ bezeichnet, wenn sie invariant ist unter den Automorphismen der Galoisgruppe. Die Bemerkung Artins über die ambigen Idealklassen ist für das vorliegende Problem, nämlich imaginär-quadratische Grundkörper, irrelevant. Denn die von Artin angeführte Aussage gilt, im Rahmen der Klassenkörpertheorie, für zyklische Erweiterungen bei *beliebigem* Grundkörper. Sie steht z.Bsp. schon in Hasses Klassenkörperbericht I, §6, (C). (Allerdings ohne Beweis; der Beweis wird im Klassenkörperbericht Ia nachgeholt.) Und zwar handelt es sich um einen wichtigen Teilschritt zum Beweis der sogenannten „2. Ungleichung“ der Klassenkörpertheorie. Letztere war nach dem damaligen Stand als das Herzstück des Takagischen Aufbaus der Klassenkörpertheorie anzusehen. Jeder, der damals die Klassenkörpertheorie studiert hatte, war also auf diesem Weg irgendwann einmal mit der von Artin jetzt zitierten Aussage konfrontiert worden.

Das hat Artin offenbar ziemlich bald selbst eingesehen; vielleicht erinnerte er sich daran, dass er ja selbst einmal über das „Ge-ixe“ geschimpft hatte, d.h. über die Rechnungen, die mit dem in Rede stehenden Satz über ambige Idealklassen verknüpft waren. (Vgl. 14.1.) Artin kommt darauf in

[7]Ausgenommen die beiden Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, für die aber all dies trivial ist, weil sie die Klassenzahl 1 besitzen.

seinem nächsten Brief Nr. 23 vom 22. 11. 1928 zurück, und dann noch einmal in seinem übernächsten Nr. 24 vom 3. 12. 1928.

22.3 Hasses Verallgemeinerung

Wenn Artin gegenüber Hasse von dem „*von Ihnen erhaltenen Ergebnis*" spricht, so kann es sich wohl nicht um den Scholzschen Satz handeln, den wir in 20.1.3 für imaginär-quadratische Grundkörper formulierten. Denn jener Satz stammt ja von Arnold Scholz, was Hasse auch an Artin geschrieben hatte.

Nach Lage der Dinge wird es sich um die von Hasse gefundene *Verallgemeinerung* des Scholzschen Satzes handeln. Hasse hat nämlich bemerkt, dass der Satz von Scholz nicht nur für Primzahlgrad ℓ gilt, sondern auch für Primzahlpotenzgrad ℓ^n. Dabei ist allerdings $\ell > 2$ vorauszusetzen, was zwar im Scholzschen Brief nicht erwähnt wird, jedoch schon im Artinschen Brief Nr. 21 vom 18. 11. 1928 moniert wird. Hasse hat diesen verallgemeinerten Satz später in seinen Klassenkörperbericht II [Has30a] aufgenommen. (Dabei erwähnt er ausdrücklich, dass der Satz für $n = 1$ von Scholz stammt.)

Es ist wahrscheinlich, dass Hasse diese Verallgemeinerung Artin mitgeteilt hatte in dem Brief, auf den Artin nun in dem vorliegenden Brief Nr. 22 antwortet. Denn Hasse hatte die Verallgemeinerung schon Ende 1928 erhalten, was in Evidenz gesetzt wird durch eine Tagebucheintragung von Hasse, datiert im „Dezember 1928". Diese Eintragung trägt den Titel: „*Zur Hauptidealisierung in Unterkörpern des ℓ-Klassenkörpers bei imaginär-quadratischem Grundkörper.*" Hasse gibt dort einen ausführlichen Beweis seiner Verallgemeinerung des Scholzschen Satzes. Die Darstellung ist genau so wie Hasse es später in den Klassenkörperbericht II übernommen hat.

Somit wird wohl Artin diese Verallgemeinerung gemeint haben, wenn er von dem „von Ihnen erhaltenen Ergebnis" spricht. Auch im nächsten Brief Nr. 23 spricht Artin zu Hasse von „Ihrem Satz".

Der Satz steht in engem Zusammenhang mit der späteren Theorie der sog. Geschlechterkörper von Hasse und Leopoldt. Hierzu siehe [Fre79].

22.4 Der gruppentheoretische Ansatz

Der gruppentheoretische Ansatz von Artin bezieht sich auf die Überlegungen, die er in dem Brief Nr. 13 vom 2. 8. 1927 dargestellt hatte (und die er dann in der Arbeit [Art29] publizierte). Demnach wird die Kapitulati-

on von Idealen in unverzweigten abelschen Erweiterungen zurückgeführt auf gruppentheoretische Verlagerungssätze für die Galoisgruppe G des zweiten Klassenkörpers.

Wenn es sich um einen quadratischen Grundkörper handelt, bemerkt Artin, dann lässt sich G einbetten als Kommutatorgruppe vom Index 2 in eine größere Gruppe. Dies nun ergibt, wie er schreibt, Einschränkungen für die Struktur von G. Das habe Schreier nachgewiesen, allerdings bislang nur durch Angabe von speziellen Gegenbeispielen. In dem darauffolgenden Brief Nr. 23 vom 22. 11. 1928 teilt er dann weitere Ergebnisse mit, die Schreier inzwischen dazu erhalten hatte. Allerdings kommen dabei die Ergebnisse von Scholz-Hasse noch nicht heraus. Das ist erklärlich, denn der gruppentheoretische Ansatz von Artin bezieht sich auf einen beliebigen quadratischen Grundkörper, reell oder imaginär. Ergebnisse, die sich nur auf den imaginärquadratischen Fall beziehen, entziehen sich der gruppentheoretischen Methode. Jedenfalls vorläufig, denn Artin vermutet (im Brief Nr. 23), dass sich „*eine umfassendere und schärfere Bedingung als beide zusammen genommen aufstellen lassen wird*“.

Die Situation scheint bis heute noch nicht vollständig geklärt zu sein. Siehe [Arr98].

22.5 Zum Hasseschen Klassenkörperbericht II

Wir wissen nicht genau, was Artin gemeint haben könnte, wenn er Hasse dazu auffordert, seine „*eigenen so schönen Untersuchungen*“ nicht nur sehr kurz in seinen Bericht aufzunehmen. Der Hassesche Klassenkörperbericht II [Has30a] enthält in seinen Kapiteln 2-4 eine ausführliche Diskussion des Hasseschen Normsymbols mit vielen weitreichenden Folgerungen, sowie auch der expliziten Reziprozitätsformeln; diese Untersuchungen stammen zu einem erheblichen Teil von Hasse selbst. Hatte Hasse ursprünglich vor, diese Dinge nur kurz in seinen Bericht aufzunehmen. Ist er erst durch Artin ermuntert worden, dies ausführlicher zu tun?

Es fällt uns schwer, dies anzunehmen, denn der ganze Aufbau des Klassenkörperberichts II ist in großen Teilen direkt auf die Interessen und die Ergebnisse von Hasse ausgerichtet, nachdem es möglich geworden war, diese auf der Grundlage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes zu behandeln. Hasse brauchte wohl nicht erst Artins Ermunterung, um dieses Programm durchzuführen.

Einen Fingerzeig, was Artin gemeint haben könnte, gibt uns der letzte

Satz in diesem Abschnitt seines Briefes, wenn er sagt: „*Ihr Satz über den Strahlklassenkörper ist sehr schön.*“ Nun kommt in dem Klassenkörperbericht II nicht direkt ein „Satz über den Strahlklassenörper“ vor. Wir haben jedoch in der Arbeit Hasses zur komplexen Multiplikation [Has27d], die gerade ein Jahr vorher (1927) erschienen war, einen solchen Satz gefunden. Hasse beweist dort nämlich für einen imaginär-quadratischen Körper K und ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ aus K, dass der zugehörige Strahlklassenkörper $K_{\mathfrak{m}}$ erzeugt werden kann durch geeignete („singuläre“) Werte von komplexen Funktionen, genauer: der Invarianten-Funktion $j(z)$ und der Weberschen Funktion $\tau(z)$ (die letztere unterscheidet sich von der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion durch einen arithmetischen Normierungsfaktor.)

Es ist hier nicht der Ort, den Hasseschen „Satz über Strahlklassenkörper“ genauer zu formulieren. Es sei nur folgendes gesagt: In Teil I des Klassenkörperberichts [Has26a] hatte Hasse berichtet, wie sich nach Weber und Takagi die Theorie der komplexen Multiplikation in die allgemeine Klassenkörpertheorie einordnet. Er stellte jedoch fest, dass es noch nicht gelungen war, die Strahlklassenkörper mit Hilfe von elliptischen Funktionen erster Stufe zu erzeugen. Aber Hasse kündigte damals schon eine Arbeit von ihm selbst an, in der dieses Desideratum durchgeführt werden sollte. Diese Arbeit erschien dann 1927 im Jubiläumsband des Crelleschen Journals [Has27d].

Artin hatte schon früh, Anfang 1926, Kenntnis von Hasses Manuskript zu dieser Arbeit erhalten. Im Brief Nr. 6 vom 10. 2. 1926 geht Artin darauf ein und sendet an Hasse seine „*herzlichen Glückwünsche zur schönen Darstellung der komplexen Multiplikation*“. Vgl. 6.1. Uns erscheint es danach evident, dass Artin jetzt diese Arbeit zur komplexen Multiplikation gemeint hat, wenn er von Hasses „*eigenen schönen Untersuchungen*“ spricht. Wir können uns vorstellen, dass Hasse in seinem Brief an Artin genauer über sein Konzept für den Klassenkörperbericht II berichtet hatte, und dass er dabei erwähnt hatte, seine Resultate über komplexe Multiplikation *nicht* aufzunehmen. Und dass dies Artin zu seinen Zeilen veranlasst hatte, in denen er doch für deren Aufnahme plädierte.[8]

Trotz Artins Zureden hat sich jedoch Hasse nicht entschlossen, seine neue Begründung der komplexen Multiplikation in den Klassenkörperbericht II aufzunehmen. Sicherlich nicht deshalb, weil er die Resultate für unwichtig fand, oder gar aus einer gewissen Bescheidenheit, die ihm Artin zu unterstellen scheint. Sondern weil die komplexe Multiplikation nicht in das Kon-

[8] Hasse hat später, im Jahre 1931, noch eine zweite Arbeit zur Begründung der komplexen Multiplikation geschrieben. Diese Arbeit stand jedoch jetzt, im Jahre 1928, in der Artin-Hasse-Korrespondenz noch nicht zur Debatte.

zept des Berichts passte. Der Untertitel des Berichtes lautet nämlich: „Teil II: Reziprozitätsgesetz“. Und die komplexe Multiplikation ist zwar als ein besonderes, interessantes Kapitel der Klassenkörpertheorie anzusehen, aber eben nicht als Ausfluss des Artinschen Reziprozitätsgesetzes.

23 22.11.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 22. November 1928.

Lieber Herr Hasse!

Ich habe natürlich Unsinn geredet in meinem letzten Brief. Ich meine die Angelegenheit mit den ambigen Klassen. Natürlich gilt das allgemein für jeden Grundkörper und ich habe die Absendung des Briefes schon bereut als er im Kasten lag. Na, das kann ja mal passieren. Übrigens hat Herr Schreier den Satz über die ambigen Klassen und den Satz über die Geschlechter auch noch einmal gruppentheoretisch bestätigt. Es wird hier alles trivial.[1]

In aller Eile – und das ist der eigentliche Grund für meinen heutigen Brief – will ich Ihnen noch die neuesten Ergebnisse von Herrn Schreier über die Gruppen der zweiten ℓ-Klassenkörper über einem imaginär quadratischen Grundkörper berichten.[2] Es scheint hier, dass doch mächtige Einschränkungen vorkommen. Mit Hilfe Ihres Satzes, dass in einem Unterkörper mit zyklischer Gruppe nur ebenso viel Klassen des Grundkörpers Hauptideale werden können als der Grad des Unterkörpers angibt, lässt sich zeigen, dass die meisten metabelschen ℓ-Gruppen gar nicht als Gruppen der zweiten ℓ-Klassenkörper auftreten können. Nimmt man noch die Einschränkung hinzu, die ich Ihnen im letzten Brief schrieb[3], und diese überschneidet sich fast nie mit der durch Ihren Satz gegebenen Einschränkung, so bleibt nur sehr wenig übrig. Abgesehen von den zyklischen Gruppen, gibt es nämlich für ungerades ℓ keine Gruppe der Ordnungen ℓ^3, ℓ^4, ℓ^5, die als Gruppe des zweiten ℓ-Klassenkörpers auftreten könnte. Es wäre also von Interesse zu untersuchen, welches der Grad des zweiten ℓ-Klassenkörpers von $R(\sqrt{-4027})$ ist. Der Relativgrad in bezug auf den quadratischen Grundkörper muss mindestens 3^6, also die Klassenzahl des ersten Klassenkörpers mindestens $3^4 = 81$ sein. Die Klassenzahl ist also erheblich grösser als die Klassenzahl des Grundkörpers. Es ist übrigens sehr reizvoll zu sehen, dass die meisten Gruppen durch Ihre Bedingung ausgeschlossen werden und dass dann die wenigen, die übrig bleiben, gerade durch meine Bedingung zum Wegfall kommen. Nehmen Sie etwa eine abelsche Gruppe vom Grade ℓ^n, die nicht zyklisch ist, als Gruppe des zweiten Klassenkörpers. Das heisst, der erste ℓ-Klassenkörper soll die

---

[1] Siehe 22.2.

[2] Hierzu siehe 20.1.3 und 22.1.

[3] Siehe 22.4.

Klassenzahl eins haben. Dann ist sofort zu sehen, dass Ihre Bedingung nicht erfüllt ist, denn in einem geeigneten Unterkörper des ersten Klassenkörpers wird schon jedes Ideal des Grundkörpers Hauptideal (ich meine natürlich einen geeigneten relativ zyklischen Unterkörper). Wohl aber ist meine Bedingung von der Einbettbarkeit erfüllt. Auch für den umgekehrten Fall gibt es Beispiele schon von der Ordnung ℓ^3. Man muss also annehmen, dass keine der beiden Bedingungen die Wahre ist, d.h. dass sich vermutlich eine umfassendere und schärfere Bedingung als beide zusammen genommen aufstellen lassen wird. Ich habe keine Ahnung wie sie aussehen wird. Hoffentlich so, dass man damit arbeiten kann. Die beiden bisherigen sind sehr unhandlich und sicher noch nicht die wahren. Hat Scholz die Gruppe der Idealklassen in $R(\sqrt{-4027})$ bestimmt? Wenn ja, dann wäre ich Ihnen dankbar wenn Sie mir die Gruppe mitteilten.[4]

Für heute gibt es sonst nichts neues. Ich habe mich doch schon sehr zu meinem Vorteile verändert. Als Nachteil kommt halt hinzu, dass anscheinend viel Unsinn in meinen Briefen mit in Kauf genommen werden muss.

Darf ich Sie noch bitten, Ihrer Frau Gemahlin meine besten Empfehlungen zu bestellen und seien Sie selbst herzlichst gegrüsst von Ihrem

Artin

[4] In dem Brief von Scholz an Hasse vom 15. 10. 1928 steht, dass die 3-Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-4027})$ vom Typus $(3, 3)$ ist.

24 03.12.1928, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 3. Dezember 1928.

Lieber Herr Hasse!

Besten Dank für Ihren lieben Brief. Zunächst muss ich feststellen, dass wir uns ein wenig missverstanden haben.[1] Herr Schreier und ich wollten uns nur überzeugen, dass im Falle des absoluten Klassenkörpers der Satz von den ambigen Klassen trivial ist, wenn man die ganze Klassenkörpertheorie voraussetzt. Es handelte sich nur um die gruppentheoretische Formulierung des Satzes und diese wird dann, wie Sie ja auch gefunden haben, trivial. Dasselbe gilt von den Geschlechtern. Natürlich haben Sie von Ihrem Standpunkt auch recht. Sie werden nur fragen, warum mich das so sehr interessierte. Das kommt daher, weil anscheinend Furtwängler nicht an die Möglichkeit glaubt, dass es zu gegebenen Gruppen auch immer zweite Klassenkörper gibt. Ich empfand es dann als „Pflicht“, die bekannten idealtheoretischen Sätze auf ihre gruppentheoretische Bedeutung hin zu prüfen und zu sehen, ob sich nicht irgendwo doch eine Einschränkung für die Gruppen ergibt. Natürlich stellte sich eine solche Einschränkung nicht heraus. Furtwängler hat übrigens nie explizit behauptet dass er nicht daran glaubt, sondern ist nur direkten Fragen darüber aus dem Weg gegangen. Als er mir die Ihnen bereits bekannte Gruppe schrieb[2], sagte er noch, man wisse natürlich nicht ob das wirklich ein Gegenbeispiel gegen seinen Satz sei. Diese Skepsis ärgerte mich natürlich sehr, und so versuchte ich ein Beispiel dazu zu finden. Das ist die Genesis des Beispiels und der ambigen Klassen.[3]

Ich möchte Sie aber nun etwas ganz von diesem Gegenstande verschiedenes fragen, nämlich etwas aus der Theorie der quadratischen Formen. Sie wissen ja, dass ich darüber lese. Bei den Vorbereitungen für die späteren Stunden merkte ich nun, dass die vorhandenen Beweise für den folgenden Satz geradezu scheusslich sind: „Formen desselben Geschlechts sind stets rational unimodular in einander transformierbar, wobei die Nenner zu irgend

[1] Hier bezieht sich Artin auf seine Aussage über ambige Idealklassen, die er in seinem vorangegangenen Brief Nr. 23 vom 22.11.1928 angesprochen hatte. Vgl. dazu auch 22.2.

[2] Vgl. dazu den Brief Nr. 21 vom 18. 11. 1928, sowie 21.1.

[3] Uns ist nicht bekannt, ob die Artin-Furtwänglersche Frage inzwischen gelöst ist, d.h. ob jede zweistufig metabelsche ℓ-Gruppe als Galoisgruppe eines zweiten ℓ-Klassenkörpers auftreten kann. – Siehe dazu auch 25.2.

einer rationalen Zahl teilerfremd gewählt werden können.“ Ich habe natürlich nicht die gesamte Literatur über diesen Gegenstand durchsehen können, sondern nur Minkowski und Bachmann. Bei Minkowski steht überhaupt kein Beweis sondern es wird auf den Beweis von Smith für ternäre Formen verwiesen. Dieser Beweis steht nun bei Bachmann und ich finde ihn scheusslich. So kann er nicht bleiben. Ich finde es sehr bedauerlich, dass Minkowski für diesen wichtigen Satz keinen Beweis geliefert hat. Das lässt den Verdacht aufkommen, dass auch der Minkowskische Beweis nicht schön ist und auch von ihm selbst als unschön empfunden wurde. Ich habe nun auch in Ihren Arbeiten über dieses Gebiet nachgesehen oder vielmehr das habe ich zu allererst getan. Leider beweisen Sie aber nicht den wichtigen Zusatz über die Nenner, da das ja nicht in den Bereich der Aufgabe fällt, die Sie sich gestellt haben. Ich sehe auch nicht, wie man daraus den Satz gewinnen kann. Natürlich würde es sich nur darum handeln, den Satz zu beweisen, dass Formen desselben Geschlechts die gleichen Zahlen darstellen, wenn man über die Nenner die analoge Einschränkung gibt. Nun haben Sie sich aber doch seinerzeit ausführlich mit der Theorie der quadratischen Formen beschäftigt und ich habe noch immer die Hoffnung, dass Sie sich einen, gemessen an den vorhandenen, einfacheren Beweis überlegt haben. Es muss doch gehen! Darf ich Sie nun bitten, mir den Beweis, wenn Sie einen solchen haben oder wenn Sie wissen, wo er in der Literatur zu finden ist, wenigstens zu skizzieren. Bringt Ihr Ergebnis irgend eine Vereinfachung in die Fragestellung? Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir etwas darüber schreiben könnten.[4]

Mit den besten Grüssen und einer Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin

Ihr Artin

[4]Hasse hat darauf in seinem nächsten Brief geantwortet. Vgl. 25.1.

25 12.01.1929, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 12. Januar 1929.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihre freundlichen Bemühungen um den Beweis des Satzes über quadratische Formen, den ich sehr gut in meinem Kolleg gebrauchen kann.[1] Es ist nur noch ein Punkt daran bedauerlich nämlich der, dass der entsprechende Satz für binäre Formen dabei vorausgesetzt werden muss und dass dieser Satz nur mit der Theorie der Komposition der quadratischen Formen bewiesen werden kann. Es müsste sich auch dafür ein einfacherer Beweis finden lassen.

Sehr interessiert hat mich Ihr Bericht über die metabelschen Gruppen zu imaginär quadratischen Körpern.[2] Ich habe ihn gleich Herrn Schreier erzählt und wir haben uns auch gleich bemüht darin weiter zu kommen, was aber zunächst nicht geglückt ist. Aber das war vor Weihnachten und seitdem ich wieder zurück bin, habe ich Herrn Schreier noch nicht gesehen, denn er hat Grippe und liegt im Bett.[3] Es kann also sein, dass er in der Theorie etwas weiter gekommen ist. Ich glaube aber nicht, da die Sachen doch sehr schwer sind. Ich selbst bin während der Weihnachtsferien auch nicht vom Fleck gekommen.

Auf meiner Rückreise hätte ich Sie gerne besucht, ich wusste aber nicht ob Sie überhaupt in Halle sind. Nun es wird sich schon ein anderes Mal eine Gelegenheit dazu finden.[4]

Mit den besten Neujahrswünschen, wenn auch etwas verspätet, auch an Frau Gemahlin,

Ihr Artin

---

[1] Siehe 25.1.

[2] Siehe 25.2.

[3] Dies ist der letzte Brief an Hasse, in dem Artin seinen Mitarbeiter und Freund Otto Schreier erwähnt. Schreier starb am 2. Juni 1929 im Alter von 28 Jahren. (Artin war 31.)

[4] Anscheinend handelt es sich um die Rückreise aus Reichenberg, wo Artin aufgewachsen war, nach Hamburg. Schon öfter hatte Artin von Hamburg aus diese Reise gemacht und hatte dabei in Halle bei den Hasses Station gemacht. Vgl. Brief Nr. 16 vom 4. 9. 1927.

Kommentare zum Brief Nr. 25:

25.1 Quadratische Formen

Es handelt sich um ganzzahlige quadratische Formen (über dem rationalen Zahlkörper). In seinem vorangehenden Brief Nr. 24 vom 3. 12. 1928 hatte Artin um einen Beweis gebeten, den er in seiner Vorlesung über quadratische Formen geben könne. Der Satz um den es Artin geht, besagt, dass quadratische Formen desselben Geschlechts rational durch eine unimodulare Transformation ineinander übergeführt werden können, wobei – und das ist der wesentliche Punkt – die auftretenden Nenner teilerfremd zu einer beliebig vorgegebenen rationalen Zahl gewählt werden können. Artin bemängelt, dass in der einschlägigen Arbeit von Minkowski [Min90] kein Beweis dieses Satzes zu finden ist, und er fragt an, ob Hasse vielleicht einen einfachen Beweis kenne. Hasse hatte sich anlässlich seiner Dissertation mit der Äquivalenz quadratischer Formen über dem rationalen Zahlkörper beschäftigt [Has23](dabei entstand das „Lokal-Global Prinzip“). Zwar ging es dort nur um *rationale* Transformationen von quadratischen Formen, ohne Beschränkung für die auftretenden Nenner. Aber, so hofft Artin, es könnte ja sein, dass sich Hasse in diesem Zusammenhang einen einfachen Beweis des Satzes von Minkowski zurecht gelegt habe.

In Hasses Antwort wurde diese Frage wenigstens partiell beantwortet, und dafür bedankt sich Artin hier. Einen Anhaltspunkt, wie die Antwort Hasses ausgesehen hat, können wir aus Hasses Tagebuch entnehmen. Dort findet sich unter dem Datum „Dezember 1928“ ein Eintrag mit dem Titel: „*Der Fundamentalsatz aus der Geschlechtertheorie quadratischer Formen von n Variablen*“. Hasse formuliert dort den von Artin genannten Minkowskischen Satz, allerdings gibt er einen Beweis nur in gewissen speziellen Fällen. Nämlich die von Minkowski eingeführten sogenannten „Ordnungen“ (die mit den Elementarteilern der Koeffizientenmatrix zusammenhängen) sollen trivial sein. Es ist wohl anzunehmen, dass Hasse erwartet, der allgemeine Fall würde sich ganz ähnlich behandeln lassen.

Der Beweis von Hasse arbeitet mit Induktion nach der Variablenzahl n, wobei Hasse bemerkt, dass die Behauptung für $n = 2$ „*in bekannter Weise aus der klassischen Theorie der binären quadratischen Formen*“ folgt. Dies ist die Stelle, die Artin in seinem Brief bemängelt und auch dafür einen „*einfacheren Beweis*“ wünscht.

Über die Entwicklung der Geschlechtertheorie quadratischer Formen vgl. [Fre79].

Artin hatte ein großes Interesse an Quadratischen Formen, sicherlich beeinflusst auch durch den Kontakt mit Hasse. Als Beispiel sei etwa die Dissertation des Artin-Schülers O'Meara (Princeton 1953) erwähnt, die Artin angeregt and wesentlich beeinflusst hat, und die dann zur Monographie [O'M63] geführt hat, wo der Einfluss von Artin und auch von Hasse besonders ausgeprägt ist.

25.2 Metabelsche Gruppen

Einen Anhaltspunkt, für welchen „Bericht" Hasses über metabelsche Gruppen sich Artin sehr interessiert hat, können wir aus Hasses Tagebuch entnehmen. Dort findet sich ein Eintrag, datiert mit „Dezember 1928", mit dem Titel: „*Zur Hauptidealisierung in Unterkörpern des ℓ-Klassenkörpers bei imaginär-quadratischem Grundkörper*". Es werden wohl die Dinge aus dieser Tagebuch-Eintragung gewesen sein, über die Hasse berichtet hatte.

Wir finden dort, also im Tagebuch, zunächst einen vollständigen Beweis des Scholz-Hasseschen Satzes; siehe 22.3. Diesen Beweis hat Hasse später in seinen Klassenkörperbericht II [Has30c] aufgenommen. Danach finden wir im Tagebuch eine Diskussion der gruppentheoretischen Version dieses Satzes; das ist offenbar der Anlass für Hasse, seine Überlegungen an Artin zu schicken. Denn Artin hatte ja in seinen Briefen die Frage aufgeworfen, welche gruppentheoretischen Einschränkungen bestehen müssen, damit eine 2-stufig metabelsche ℓ-Gruppe als Galoisgruppe des zweiten Klassenkörpers über einem imaginär-quadratischen Körper realisiert werden kann.

In der Tagebuch-Eintragung findet sich eine zumindest partielle Antwort für den einfachsten nichttrivialen Fall, d.h. wenn die Galoisgruppe des (ersten) ℓ-Klassenkörpers vom Typus (ℓ, ℓ) ist.

26 10.05.1929, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 10. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Sie werden schon sehr böse sein, dass ich auf Ihren hochinteressanten Brief noch nicht geantwortet habe. Aber ich habe ihn leider erst vorige Woche in Hamburg vorgefunden, da er mir aus Versehen in die Ferien nicht nachgeschickt wurde. Das war auch sehr schwer, da ich dauernd meinen Aufenthalt wechselte. Zuletzt war ich in Kopenhagen.

Nun zum Sachlichen. Meinen herzlichsten Glückwunsch zu der wundervollen Entdeckung über das Normenrestsymbol.[1] Das ist jetzt doch ganz offenbar der wahre Zusammenhang und man versteht jetzt erst die ganze Theorie. Es ist alles so klar, dass dazu gar nichts mehr zu bemerken ist. Herr Petersson trägt in diesem Semester Klassenkörpertheorie vor und wird dabei natürlich die neue Formulierung und die neuen Beweise von Ihnen bringen.[2] Er ist sehr erfreut darüber dass jetzt alles so einfach geht. Natürlich wird er, damit er überhaupt vom Fleck kommt, die Beweise der eigentlichen Klassenkörpertheorie nicht ausführen, sondern nur die Methoden skizzieren. Dafür dann die Reziprozitätsgesetze, also die Anwendungen in aller Breite.

Ich selbst habe mich im vorigen Semester nicht mehr mit Zahlentheorie, sondern wieder einmal mit Algebra beschäftigt. Nämlich mit der Idealtheorie in kommutativen Bereichen die ganz abgeschlossen sind, in denen aber nicht notwendig der Teilerkettensatz zu gelten braucht. Man gelangt dann tatsächlich zu befriedigenden Ergebnissen. Ich glaube auch, dass diese Dinge, die übrigens van der Waerden zuerst betrachtet hat, noch grosse arithmetische Anwendungen haben werden. Allerdings nicht so sehr auf die Körpertheorie. Wenn Sie das interessiert, kann ich Ihnen darüber noch genaueres schreiben. Ich habe auch in Kopenhagen darüber vorgetragen.[3]

Ihr Bericht wird ja jetzt wohl bald fertig sein.[4] Hat man Ihnen genügend Platz zur Verfügung gestellt?

Mit den herzlichsten Grüssen und einer Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin Ihr Artin

---

[1]Siehe 26.1.

[2]Zu Petersson siehe 27.1.

[3]Siehe 26.4.

[4]Gemeint ist hier wiederum Hasses Klassenkörperbericht II.

Kommentare zum Brief Nr.26:

26.1 Das Hassesche Normsymbol

Artins „*herzlichster Glückwunsch*“ bezieht sich auf Hasses Arbeit „*Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols*“. Sie erschien 1930 im Crelleschen Journal [Has30e], war jedoch schon am 7. März 1929 dem Crelleschen Journal eingereicht worden. Es werden wohl die Korrekturfahnen zu dieser Arbeit gewesen sein, die Hasse an Artin geschickt hatte – wie es damals üblich war.

Eine zweite Arbeit von Hasse: „Die Normenresttheorie als Klassenkörpertheorie im Kleinen“ [Has30c] erschien in demselben Band des Crelleschen Journals, mit einem Eingangsdatum, das nur wenige Tage später liegt: 16. März 1929. Es handelt sich um eine Folgearbeit zu der vorgenannten. Wahrscheinlich hatte Hasse auch die Korrekturfahnen dieser zweiten Arbeit mitgeschickt. Wir werden diese in dem folgenden Abschnitt 26.2 diskutieren.

Das Problem, das Hasse in [Has30e] löst, war von Artin schon vor zwei Jahren aufgeworfen worden, nämlich im Brief Nr. 10 vom 21. Juli 1927. In Punkt 6.) jenes Briefes hatte Artin, wie er sagte, eine „*ganz dumme*“ Frage gestellt, nämlich ob es möglich sei, eine Art Normsymbol auch dann zu definieren, wenn der Grundkörper k die Einheitswurzeln nicht enthält. Diese Frage wird von Hasse nunmehr im positiven Sinne beantwortet. Artin hatte sich damals auf die „σ-Formulierung“ seines Reziprozitätsgesetzes bezogen, d.h. auf die Formulierung mit Hilfe der Galoisgruppe einer abelschen Erweiterung; dabei braucht man keinerlei Voraussetzung über Einheitswurzeln. Und er hatte gefragt: gibt es eine entsprechende Formulierung auch für das Normsymbol?

In der Arbeit [Has30e] zeigt nun Hasse, dass es geht, d.h. man kann in kanonischer Weise ein Normsysymbol $(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}})$ für eine beliebige abelsche Erweiterung $K|k$ und beliebiges $\alpha \neq 0$ aus k definieren, multiplikativ in α, und derart, dass

$$(40) \qquad \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ ist Norm aus } K_{\mathfrak{p}}|k_{\mathfrak{p}}\,.$$

Dabei ist $\mathfrak{p}$ eine beliebige Primstelle von k. Die Wertgruppe des neuen Normsymbols $(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}})$ ist jetzt keine Einheitswurzelgruppe, sondern die Galoisgruppe von $K_{\mathfrak{p}}|k_{\mathfrak{p}}$, genauer: die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$ in der Galoisgruppe von $K|k$.

Dabei gilt die Produktformel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \tag{41}$$

wobei die 1 auf der rechten Seite das Einselement der Galoisgruppe von $K|k$ bedeutet. Nimmt man für K den Körper $k(\sqrt[m]{\beta})$, wobei jetzt die m-ten Einheitswurzeln in k enthalten sein sollen, so erhält man im wesentlichen das von Hasse in seiner früheren Arbeit [Has27e] diskutierte Hilbertsche Normsymbol $(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}})$ zurück.[5] Denn vermöge der Kummerschen Theorie spiegelt sich die Galoisgruppe in einer Einheitswurzelgruppe wider.

Die Definition des neuen Hasseschen Normsymbols geschieht nach wesentlich demselben Muster wie die Definition des Hilbertschen Normsymbols, die wir in 10.3 skizziert haben; zwar gelingt es Hasse, einige formale Vereinfachungen anzubringen, aber die Grundidee ist dieselbe. Wenn $\mathfrak{p}$ nicht im Führer von $K|k$ enthalten ist und in α zum Exponenten a aufgeht, so ist

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-a} \tag{42}$$

wobei das Symbol $(\frac{K}{\mathfrak{p}})$ auf der rechten Seite den Frobenius-Automorphismus von $\mathfrak{p}$ bedeutet. (Wir benutzen hier die von Hasse eingeführte Schreibweise für den Frobenius-Automorphismus; Artin schreibt dafür stets $\sigma_{\mathfrak{p}}$.) Andernfalls wähle man $\alpha' \in k$ welches $\mathfrak{p}$-adisch nahe bei α liegt aber $\mathfrak{q}$-adisch nahe bei 1 für alle anderen Teiler $\mathfrak{q}$ des Führers von $K|k$. Schreibe $(\alpha') = \mathfrak{p}^a\mathfrak{a}'$; dann ist der Divisor $\mathfrak{a}'$ teilerfremd zum Führer und somit ist das Frobenius-Symbol $(\frac{K}{\mathfrak{a}'})$ definiert; man setze nun

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{a}'}\right) . \tag{43}$$

Zum Beweis dafür, dass dadurch $(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}})$ wohldefiniert ist, wird das Artinsche Reziprozitätsgesetz benötigt; ebenso zum Beweis dafür, das die obengenannte Normeigenschaft (40) gilt.

Mit der Konstruktion dieses Symbols folgt Hasse der Artinschen Idee der „σ-Formulierung“. Es nimmt nicht wunder, dass Artin dies enthusiastisch kommentiert und meint, dies sei nun der „wahre“ Zusammenhang. Aus heutiger Sicht können wir dem jedoch nur bedingt zustimmen. Denn damals konnte Hasse das lokale Normsymbol zu einer Primstelle $\mathfrak{p}$ noch nicht lokal im $\mathfrak{p}$-adischen erklären, sondern er musste bei der Definition das globale Artinsche Reziprozitätsgesetz verwenden.

[5] Siehe 10.3; man vergleiche (40) mit (23).)

26.2 Lokale Klassenkörpertheorie

Im selben Band 162 des Crelleschen Journals wie die soeben diskutierte Arbeit [Has30e] erschien [Has30c]. Dies ist Hasses erste Arbeit zur lokalen Klassenkörpertheorie. Hasse hatte entdeckt, dass die von ihm in der vorangegangenen Arbeit [Has30e] entwickelte Normenresttheorie als *lokale Klassenkörpertheorie* gedeutet werden kann, so wie wir sie heute kennen. Das in diesem Sinne gedeutete lokale „Reziprozitätsgesetz in der Artinschen σ-Formulierung“ liefert einen Isomorphismus $\alpha \to (\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}})$ der lokalen Normfaktorgruppe auf die Galoisgruppe der lokalen Erweiterung $K_{\mathfrak{p}}|k_{\mathfrak{p}}$ (die als abelsch vorausgesetzt wird).

Allerdings hatte diese erste Version der lokalen Klassenkörpertheorie noch einen Schönheitsfehler. Nämlich: das lokale Normsymbol $(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}})$ hatte Hasse in [Has30e] nur mit Hilfe des *globalen* Artinschen Reziprozitätsgesetzes definieren und behandeln können. Somit ist die lokale Klassenkörpertheorie zunächst nur ein Ausfluss der globalen Klassenkörpertheorie. Dabei benötigt man den Satz, dass jede $\mathfrak{p}$-lokale abelsche Erweiterung als $\mathfrak{p}$-adischer Abschluss einer globalen abelschen Erweiterung dargestellt werden kann. Diesen Satz kann Hasse in [Has30e] zunächst nicht beweisen, er wird jedoch in einer Arbeit von F. K. Schmidt, mit dem Hasse damals einen intensiven Briefverkehr pflegte, im selben Band des Crelleschen Journals erledigt [Sch30].

Hasse allerdings gibt sich mit dieser Situation nicht zufrieden. Er meint, man solle zunächst die lokale Klassenkörpertheorie *ab ovo* entwickeln und, darauf aufbauend, dann den Grenzübergang zur globalen Klassenkörpertheorie vollziehen. Er sagt dazu in [Has30c]:

> „*Davon verspreche ich mir eine erhebliche gedankliche, wenn nicht auch sachliche Vereinfachung der Beweise der* [*globalen*] *Klassenkörpertheorie, die ja in ihrem bisherigen ungehobelten Zustande wenig geeignet sind, das Studium dieser in ihren Resultaten so glatten Theorie verlockend erscheinen zu lassen.*“

Was die Glättung der ungehobelten Beweise betrifft, so hat Hasse sich immer wieder darüber Gedanken gemacht, auch in der Korrespondenz mit Artin. Vgl. dazu Artins Briefe Nr. 12 vom 29. 7. 1927 und Nr. 15 vom 19. 8. 1927.

26.3 Weitere Entwicklung

Hasses Ideen zur lokalen Klassenkörpertheorie und zum Normsymbol sowie zum Zugang zur globalen Klassenkörpertheorie von der lokalen Theorie her

wurden in seiner Arbeit [Has33a] fortgesetzt, die er Emmy Noether zum 50. Geburtstag am 23. März 1932 widmete – denn Emmy Noether war es gewesen, die mit ihm laufend über diese Fragen eine anregende Korrespondenz führte. (Siehe [LR06].) Eigentlich ist der Gegenstand dieser Arbeit die *Strukturtheorie der Algebren* über Zahlkörpern. Der Zusammenhang mit dem Normsymbol besteht darin, dass die lokalen Invarianten der Algebren mit Hilfe des lokalen Normsymbols definiert werden können – und dass *die lokale Theorie der Normen nunmehr auch direkt aufgebaut werden kann, ohne Bezugnahme auf die globale Klassenkörpertheorie*. Zwar führt das Hasse in jener Arbeit nur für zyklische Erweiterungen durch, denn das ist ausreichend für die Anwendung auf die Algebrentheorie. Aber die formale Ausdehnung auf den abelschen Fall lag auf der Hand. Dazu erschien kurz darauf eine Arbeit von Chevalley [Che33a]. Aus der Korrespondenz von Chevalley mit Hasse geht hervor, dass beide unabhängig voneinander dieses Ergebnis gewonnen hatten, dass Hasse jedoch die Publikation dem jüngeren Chevalley überließ.

Der Zusammenhang der Algebrentheorie mit der Klassenkörpertheorie ist unter historischem Aspekt ein faszinierendes Thema. Hier stellen wir nur fest, dass diese ganze Entwicklung u.a. auf dem Briefwechsel Hasse-Artin aus dem Jahre 1927 beruht, angeregt durch die „ganz dumme Frage“ aus Artins Brief Nr. 10. Weitere Hinweise zu dieser Entwicklung finden wir in dem Briefwechsel Hasse-Noether. Siehe dazu [Roq05b] und [LR06].

26.4 Idealtheorie

Hier spielt Artin auf die heute so genannte „Artin - van der Waerdensche Theorie der ganzabgeschlossenen Integritätsbereiche“ an. Sie war zunächst von van der Waerden entwickelt worden, der sie 1929 in zwei aufeinanderfolgenden Artikeln in den Mathematischen Annalen publizierte [vdW29b], [vdW29a]. Als Artin die van der Waerdensche Theorie kennengelernt hatte, vereinfachte er die Beweise und stellte sie auf eine neue Grundlage.[6] Darüber berichtet er nun in dem vorliegenden Brief an Hasse. Artin hat seine neue Theorie niemals publiziert; sie wurde dann von van der Waerden in den zweiten Band des Buches „Moderne Algebra“ [vdW31] aufgenommen. Dazu heißt es dort:

[6]Van der Waerden schreibt in [vdW75], dass ihm Artin im Jahre 1930 brieflich seine neue vereinfachte Version erläutert habe. Möglicherweise hat sich van der Waerden dabei in der Jahreszahl geirrt. Denn der jetzt vorliegende Brief Artins an Hasse ist ja bereits am 10. 5. 1929 datiert, und es ist anzunehmen, dass Artin seine neuen Ergebnisse zur selben Zeit nicht nur Hasse, sondern gleichzeitig auch van der Waerden mitgeteilt hat.

> „*Die vom Verfasser aufgestellte Theorie wurde von E. Artin auf eine schöne Form gebracht und wird in dieser Form hier zum erstenmal publiziert.*“

In der Artin - van der Waerdenschen Theorie geht es darum, die klassische Idealtheorie (Zerlegung von Idealen in ein Produkt von Primidealen) auf beliebige ganzabgeschlossene Noethersche Integritätsbereiche auszudehnen. Es war bekannt, dass das nicht im wörtlichen Sinne geht; der Sachverhalt war geklärt worden durch die wegweisende Arbeit von Emmy Noether [Noe26], in welcher die heute so genannten Dedekind-Ringe eingeführt wurden. Die Idee von van der Waerden war es nun aber, für Ideale eine Äquivalenzrelation einzuführen, die „Quasigleichheit“ genannt wird, und zwar derart, dass die klassische Idealtheorie zumindest bis auf Quasigleichheit gilt.

Die heute geläufige Definition der Quasigleichheit stammt von Artin, der damit eine erhebliche begriffliche Vereinfachung erzielte. In diesem Zusammenhang empfiehlt es sich, bei einem Integritätsbereich R nicht nur die ganzen Ideale $\mathfrak{a} \subset R$ zu betrachten, sondern gleichzeitig auch die „gebrochenen“ Ideale, d.h. R-Moduln $\mathfrak{a}$ im Quotientenkörper von R mit $\mathfrak{a} \subset x^{-1}R$ für geeignetes $0 \neq x \in R$. Artin definiert: Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines Integritätsbereiches R heißen *quasigleich* (in Zeichen: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$; hierbei bedeutet $\mathfrak{a}^{-1}$ das (gebrochene) Ideal derjenigen Elemente x aus dem Quotientenkörper von R, für welche $x\mathfrak{a} \subset R$.

Das Hauptergebnis wird dann (nach Artin), durch den folgenden *Gruppensatz* gegeben:

> „*Die Klassen quasigleicher Ideale* $\neq 0$ *bilden zufolge der gewöhnlichen Idealmultiplikation eine Gruppe.*“

Dies ist eine einfache Folge aus der vorausgesetzten Ganzabgeschlossenheit des zugrundeliegenden Integritätsbereiches R. In der Tat ist der Beweis identisch mit dem Beweis, den Emmy Noether in [Noe26] gegeben hatte, wobei Noether jedoch damals die klassische Idealtheorie im üblichen Sinne im Auge hatte und zu diesem Zweck u.a. das zusätzliche Axiom aufstellte, dass jedes Primideal $\neq 0$ maximal ist. Dann bedeutet nämlich Quasigleichheit dasselbe wie Gleichheit.

Artin erwähnt nun in seinem Brief, dass seine Theorie auch dann anwendbar ist, wenn der Teilerkettensatz *nicht* gilt, wenn also der Integritätsbereich *nicht* Noethersch ist. Er sagt zwar, dass man dann „*tatsächlich zu befriedigenden Ergebnissen*“ kommt, gibt aber keine Details. In seiner Antwort hat Hasse, wie es scheint, auf die van der Waerdenschen Arbeiten verwiesen, wo

doch der Teilerkettensatz vorausgesetzt wird. Und, so Hasse, gibt es wohl in den Anwendungen kaum eine interessante Situation, wo der Teilerkettensatz nicht gilt. Die Erwiderung von Artin darauf finden wir im nächsten Brief Nr. 27 vom 19. 5. 1929. Er stellt fest, dass offenbar ein Missverständnis vorliegt. Denn seine (Artins) Überlegungen zielten ja genau auf die van der Waerdensche Theorie. Nur habe er eine neue Begründung dafür, die die Gültigkeit des Teilerkettensatzes eben nicht benötigt.

Als Ersatz für die eindeutige Primidealzerlegung gilt dabei der *Verfeinerungssatz*:

> *Wenn zwei Faktorzerlegungen* (*bis auf Quasigleichheit*) *eines ganzen Ideals $\mathfrak{a}$ gegeben sind, dann kann man die beiden Faktorzerlegungen derart weiter zerlegen, dass diese Zerlegungen bis auf die Reihenfolge der Faktoren und bis auf Quasigleichheit übereinstimmen.*

Diesen Satz hat van der Waerden in seine „Algebra II“ [vdW31] übernommen, unter Bezugnahme auf Artin. Wenn der Integritätsbereich Noethersch ist, dann folgt daraus sofort der Satz von der eindeutigen Primidealzerlegung (bis auf Quasigleichheit).

In diesem Zusammenhang ist auf ein Detail aufmerksam zu machen, das manchmal übersehen wird, nämlich die Definition der ganzen Elemente und damit der Ganzabgeschlossenheit eines Integritätsbereiches R. Wir wissen nicht genau, welche Definition Artin in seinem Brief an Hasse im Sinne hatte, wir können aber annehmen, dass es dieselbe ist, die van der Waerden in Band II seines Algebra-Lehrbuches benutzt. Nämlich: ein Element a des Quotientenkörpers von R wird bei van der Waerden „ganz“ über R genannt, wenn seine sämtlichen Potenzen a^n in einem endlichen R-Modul liegen. Falls R Noethersch ist, dann ist diese Definition gleichbedeutend mit der heute allgemein üblichen Definition, nämlich dass a einer Polynomgleichung über R mit höchstem Koeffizienten 1 genügt. Ohne Voraussetzung des Teilerkettensatzes sind aber diese beiden Definitionen nicht immer gleichbedeutend. (Beispiele: Bewertungsringe vom Rang > 1.) Demgemäß ist in der Artin-van der Waerdenschen Theorie, wenn der Teilerkettensatz nicht vorausgesetzt wird, der Begriff der Ganzabgeschlossenheit in dem bei van der Waerden angegebenen Sinne zu verstehen[7], denn genau dies wird bei dem Beweis des Artinschen Gruppensatzes benötigt.

[7] Krull nennt solche Ringe „voll und ganz abgeschlossen“ [Kru32].

Im Zusammenhang mit dem Verfeinerungssatz verweisen wir auf den Artinschen Brief Nr. 18 vom 5. 8. 1928, in welchem Artin auf die Schreiersche Verallgemeinerung des Satzes von Jordan-Hölder hinweist. Auch dort wurde zunächst nicht die Endlichkeit von Kompositionsreihen vorausgesetzt, sondern Schreier hatte allgemein gezeigt, dass je zwei Hauptreihen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen. (Siehe 18.1.) Damals hatte Artin ganz begeistert geschrieben, das sei doch die „wahre“ Formulierung des Satzes von Jordan-Hölder. Wir können uns vorstellen, dass er auch jetzt überzeugt war, die „wahre“ Formulierung der van der Waerdenschen Theorie gefunden zu haben.

Bemerkung: Es gibt einen Brief von van der Waerden an Hasse vom 29.5.28 (also ein Jahr vor diesem Brief von Artin) in welchem er seine damals neue Theorie der ganzabgeschlossenen Integritätsbereiche vorstellt. Er hatte dem Brief auch eine Ausarbeitung seines Manuskripts beigefügt. Eines der Ziele, so schrieb van der Waerden an Hasse, sei es,

> *„unter günstigen Bedingungen vielleicht den Anfang einer Verständigung zwischen der Jungschen Richtung in der Theorie der algebraischen Flächen und der Idealtheorie anzubahnen.“*

Er bat Hasse, die Arbeit

> *„nach Einsichtnahme an Prof. Jung weiter zu geben und eventuell diesem Aufklärung zu geben über die ihm unbekannten algebraischen Begriffe, die in dem Manuskript vorkommen.“*

Hasse und Jung waren damals Kollegen an der Universität Halle. Die Jungsche Theorie der algebraischen Flächen war auf anderen Grundlagen aufgebaut als die klassische algebraische Geometrie. Van der Waerden, der sich u.a. zum Ziel gesetzt hatte, die algebraische Geometrie zu „algebraisieren“, d.h. unabhängig von funktionentheoretischen und topologischen Methoden zu entwickeln, wollte wohl einen Brückenschlag zwischen den wesentlich bewertungstheoretischen Methoden von Jung[8] und den idealtheoretischen Methoden von Noether herstellen. Die Jungschen „Primdivisoren“ waren, so van der Waerden, nichts anderes als die von ihm in seiner Arbeit genannten „höheren Primideale“.

Die von van der Waerden angestrebte „Verständigung“ scheint jedoch ausgeblieben zu sein, und die Jungsche Theorie ist heute in Vergessenheit geraten.

---

[8] Jung hat diese später in seinem Buch [Jun51] dargestellt, das jedoch wenig Einfluss gehabt hat.

27 19.05.1929, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 19. Mai 1929.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren lieben Brief. Mit Ihrer Terminologie bin ich ganz einverstanden und bin überzeugt, dass sie sich sehr gut bei den Beweisen bewähren wird. Ich habe sie auch Herrn Petersohn[1] mitgeteilt, der sie in seiner Vorlesung verwerten wird.

Ich fahre leider morgen früh in die Pfingstferien und kann daher den heutigen Brief nur recht kurz machen. Nach den Ferien werde ich Ihnen ausführlicher schreiben.

Es ist ein Missverständnis mit der neuen Idealtheorie.[2] Ich meine natürlich nicht dass sich in den Anwendungen irgendwo eine Stelle finden wird wo der Teilerkettensatz nicht auftritt. Es wird also überall die Theorie von van der Waerden ausreichen. Aber ich meinte auch die Theorie von van der Waerden. Dafür habe ich nämlich eine neue einfachere von der van der Waerdenschen ganz verschiedene Begründung, die den Teilerkettensatz nicht benötigt. Das Hauptergebnis ist dies, dass zwei Zerlegungen eines Ideals je eine Unterzerlegung haben, die identisch sind. Als Spezialfall ist darin die eindeutige Zerlegbarkeit enthalten. Allerdings ist die Theorie doch in einem Fall verwendbar, in dem der Teilerkettensatz wenigstens bis jetzt noch nicht bekannt ist, das ist ein Bereich relativ ganzer Funktionen. Auch hier gilt wie ich zeigen kann, die van der Waerdensche Theorie einschliesslich der Zerlegbarkeit in Primideale. Vielleicht ist das für das Problem der relativ ganzen Funktionen wichtig. Doch will ich Ihnen dies das nächste Mal ausführlicher schreiben.[3]

Mit den besten Grüssen auch an Frau Gemahlin, Ihr

Artin

---

[1] Gemeint ist Hans Petersson, ein Schüler Heckes. Siehe 27.1.

[2] Siehe 26.4.

[3] Die angekündigte ausführlichere Darstellung haben wir in dem Nachlass von Hasse nicht gefunden.

Kommentare zum Brief Nr.27:

27.1 Petersson

Im vorangegangenen Brief Nr. 26 vom 10. 9. 1929 hatte Artin mitgeteilt, dass Hasses neue Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und der lokalen Klassenkörpertheorie in einer Vorlesung von Herrn Petersson vorgetragen werde.

Hans Petersson war ein Schüler von Hecke in Hamburg, er hatte 1925 doktoriert und sich 1929 in Hamburg habilitiert. Hasse hatte Petersson sehr gut gekannt vom Hamburger Seminar, das Hasse regelmässig besuchte solange er in Kiel war. Vgl. [Fre77]. Wahrscheinlich handelte es sich jetzt um Peterssons erste Vorlesung. Die Tatsache, dass in dieser ersten Vorlesung Klassenkörpertheorie und Reziprozitätsgesetze behandelt wurden, lässt darauf schließen, dass dafür in Hamburg ein reges Interesse bestand. Durch die Tätigkeit von Artin, Blaschke, Hecke u.a. war Hamburg zu einem Anziehungspunkt für viele junge Mathematiker geworden.

Anscheinend hatte Hasse in Beantwortung des vorangegangenen Briefes an Artin einige Vorschläge zur Terminologie gemacht, die man in der Vorlesung benutzen könne. Deshalb bedankt sich Artin jetzt für diese Vorschläge und berichtet, dass sie Petersson in seiner Vorlesung verwenden wird.

Allerdings schreibt Petersson an Hasse in einem Brief vom 22. Juni 1929, dass er in seiner Vorlesung nicht so weit gekommen sei, wie er ursprünglich gedacht hatte:

> „*... man unterschätzt bei weitem die Zeit, die man braucht, um einen mathematischen Sachverhalt in extenso vorzutragen, wenn man dabei nicht unverständlich bleiben will. Es scheint nun Artin und mir, dass ich wohl kaum noch dazu kommen werde ... Vielleicht setze ich die Vorlesung im Privatissima-Kreise noch in den August hinein fort, um so dazu zu kommen, das Reziprozitätsgesetz für die Normenreste in Ihrer verallgemeinerten Fassung vorzutragen.*“

Hasse hatte auch angeboten, Petersson zur Kenntnisnahme die Korrekturenfahnen seiner Arbeit über das Normenrestsymbol zu senden. Dieser schreibt aber:

> „*... ich glaube, dass ich günstigstenfalls nicht so viel Zeit haben*

> *werde, diese Dinge so ausführlich zu erzählen, daß es nötig sein wird, Sie Ihrer kostbaren Korrekturen zu berauben.*“

Übrigens: Wenn Artin den Namen von Petersson manchmal als „Petersohn“ schreibt, so ist das nicht unbedingt als Schreibfehler zu verstehen. Der Vater von Petersson hieß zunächst „Petersohn“ und hat sich erst später in „Petersson“ umbenannt. Es erscheint möglich, dass Artin davon wusste und beide Schreibweisen des Familiennamens kannte.

Gegen Ende der 1930er Jahre begann sich Hasse für die Arbeiten von Petersson näher zu interessieren. Damals arbeitete Hasse an Zetafunktionen für elliptische Kurven über $\mathbb{Q}$, die später „Hasse-Weil-Zetafunktionen“ genannt wurden. Da diese einer Funktionalgleichung genügen, war Hasse an den Arbeiten von Petersson interessiert, die sich mit der Konstruktion von Lösungen von Riemannschen Funktionalgleichungen befassten.

28 15.12.1929, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 15. Dezember 1929.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für die freundlichen Grüsse die mir Herr Suetuna übermittelt hat.[1] Ich fahre am Sonntag nach Reichenberg[2] und werde da mit meiner Frau durch Halle kommen. Es würde mich nun ausserordentlich freuen, wenn ich mich wieder einmal mit Ihnen über die verschiedenen uns interessierenden Dinge unterhalten könnte. Haben Sie Zeit? Wenn ja, so würde ich in Halle auf einen Tag Station machen. Es würde nämlich nur auf der Hinreise nach Reichenberg gehen, denn die Rückreise machen wir über Berlin, da wir dort meine Schwiegereltern besuchen wollen.

Würden Sie also so freundlich sein und mir mitteilen, ob es Ihnen am Sonntag passt?[3] Meine Frau[4] und ich würden uns unendlich freuen Sie wiederzusehen.

Momentan arbeite ich über die kontinuierlichen Gruppen, allerdings ohne Erfolg. Es will nicht klappen und ich weiss noch nicht ob etwas daraus wird.[5]

Mit den besten Grüssen auch von meiner Frau und vielen Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin

Ihr Artin

---

[1] Siehe 28.1.

[2] In Reichenberg lebte Artins Mutter; er war dort aufgewachsen und hatte dort bis zum Beginn seiner Studien 1917 gewohnt.

[3] Also am 22. Dezember 1929.

[4] Artin hatte am 15. 8. 1929 seine Schülerin Natalie Jasny geheiratet. Hasse und die Artins waren im September 1929 gemeinsam zu der DMV-Tagung nach Prag gefahren.

[5] Siehe 28.2.

Kommentare zum Brief Nr. 28:

28.1 Suetuna

Zyoiti Suetuna (1898–1970) hatte in Tokio unter Takagi studiert. Er hielt sich vier Jahre, von 1927 bis 1931 in Deutschland auf. In den ersten beiden dieser Jahre war er in Göttingen und arbeitete mit Landau und Emmy Noether. 1929 ging er nach Hamburg, um bei Artin zu arbeiten.

Die umfangreiche Korrespondenz von Hasse mit Suetuna (69 Briefe) beginnt 1928. Im Verlauf des Jahres 1929 entwickelte sich eine Kooperation über eine neue Version des sogenannten *Teilerproblems* der Zahlentheorie. Es handelt sich um die Anzahl $T_k(\mathfrak{n})$ der Zerlegungen eines ganzen Ideals $\mathfrak{n}$ aus einem algebraischen Zahlkörper Ω in eine gegebene Anzahl k von ganzen Idealfaktoren $\mathfrak{N}_i$ aus einem gegebenen endlichen Erweiterungskörper K, also $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}_1 \cdots \mathfrak{N}_k$. Genauer gesagt handelt es sich um die summatorische Funktion $\sum_{N(\mathfrak{n}) \leq x} T_k(\mathfrak{n})$. Das Hauptinteresse liegt dabei in der arithmetischen Struktur der erzeugenden Funktion

$$Z(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{T_k(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s}.$$

Hasses Beitrag zu der gemeinsamen Arbeit [HS31] bestand in der Beschreibung des Zusammenhangs dieser Funktion mit Artinschen L-Funktionen des zu $K|\Omega$ gehörigen galoisschen Körpers.

Suetuna besuchte Hasse in Halle Anfang Dezember 1929, um das Manuskript zu dieser Arbeit fertigzustellen. Nach seiner Rückkehr traf er mit Artin in Hamburg zusammen und richtete ihm Grüße von Hasse aus. Darauf bezieht sich Artin im ersten Satz seines Briefes.

28.2 Kontinuierliche Gruppen

Der Brief von Artin gibt uns keinen Hinweis, mit welchen Fragen über kontinuierliche Gruppen er sich beschäftigt hat. Es gibt keine Publikation Artins über diesen Themenkreis.

Man kann aber einigermassen erraten, mit welchen Fragen über kontinuierliche Gruppen sich Artin beschäftigt hat. Denn vieles deutet darauf hin, dass es Ideen waren, die später zur Doktorarbeit von Tate [Tat67] führten, die ja die Heckeschen Arbeiten weiterführt, welche Artin seit seiner Studienzeit stark beschäftigten. (Siehe dazu [Fre04].) Und zwar ist zu vermuten, dass

Artin eine zur Theorie der L-Reihen, der Funktionalgleichung der L-Reihen und der Zeta-Funktionen sowie der analytischen Klassenzahlformel analoge Theorie für lokale Körper sucht. Darauf deuten die folgenden Tatsachen hin:

1. Artins Dissertation galt der Herleitung einer solchen Theorie für quadratische Kongruenzfunktionenkörper (für diese Entwicklung siehe [Fre04]).

2. Hasse hat einige Monate vor diesem Brief seine erste Arbeit zur Klassenkörpertheorie im Kleinen [Has30c] eingereicht (16.März 1929). Es scheint ziemlich sicher zu sein, dass Artin im Anschluss daran die Idee hatte, die Arbeiten Heckes auf lokale Körper zu übertragen. Dass das so sein könnte, ergibt sich auch aus dem nächsten Punkt:

3. Artin hat 1946 eine Dissertation angeregt mit dem Titel: *On the Zeta Function for Ideles*, die eine Studentin, Margaret S. Matchett, an der Indiana University eingereicht hatte.[6] Natürlich waren 1929 die Idele noch nicht bekannt, aber Artin hat, nachdem er vielleicht bei der Übertragung der Heckeschen Theorie auf lokale Körper auf Schwierigkeiten gestossen war (wie er im Brief Nr.28 sagt), später gesehen, dass für Idele eine solche analoge Theorie möglich sein müsse. Dabei ist daran zu erinnern, dass Artin von 1933 bis 1939 nichts publizierte, sich dann aber in Amerika bald mit Idelen und Adelen eingehender beschäftigte (siehe Artin-Whaples [AW46]). Siehe dazu auch Artins erste in den USA geleitete Dissertation mit dem Titel: *On the structure of the group of* $\mathfrak{P}$*-adic* 1*-units*, von David Gilbarg an der Indiana University 1941 eingereicht [Gil42], was ebenfalls auf Artins frühe Beschäftigung mit Problemen in lokalen Körpern hindeutet.

Artin hat übrigens im Jahre 1931 (oder 1932?) in Göttingen einige Vorträge über Lie-Gruppen gehalten.

[6] Diese Arbeit ist offenbar nicht publiziert worden; sie wird in der Dissertation von Tate [Tat67] erwähnt.

Kapitel 4

1930–1934

29 23.08.1930, Brief von Artin an Hasse

Neuland[1], den 23. August 1930

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für die Zusendung der Korrekturen, die ich mit grossem Genuss gelesen habe.[2] Wenn ich etwas daran auszusetzen habe so ist es dies, dass ich viel zu gut dabei weg komme und es aussieht, als ob ich viel mehr dabei geleistet hätte als es tatsächlich der Fall ist.

Besonderes Vergnügen hat mir Ihre Theorie der Normenreste gemacht.[3] Sie haben vollständig recht mit der Behauptung, dass dies auch der „wahre" Zugang zu $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ist, da ja die Behauptung: Wenn $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so ist α Normenrest, niemals verwendet wird und alles andere sehr einfach geht. Auch für alles Weitere ist dieser Satz ja entbehrlich.

Versehen oder gar Fehler habe ich natürlich nicht finden können und das ist bei dem hohen Niveau des Berichtes selbstverständlich. Leider ist der Satz miserabel, denn es wimmelt von Druckfehlern. Sie Armer, was müssen Sie da für Arbeit haben. Leider ist die Zeit zu kurz um noch das zu machen, ich hätte sonst gerne geholfen.

Darf ich Sie auf einen Druckfehler aufmerksam machen den man leicht übersieht:

Fahne 4, Satz IV $\left[\frac{K_1 K_2}{\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{K_1}{\mathfrak{P}}\right] \left[\frac{K_2}{\mathfrak{P}}\right]$.

Da sind dem Setzer auf der rechten Seite die Primideale durcheinander geraten, da rechts etwa $\left[\frac{K_1}{\mathfrak{q}_1}\right] \left[\frac{K_2}{\mathfrak{q}_2}\right]$ stehen müsste.

Vielleicht haben Sie es schon bemerkt. [4]

Natürlich hat mich Ihr Bericht wieder zum Nachdenken über diese Dinge gereizt, die ich jetzt so lange nicht angerührt habe. Ich will in Hamburg dann wieder ernstlich an die Dinge herangehen.[5] Hier kann ich es nicht, da

[1] Wie es scheint, ist dies ein Urlaubsort, an dem sich Artin aufhält. Neuland, heute Novina im Norden von Tschechien, ist ein Dorf von ungefähr 500 Einwohnern, nicht sehr weit von Reichenberg.

[2] Siehe 29.1.

[3] Siehe 29.2.

[4] In der publizierten Fassung stehen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ statt der von Artin vorgeschlagenen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$.

[5] Im nächsten Brief wird sich herausstellen, was Artin damit meint.

ich nicht Literatur zur Verfügung habe. Ich darf doch die Fahnen behalten?

Haben Sie noch über den Umkehrfaktor für ℓ^n nachgedacht?[6]

Ich bleibe bis zum 28. August hier und bin dann wieder auf einige Tage in Hamburg. Wollen Sie uns da nicht einmal besuchen?

Mit vielen Grüssen auch von meiner Frau und besten Empfehlungen an Frau Gemahlin

Ihr Artin

Zu erreichen bin ich von jetzt ab wieder am besten in Hamburg.

[6]Siehe 29.3.

Kommentare zum Brief Nr. 29:

29.1 Die Korrekturen

Die „Korrekturen", für die sich Artin bedankt, waren die Korrekturfahnen zu Hasses Klassenkörperbericht II [Has30a].

Seit drei Jahren war in den Briefen Artins immer wieder, direkt oder indirekt, der in Arbeit befindliche Klassenkörperbericht II von Hasse angesprochen worden – beginnend mit dem Brief Nr. 10 vom 21. 7. 1927, in welchem Artin sein Bedauern ausdrückte, dass Hasse seinen Bericht ganz neu schreiben muss. Das war nötig, um Artins eben neu bewiesenes allgemeines Reziprozitätsgesetz als Grundlage aller anderen Reziprozitätsgesetze in den Bericht aufnehmen zu können. Hasse hat Artin stets auf dem Laufenden gehalten über den Fortschritt der Arbeiten, über sein allgemeines Konzept, über gewisse Beweisanordnungen, über die von ihm verwendete Terminologie, über offene Fragen u.a.m.. Wie wir aus der Korrespondenz sehen, hat Artin darauf stets mit Interesse reagiert und lebhaft seine eigene Meinung zu diversen Fragen geäußert.

Hasse hat also seinen Klassenkörperbericht II in engem wissenschaftlichen Kontakt mit Artin angefertigt. Das war jedoch keine Kooperation im eigentlichen Sinne, denn die Konzeption und die Niederschrift des Berichts lag ausschließlich bei Hasse. Aber er legte Wert darauf, Artins Meinung dazu zu erfahren.

Nun also ist der Klassenkörperbericht II fertig, das Manuskript ist zum Druck gegeben und die Korrekturfahnen liegen vor. Es überrascht uns nicht, dass Hasse diese Korrekturfahnen an Artin zur Kenntnisnahme schickte.

Wenn Artin dazu schreibt, er komme „viel zu gut dabei weg", dann erscheint uns das als eine reine Höflichkeitsgeste. Schließlich war der Klassenkörperbericht II das erste Buch, in dem das Artinsche Reziprozitätsgesetz dargestellt und als Grundlage für eine systematische Herleitung der klassischen Reziprozitätsgesetze genutzt wurde. Artin war sich sehr bewusst, dass sein allgemeines Reziprozitätsgesetz als die Krönung einer langen Entwicklung der Klassenkörpertheorie anzusehen war, und dass es gleichzeitig die Basis aller bis dahin bekannten expliziten Gesetze zur Reziprozität lieferte. Seine Äußerungen dazu, auch im Briefwechsel mit Hasse, sind unmissverständlich. Vgl. z.Bsp. den Brief Nr. 10 vom 21. 7. 1927.

29.2 Normenreste

Die Theorie der Normenreste findet sich in Kapitel 2 des Klassenkörperberichts II [Has30a]. Sie beruht auf der Arbeit „*Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols*“, die Hasse im März 1929 fertiggestellt hatte. Vgl. 26.1.

Beim Aufbau dieser Theorie im Klassenkörperbericht II werden zwei Phasen unterschieden: *Erstens* die Herleitung der formalen Eigenschaften des von Hasse definierten Normenrestsymbols $\left(\frac{\alpha, K|k}{\mathfrak{p}}\right)$, für jede abelsche Zahlkörper-Erweiterung $K|k$ und jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k. Dazu gehört auch die Produktformel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha,\, K|k}{\mathfrak{p}}\right) = 1\,.$$

Dies ist der „formale“ Teil, von dem Artin feststellt, dass „*alles sehr einfach geht*“.

Die *zweite* Phase ist dann der Beweis des „Normensatzes“, d.h. dass $\left(\frac{\alpha, K|k}{\mathfrak{p}}\right)$ genau dann verschwindet, wenn α Norm aus der lokalen Erweiterung $K_{\mathfrak{p}}|k_{\mathfrak{p}}$ ist. Dieser Satz wird (wie Artin schreibt) „niemals verwendet und ist für alles Weitere entbehrlich“.

Hasse sagt dazu in seinem Klassenkörperbericht II, dass die Produktformel „rein formalen Charakter“ besitzt und als „Übergangsglied in der Kette vom Artinschen Reziprozitätsgesetz zum Reziprozitätsgesetz der Potenzreste“ dient. Der Normensatz dagegen sei ein „selbständiges Theorem“, das aber für das Reziprozitätsgesetz der Potenzreste keine besondere Rolle spiele. Diese Sichtweise ist es offenbar, die Artin im vorliegenden Bericht anspricht und ihm „grosses Vergnügen“ bereitet hat, insbesondere deshalb, weil der Beweis des Normensatzes, so wie er in [Has30a] dargestellt ist, doch ziemlich lang und umständlich ist. Artin hatte in diesem Zusammenhang schon in seinem früheren Brief Nr. 15 vom 19. 8. 1927 erklärt, dass er mit Hasses „*Formalisierung voll und ganz einverstanden*“ sei. Vgl. 15.3.1.

Aus heutiger Sicht würden wir die Sache vielleicht anders herum sehen. Damals nämlich musste zur Definition des *lokalen* Normenrestsymbols das *globale* Artinsche Reziprozitätsgesetz herangezogen werden, und die Produktformel ergab sich in der Tat in einfacher Weise aus diesem Ansatz. Heute aber ist es möglich, nach dem Vorgang von Hasse in [Has33a], das Normsymbol rein lokal zu definieren und den Normensatz dementsprechend in der lokalen Situation direkt zu beweisen. Der Produktsatz erscheint dann als zentrales Theorem der Klassenkörpertheorie, und er ist nunmehr die *Grundlage*

für den Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes.

29.3 Der Umkehrfaktor

Die explizite Diskussion des Umkehrfaktors $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ für das Potenzrestsymbol findet sich in dem Klassenkörperbericht II nur für den Fall eines Primzahlexponenten ℓ durchgeführt (in §20/21).

Hasse hatte sich in seiner früheren Arbeit [Has29], die von Artin in die Hamburger Abhandlungen aufgenommen worden war, mit dem Umkehrfaktor auch für Primzahlpotenzexponenten ℓ^n beschäftigt; dort hatte er die Diskussion zurückführen können auf den zweiten Ergänzungssatz, den er in der gemeinsamen Arbeit mit Artin [AH28] behandelt hatte. Aber eine befriedigende Form des expliziten Reziprozitätsgesetzes war Hasse damals nicht gelungen. (Vgl. 10.4.)

Das war wohl der Grund, weshalb Artin fragt, ob Hasse über den Umkehrfaktor für ℓ^n vielleicht doch noch weiter nachgedacht habe.

30 18.09.1930, Brief von Artin an Hasse

Berlin, den 18. Sept. 1930

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief. Nach kurzem Aufenthalt in Hamburg bin ich nach Berlin gefahren[1] und hier zum Arbeiten gekommen. Darüber möchte ich einiges erzählen:[2]

1.) Mich störte in Ihrem Bericht der Satz auf Fahne 73, Zeile 10 von oben.[3] Hier haben Sie die vollständige Definition von $L(s, \chi)$:

Sei $\mathfrak{p}$ Primideal, σ die zugehörige Substitution in K/k, die aber *nicht* eindeutig bestimmt ist, $\mathfrak{T}$ die Trägheitsgruppe, e ihre Ordnung. Man setze:

$$\chi(\mathfrak{p}^\nu) = \frac{1}{e} \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \chi(\sigma^\nu \tau) \ ,$$

also gleich dem Mittel aller in Frage kommenden Werte. Dann ist

$$\log L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{p}, \nu} \frac{\chi(\mathfrak{p}^\nu)}{\nu N \mathfrak{p}^{\nu s}}$$

die vollständige Definition auch für Diskriminantenteiler. $L(s, \chi)$ hat auch eine ganz normale Produktentwicklung der Form

$$L(x, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{|E - N\mathfrak{p}^{-s} A_{\mathfrak{p}}|} \ ,$$

wo $A_{\mathfrak{p}}$ eine gewisse, $\mathfrak{p}$ zugeordnete Matrix (die auch 0 sein kann) ist und nur Einheitswurzeln als char[akteristische] Wurzeln hat.

Alle Relationen und Sätze gelten jetzt von vornherein genau.

2.) Mich störte noch viel mehr die Bemerkung auf Fahne 72, Absatz *nach* Satz XI.[4] Daher kann ich Ihnen jetzt auch die vollständige Funktionalgleichung angeben, in der lediglich die „Gausssche Summe“ $W(\chi)$ mit dem Absolutbetrag 1 nicht direkt angegeben ist.

---

[1] In Berlin wohnten Artins Schwiegereltern Jasny. Artin hatte im Jahre 1929 geheiratet.

[2] Siehe 30.1.

[3] Siehe 30.1.1.

[4] Siehe 30.1.2



Abbildung 5: Artin: 1930er Jahre

(Foto: N. Artin)

Die genaue Funktionalgleichung lautet: Es ist

$$M(1-s,\bar{\chi}) = W(\chi)M(s,\chi) \qquad \text{mit} \qquad |W(\chi)| = 1\,,$$

wobei zu setzen ist:

$$M(s,\chi) = \Gamma(s,\chi,K/k)\left(\frac{d^{\chi(1)}N_k(\mathfrak{f}(\chi,K/k))}{\pi^{n\chi(1)}}\right)^{\frac{s}{2}} L(s,\chi,K/k)\ .$$

Dabei ist n der Grad, d die Diskriminante und N_k die Norm im Grundkörper k. Ferner ist:

$$\Gamma(s,\chi,K/k) = \prod_{\mathfrak{p}_{\infty,i}} \gamma(s,\chi,K/k,\mathfrak{p}_{\infty,i})$$

erstreckt über alle $\infty-$en Primideale von k und zwar ist:

$$\gamma(s,\chi,K/k,\mathfrak{p}_{\infty,i}) = \begin{cases} \left(\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})\right)^{\chi(1)} & \text{wenn } \mathfrak{p}_i \text{ komplex,} \\ \left(\Gamma(\frac{s}{2})^{\frac{\chi(1)+\chi(\sigma_i)}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})^{\frac{\chi(1)-\chi(\sigma_i)}{2}}\right) & \\ & \text{wenn } \mathfrak{p}_i \text{ reell.} \end{cases}$$

Darin ist noch σ_i zu erklären. $\mathfrak{p}_{i,\infty}$ bedeutet eine reelle Bewertung von k, ein Primteiler $\mathfrak{q}_{i,\infty}$ bedeutet eine Fortsetzung dieser Bewertung auf K. Dabei sei Ω der grösste in K enthaltene reelle Körper (also der Zerlegungskörper von $\mathfrak{q}_{i,\infty}$). Man zeigt leicht, dass K in bezug auf Ω höchstens relativ quadratisch ist. Die Gruppe zu der Ω gehört habe die Erzeugende σ_i. (Dann ist also jedenfalls $\sigma_i^2 = 1$ oder sogar schon $\sigma_i = 1$). Das ist das σ_i. Es ist die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}_{i,\infty}$.

Aus dem bisherigen folgt schon, dass alle Exponenten in $\Gamma(s,\chi)$ positive ganze Zahlen sind, so dass $L(s,\chi)$ auch für $R(s) \leq 0$ regulär und unverzweigt ist. In $R(s) \leq 0$ hat $L(s,\chi)$ nur Nullstellen angebbarer Ordnung in $0,-1,-2,-3,\ldots$.

Es bleibt noch das Zeichen $\mathfrak{f}(\chi,K/k)$ zu erklären, das ich den Führer des Charakters χ nenne. Ich gebe ihn gleich vollständig an.

Sie werden jetzt an Heckesche Grössencharaktere denken und an die Beziehungen zur Relativdiskriminante. Natürlich geht das, es ist aber nicht erforderlich, da das im Folgenden angegebene $\mathfrak{f}$ von vornherein die gewünschten Eigenschaften hat.

3.) Damit bin ich bei dem Teil angelangt der mich noch mehr interessiert als das Vorangehende. Es ist die Verallgemeinerung der Diskr[iminanten]-Führerformel auf beliebige Körper.[5]

Es sei $\mathfrak{T}$ die Trägheitsgruppe, $\mathfrak{V}_i$ die i-te Verzweigungsgruppe, e die Ordnung von $\mathfrak{T}$, p^{R_i} die von $\mathfrak{V}_i$. Endlich durchlaufe τ die Gruppe $\mathfrak{T}$, τ_i die Gruppe $\mathfrak{V}_i$. Die Auswahl von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}_i$ bei gegebenem $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers ist gleichgültig (sie hängt ja noch vom gewählten Primteiler in K ab; dabei sei K/k galoisch).

Man setze jetzt

$$\mathfrak{f}(\chi, K/k) =$$
$$= \prod_{\mathfrak{p} \text{ aus } k} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e}\left(e\chi(1) - \Sigma\chi(\tau) + p^{R_1}\chi(1) - \Sigma\chi(\tau_1) + p^{R_2}\chi(1) - \Sigma\chi(\tau_2) + \ldots\right)}$$

erstreckt über alle $\mathfrak{p}$ aus dem Grundkörper k. Das ist das $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ aus der Funktionalgleichung. Es hat folgende Eigenschaften:

a) *Es ist ein ganzes Ideal aus k*. Das ist der tiefste Satz und zwar der, der alles über Trivialitäten erhebt. Dass der Exponent von $\mathfrak{p}$ grösser gleich 0 ist, ist sofort zu sehen. Das schwere ist der Nachweis, dass er ganz ist. Aber auch das ist mir gelungen.

b) Ist K_1/k auch galoissch und $K \subset K_1$, χ aber schon in K erklärbar, dann ist

$$\mathfrak{f}(\chi, K/k) = \mathfrak{f}(\chi, K_1/k) \ .$$

Bereits das ist nicht ganz einfach.

c) Ist Ω Zwischenkörper, ψ ein Charakter in K/Ω und χ_ψ der induzierte Charakter, so gilt:

$$\mathfrak{f}(\chi_\psi, K/k) = \mathfrak{D}_{\Omega/k}^{\psi(1)} \cdot N_{\Omega/k}(\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)) \ .$$

dabei ist $\mathfrak{D}_{\Omega/k}$ die Relativdiskriminante ($\psi(1)$ steht im Exponenten), $N_{\Omega/k}$ das Zeichen für Relativnorm.

d) Für den Hauptchar[akter] ist $\mathfrak{f}(\psi) = 1$.[6] Setzt man also für ψ den H[aupt]ch[arakter] ein, so folgt:

$$\mathfrak{D}_{\Omega/k}^{\psi(1)} = \mathfrak{f}(\chi_\psi, K/k) = \prod_\chi (\mathfrak{f}(\chi, K/k))^{g_i}$$

[5]Siehe 30.1.3.

[6]Artin schreibt $\mathfrak{f}(\chi)$, meint aber wohl ψ.

wo g_i diejenigen ganzen Zahlen ≥ 0 sind, die auf Seite 94 der L-Reihenarbeit auftreten. Das ist die Verallgemeinerung der Führerdiskr[iminanten]-Formel von der ich sprach.[7]

e) Ist K abelsch, so ist $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ der Führer der Klassenkörpertheorie. Das ist leicht zu zeigen, auf diesem Satz basiert a) und ist der tiefste Schluss bei a).

f) Ist K der kleinste galoissche Körper in dem $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ erklärbar ist, so gehen in $\mathfrak{f}$ genau diejenigen Primideale aus k auf, die in K verzweigt sind.

g) Ist k der Körper der rationalen Zahlen, so ist $\mathfrak{f}(\chi) = 1$ dann und nur dann, wenn χ der Hauptcharakter ist.

h) Ist k beliebig, $\mathfrak{f}$ ein gegebenes Ideal, N eine Schranke für den Grad von K/k, so tritt $\mathfrak{f}$ als Führer nur in einer beschränkten Menge von Relativkörpern mit höchstens dem Grad N auf, wenn immer der kleinste Körper genommen wird in dem $\mathfrak{f}$ erklärbar ist.

i) Konjugiert algebraische Charaktere haben gleiche Führer.

Das ist vorläufig das Wichtigste was ich zu erzählen habe.[8] Ich habe vorher viel über ℓ^n-primär gerechnet, aber nichts herausbekommen. Die Arbeit von Weddle ist mir leider unzugänglich.[9] Lediglich ℓ^2-primär konnte ich schaffen. Eine Basiszahl dafür lautet

$$\boxed{1 - \lambda_2^{\ell^2-\ell}\lambda_1}$$

Damit also α ℓ^2-primär ist, ist notw[endig] und hinreichend:

$$\alpha \underset{\ell^2}{\equiv} \left(1 - \lambda_2^{\ell^2-\ell}\lambda_1\right)^a \qquad (\mathrm{mod}\ \ell^2\lambda_1)$$

bei passendem a.

Aber damit habe ich weiter nichts anfangen können. Die Basis für ℓ^3-primär habe ich auch noch bestimmt, sie ist aber so kompliziert dass man ihr nichts ansehen kann.

Sie sind doch nicht böse wegen der „Einführung“ bei 1.) und 2.). Sie sind natürlich nur Scherz.

Bis zum 25. September bin ich noch in Berlin unter der Adresse

[7]In der vorangegangenen Formel ist $\psi(1) = 1$, der Exponent kann also weggelassen werden. Die χ durchlaufen die irreduziblen Charaktere der Galoisgruppe, und die g_i sind die Grade dieser Charaktere, also $\chi(1)$.

[8]Hier beginnt Artin eine neues Thema, das nichts mit L-Reihen zu tun hat. Siehe 30.2.

[9]Siehe 30.2.1.

bei Jasny, Berlin-Wilmersdorf,
Sodenerstrasse 34
beim Mossestift.

Dann bis etwa 8. Oktober in

Reichenberg, Tschechoslovakei, Felgenhauerstrasse 20.

Leider habe ich Ihre Karte mit der neuen Anschrift in Hamburg vergessen. Sie kommen aber doch wohl mal in die Universität.

Mit den besten Grüssen auch an Frau Gemahlin und auch von meiner Frau

Ihr Artin

Die neuen Ergebnisse stützen doch sehr die Vermutung der Ganzheit von $L(s, \chi)$.[10]

[10] Die Frage der Ganzheit der Artinschen L-Reihen (ausgenommen für den Hauptcharakter) ist heute noch offen. Richard Brauer hat 1947 lediglich beweisen können, dass es sich um eindeutige meromorphe Funktionen handelt [Bra47a].

Kommentare zum Brief Nr.30:

30.1 L-Reihen

Im vorangegangenen Brief Nr. 29 vom 23. 8. 1930 hatte Artin geschrieben, dass er nach der Lektüre der Korrekturfahnen des Hasseschen Berichts angeregt wurde, über „*diese Dinge*“ nachzudenken, die er „*lange nicht angerührt*“ habe. Jetzt, nach einem Monat, berichtet er Hasse über das Ergebnis seines Nachdenkens. Wir entnehmen diesem Brief, dass es sich um die Vertiefung und Ergänzung von Artins früherer Arbeit aus dem Jahre 1923 [Art23b] über L-Reihen mit Gruppencharakteren handelt. Über diese frühere Arbeit hatte Artin im Brief Nr. 1 vom 9. 7. 1923 berichtet.

Artins Theorie der L-Reihen im Jahr 1923 war zunächst noch nicht vollständig. Denn sie beruhte auf dem Artinschen Reziprozitätsgesetz, das damals noch nicht gesichert war. Wahrscheinlich war das der Grund dafür gewesen, dass Hasse die Artinschen L-Reihen nicht in den Teil I seines Klassenkörperberichts aufgenommen hatte. Nun aber lag der Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes vor [Art27a], und Artin hatte im Brief Nr. 8 vom 17. 7. 1927 geschrieben: „*Damit ist endlich alles aus der L-Reihenarbeit bewiesen.*“ Demzufolge nahm Hasse die Theorie der Artinschen L-Reihen in den Teil II seines Berichts auf, und zwar, wie er schreibt, als

> „*tiefliegende Anwendung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes auf die Theorie der galoisschen Zahlkörper*“.

Bei der Lektüre der Korrekturfahnen fand also Artin seine eigene Theorie aus dem Jahre 1923 dargestellt. Und das eben hat ihn angeregt, noch einmal darüber nachzudenken und manches zu ergänzen.

30.1.1 Definition

Zunächst, in Abschnitt 1.) des Artinschen Briefes, geht es um die *Definition* der L-Reihen. Denn die 1923 in [Art23b] gegebene Definition hatte noch einen Schönheitsfehler. Sie konnte explizit nur in einer vorläufigen Form gegeben werden, weil die Beiträge der verzweigten Primstellen unbestimmt blieben und zunächst weggelassen werden mussten. Denn nur für die unverzweigten Primstellen ist die Frobenius-Substitution eindeutig bestimmt.

Es geht um eine galoissche Zahlkörper-Erweiterung $K|k$; sei G die zugehörige Galoisgruppe und χ ein Charakter von G. Ist $\mathfrak{p}$ ein in K *unverzweigtes*

Ideal von k und $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung auf K mit der Frobenius-Substitution $(\frac{K|k}{\mathfrak{P}}) \in G$, so setzt Artin $\chi(\mathfrak{p}^\nu) = \chi\left((\frac{K|k}{\mathfrak{P}})^\nu\right)$. Dieser Wert ist unabhängig von der Auswahl der Fortsetzung $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$, weil die Wahl einer anderen Fortsetzung die Ersetzung von $(\frac{K|k}{\mathfrak{P}})$ durch eine konjugierte Substitution aus G bedeutet, und weil die Charakterwerte konjugierter Gruppenelemente übereinstimmen. Bei der Definition der Reihe $\log L(s,\chi)$ wird dann der so definierte Wert $\chi(\mathfrak{p}^\nu)$ verwandt. Das war Artins *vorläufige* Definition in seiner früheren Arbeit aus dem Jahre 1923; es fehlten noch endlich viele Beiträge, die den verzweigten Primstellen entsprechen.

Um zu der endgültigen Definition zu gelangen, hatte Artin damals (also 1923) das Problem auf den abelschen Fall zurückgeführt. Das ging aber nur bis auf endlich viele Euler-Faktoren. Im abelschen Falle konnten die neuen, Artinschen L-Funktionen mit den klassischen Weberschen L-Funktionen identifiziert werden vermöge des Artinschen Reziprozitätsgesetzes (das 1923 allerdings noch nicht bewiesen war). Für die klassischen L-Funktionen war es (nach Hecke) bekannt, wie die vollständige Definition unter Einschluss der verzweigten und der unendlichen Stellen auszusehen hatte. Von da aus konnte Artin wieder auf seine neuen L-Funktionen zurückschließen, unter Benutzung sowohl der Funktionalgleichung als auch „*einer bekannten Schlussweise von Hecke*“, die jedoch Artin nicht weiter erläuterte, sondern wozu er auf die Heckesche Arbeit [Hec17] verwies. Es handelte sich um einen Schluss aus der Funktionentheorie der analytischen Funktionen, die einer Riemannschen Funktionalgleichung für $s \to 1-s$ genügen.

Das war in der Tat ein ziemlich indirektes Verfahren. Hasse hatte dieses Verfahren in seinen Klassenkörperbericht II übernommen (wobei er die von Artin zitierte „bekannte Schlussweise von Hecke“ genauer ausführte). Jetzt aber, in dem vorliegenden Brief, ist es Artin möglich, von vornherein auch die in K verzweigten Primstellen in die Definition einzubeziehen. Für diese ist zwar der Frobenius-Automorphismus von $\mathfrak{P}$ nicht eindeutig bestimmt, sondern nur seine Restklasse modulo der Trägheitsgruppe, und entsprechendes gilt für die Potenzen $(\frac{K|k}{\mathfrak{P}})^\nu$ des Frobenius-Automorphismus. Deshalb definiert Artin jetzt $\chi(\mathfrak{p}^\nu)$ als das *arithmetische Mittel* von χ auf der Restklasse von $(\frac{K|k}{\mathfrak{P}})^\nu$. Mit dieser Definition kann man dieselbe Formel wie früher benutzen, jedoch nunmehr unter Einschluss auch der verzweigten Primdivisoren.[11]

[11] Hasse in [Has30a] benutzt das Symbol $[\frac{K|k}{\mathfrak{P}}]$ zur Bezeichnung des Frobenius-Automorphismus. Er reserviert $(\frac{K|k}{\mathfrak{p}})$ für die Konjugationsklasse des Frobenius-Automorphismus und nennt dies das „Artin-Symbol“. Diese Bezeichnung hat sich jedoch nicht durchgesetzt. – Artin benutzt überhaupt kein spezielles Symbol, wie wir in dem Brief sehen, sondern er

Auch die unendlichen Primstellen kann Artin jetzt direkt einbeziehen.

Insbesondere ist es für Artin wichtig, dass diese, nunmehr endgültige Definition unabhängig ist von der Klassenkörpertheorie. Und Artin fügt hinzu: „*Alle Relationen und Sätze gelten jetzt von vornherein genau.*“ Damit ist gemeint, dass sie nicht nur bis auf endlich viele Euler-Faktoren gelten, wie es in [Art23b] zunächst der Fall war, sondern von vornherein ohne diesen Vorbehalt.

Aber was sind denn die „Relationen und Sätze“, die Artin meint wenn er jetzt sagt, dass sie „genau“ gelten?

Es handelt sich im wesentlichen um zwei Sätze:

Der erste Satz bezieht sich auf Erweiterung des Oberkörpers K. Ist K enthalten in einem Körper K' der ebenfalls galoissch ist über k, so ist die Galoisgruppe G von $K|k$ eine Faktorgruppe der Gruppe G' von $K'|k$. Demnach kann jeder Charakter χ von G aufgefasst werden als ein Charakter von G'. Genauer: χ definiert durch *Inflation* von G auf G' einen Charakter von G', der gewöhnlich ebenfalls mit χ bezeichnet wird. Der Satz besagt nun, dass die für $K|k$ gebildete L-Reihe $L(s, \chi)$ übereinstimmt mit der für $K'|k$ gebildeten – und zwar diesmal „genau“, also nicht nur bis auf endlich viele Euler-Faktoren.

Der zweite Satz bezieht sich auf Verkleinerung des Unterkörpers k. Enthält k einen Teilkörper k_0, über dem K ebenfalls galoissch ist, so ist die Galoisgruppe G von $K|k$ eine Untergruppe der Gruppe G_0 von $K|k_0$. In dieser Situation führt jeder Charakter χ von G vermöge des gruppentheoretischen Induktionsprozesses zu einem Charakter χ^* von G_0.[12] Nun gilt der *Induktionssatz*, nämlich dass die für $K|k$ gebildete L-Reihe $L(s, \chi)$ übereinstimmt mit der für $K|k_0$ zum Charakter χ^* gebildeten L-Reihe – und zwar auch diesmal „genau“.

In seinem Brief gibt Artin keine Begründung dieser beiden Sätze; er nimmt wohl an, dass sich Hasse die Beweise selbst zusammenstellen kann. Aber in seiner Publikation [Art30] werden die Beweise dargestellt.

Bemerkung: Artin bezieht sich auf die Korrekturfahnen zum Hasseschen Klassenkörperbericht II. Und zwar handelt es sich in Abschnitt 1.) seines Briefes um Fahne 73. Wir kennen die Fahnen und ihre Nummern nicht; gewöhnlich enthielt eine solche „Fahne“ mehrere Seiten, aber die endgültige Paginierung erfolgte erst nach dem Seitenumbruch. Da es sich hier

schreibt dafür einfach σ. Er nennt σ die „*zugehörige Substitution, die jedoch nicht eindeutig bestimmt ist*“.

[12] Artin schreibt ψ_χ statt χ^*.

um die Definition der L-Reihen handelt, so liegt die Vermutung nahe, dass Artin diejenige Stelle des Klassenkörperberichts II im Sinn hatte, bei der sich die endgültige Definition der L-Reihen befindet. Dies ist in dem Absatz auf Seite 159/160 der Fall. Am Schluss dieses Absatzes, auf Seite 160, findet sich der Satz:

> *Eine explizite Angabe der eindeutig bestimmten Beiträge der Diskriminantenteiler* $\mathfrak{p}$ *zu den* $L(s, \chi)$ *ist aber bisher nicht gegeben worden.*

Mit ziemlicher Sicherheit ist es diese Feststellung, die Artin „*störte*", wie er schreibt.[13]

Wenn Artin in seinem Brief, zu Beginn des Abschnitts 1.), die Formulierung „*Mich störte in Ihrem Bericht ...*" und die noch schärfere Formulierung zu Beginn des Abschnitts 2.) benützt, so bedeutet das keine Kritik an Hasses Bericht. In der Tat sagt Artin am Schluss seines Briefes, dass dies nur als Scherz gemeint war. Dieser Brief von Artin ist also nicht als Kritik zu werten, sondern als eine erste Mitteilung von neuen, ergänzenden Ideen zu seiner alten Theorie der L-Reihen. Da der Hassesche Bericht zu diesem Zeitpunkt schon im Druck befindlich war, so gab es keine Möglichkeit, Artins neue Ideen jetzt noch in den Bericht aufzunehmen. In Retrospektive ist das zu bedauern, denn Hasse wünschte ja einen Bericht, der dem damaligen Stand der Wissenschaft entsprach, und es ist bedauerlich, dass Artins neuer Zusatz erst so kurz vor der Drucklegung entstand. Wir lernen aus diesem Brief, wie das zustande kam: Nämlich erst die Druckfahnen des Hasseschen Berichts haben Artin veranlasst, noch einmal über die Situation nachzudenken.

Artin hat seine neuen Überlegungen in zwei Arbeiten [Art30], [Art31] publiziert,[14] und seitdem sind sie zum festen Bestandteil der Theorie der Artinschen L-Reihen geworden.

30.1.2 Funktionalgleichung

In Abschnitt 2.) seines Briefes geht es Artin um die Funktionalgleichung seiner L-Reihen. In seiner früheren Arbeit [Art23b] hatte er die Funktionalgleichung durch Zurückführung auf den abelschen Fall gewonnen, und im

[13] In [Roq00] wurde vermutet, dass sich Artin auf den Satz IV auf Seite 152 des Hasseschen Berichts bezieht. Das hätte aber eine Diskrepanz in den von Artin angegebenen Nummern der Druckfahnen ergeben. Heute erscheint es uns wahrscheinlicher, dass er den zitierten Satz auf Seite 160 meinte.

[14] Siehe den Brief Nr. 31 vom 23. 9. 1930.

letzteren Fall wurde auf Hecke verwiesen. Dieses Verfahren lieferte jedoch die Funktionalgleichung nur bis auf endlich viele Euler-Produkte, und es erforderte eine zusätzliche auf Hecke zurückgehende Überlegung, um zur eigentlichen Funktionalgleichung zu kommen. Hasse hatte dies Verfahren in seinem Klassenkörperbericht II wiederholt, schrieb jedoch die Funktionalgleichung in einer etwas mehr systematischen Form an, nämlich:

$$M(s,\chi) = W(\chi)M(1-s,\overline{\chi})$$

wobei $W(\chi)$ eine Zahl vom Betrage 1 ist, und wobei die Funktion $M(s,\chi)$ aus $L(s,\chi)$ entsteht durch Multiplikation mit Γ-Faktoren und einer geeigneten Exponentialfunktion. Genauer schreibt Hasse:

$$M(s,\chi) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{g_0(\chi)}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{g_1(\chi)} A(\chi)^s L(s,\chi)$$

wobei aber die ganzzahligen Exponenten g_0, g_1 und die reelle positive Zahl A nicht näher spezifiziert werden konnten. Dazu sagte Hasse unter Bezugnahme auf [Art23b]:

> *Artin macht noch einige nähere Angaben über diese Konstanten oder vielmehr über die bei einer etwas anderen Schreibweise der Funktionalgleichung auftretenden Konstanten, ohne sie restlos zu bestimmen.*

Es ist dieser Satz, der Artin „*noch viel mehr*“ störte, wie er in seinem Brief schreibt. Wir entnehmen aus Artins Brief, dass er nunmehr in der Lage ist, die auftretenden Konstanten (außer $W(\chi)$) genau zu bestimmen, weil er nämlich aufgrund seiner neuen Definition der L-Reihen in der Lage ist, die Funktionalgleichung von vornherein genau herzuleiten, ohne die genannte Heckesche ZussatzÜberlegung.

Das erfordert insbesondere eine sorgfältige Beschreibung der auftretenden Γ-Faktoren. In der Form, die Artin in seinem Brief angibt, fällt auf, dass die Γ-Faktoren als Produkt von Beiträgen zu den unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ beschrieben werden. Dies ist unseres Wissens hier zum ersten Mal in einer solchen Form geschehen. Vielleicht ist das der Ursprung der späteren Idee, auch die Beiträge der endlichen Primstellen systematisch zu untersuchen und für jeden einzelnen solchen Beitrag eine Funktionalgleichung aufzustellen? Jedenfalls wurde das von John Tate, einem Schüler Artins, in seiner bekannten Doktorarbeit 1950 ganz allgemein im Rahmen der Chevalleyschen

Theorie der Idele durchgeführt.[15]

An dieser Stelle erscheint es angebracht, etwas über den in der Funktionalgleichung auftretenden Faktor $W(\chi)$ zu sagen. Artin sagt darüber nichts, außer dass $|W(\chi)| = 1$. Er bezeichnet $W(\chi)$ als „Gaussche Summe", setzt dies jedoch in Anführungszeichen. Dadurch möchte er wohl andeuten, dass bekanntlich im abelschen Falle diese Zahlen $W(\chi)$ als geeignet normierte Gaussche Summen dargestellt werden können. In diesem Sinne sind also die Zahlen $W(\chi)$ im allgemeinen galoisschen Fall als Verallgemeinerung der klassischen Gauss'schen Summen anzusehen, obwohl keine Summendarstellung wie im abelschen Falle bekannt ist. Heute werden die $W(\chi)$ oft auch als „Artinsche Wurzelzahlen" bezeichnet.

Es erscheint uns merkwürdig, dass das Problem der lokalen Struktur dieser Wurzelzahlen in der Artin-Hasse-Korrespondenz niemals angesprochen wird, obwohl, wie wir glauben, beide Partner sich der Bedeutung dieses Problems wohl bewusst waren. Viele Jahre später, im Jahre 1954, publizierte Hasse eine Arbeit [Has54], in welcher er nach einer Einführung in die Theorie der Artinschen L-Funktionen die Frage der Aufspaltung der Wurzelzahlen in lokale Komponenten $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$ stellt, und zwar derart, dass die Produktformel

$$W(\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} W_{\mathfrak{p}}(\chi)$$

gilt. Hasse definierte die Zahlen $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$, indem er das Problem auf den abelschen Fall zurückführte, wo die Lösung bekannt war. Diese Zurückführung geschah mit Hilfe von Brauers bekanntem „Satz über induzierte Charaktere" [Bra47a]. Allerdings hing die Zahl $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$ noch ab von der Art, wie der Charakter χ als ganzzahlige Linearkombination von zyklischen Charakteren von Untergruppen dargestellt wird. Hasse konnte nicht zeigen, dass $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$ unabhängig davon ist. Diese Frage musste damals offen bleiben. Erst viel später gelang es im Rahmen der Untersuchungen von Dwork [Dwo56], Langlands[16], Deligne [Del73] u.a., diese Sache zu erledigen.

[15] Die Tatesche Dissertation war lange Zeit nur in mimeographierter Form erhältlich und wurde erst 1967 in [Tat67] publiziert. Wie bereits in 28.2 erwähnt, gab es einen Vorläufer der Tateschen Dissertation, nämlich die Dissertation von Margaret Matchett 1946 in Indiana.

[16] Das Manuskript von Langlands ist in [Del73] zitiert als „nicht publiziert". Aus einem weiteren Manuskript von Langlands ([Lan04], in türkischer Sprache) ist zu entnehmen, dass er im Jahre 1967, während seines Aufenthaltes in Ankara, durch Cahit Arf auf die Arbeit von Hasse [Has54] aufmerksam gemacht worden war; dies hatte ihn angeregt, die Lösung der Hasseschen Vermutungen über die Artinschen Wurzelzahlen zu suchen und zu finden. (Cahit Arf war 1939 in Göttingen bei Hasse promoviert; in seiner Dissertation bewies er den heute so genannten „Satz von Hasse-Arf". Siehe 33.4.2.)

30.1.3 Führer

In der Funktionalgleichung für $L(s,\chi)$, wie sie von Artin in seinem Brief angegeben wird, tritt der Term $\sqrt{N_k\mathfrak{f}(\chi)}$ auf, wobei $\mathfrak{f}(\chi)$ ein gewisses Ideal aus k und $N_k\mathfrak{f}(\chi)$ seine Absolutnorm bedeutet. Heute wird $\mathfrak{f}(\chi)$ als „Artinscher Führer" des Galois-Charakters χ bezeichnet. Der Abschnitt 3.) des Artinschen Briefes gibt die Definition und die grundlegenden Eigenschaften von $\mathfrak{f}(\chi)$ an, die beim Beweis der Funktionalgleichung entscheidend benutzt werden. Artin sagt, dass ihn dies mehr interessiert habe als das Vorangegangene. Wie wir in den folgenden Briefen sehen werden, traf dies auch auf seine Korrespondenzpartner zu.

Von den Grundeigenschaften des Führers $\mathfrak{f}(\chi)$, die Artin aufzählt, ist der erste mit a) bezeichnete Satz der tiefste, wie er schreibt. Dazu ist nachzuweisen, dass der Exponent von $\mathfrak{p}$ eine ganze Zahl ist. Artin schreibt dazu: „*Das ist mir gelungen.*" Da Artin mit solchen oder ähnlichen Aussagen in seiner Korrespondenz ziemlich sparsam umgeht, so können wir wohl daraus schließen, dass ihm der Beweis nicht ganz leicht gefallen und er deshalb auf seinen Erfolg einigermaßen stolz war. In den folgenden Briefen wird diese Ganzheitseigenschaft noch eine Rolle spielen.

Sehen wir uns den in Rede stehenden Exponenten von $\mathfrak{p}$ an:

$$(44)\quad f_{\mathfrak{p}}(\chi) = \frac{1}{e}\Big(e\chi(1)-\Sigma\chi(\tau)+p^{R_1}\chi(1)-\Sigma\chi(\tau_1)+p^{R_2}\chi(1)-\Sigma\chi(\tau_2)+\dots\Big)$$

Die Bezeichnungen hat Artin in seinem Brief erklärt. Damit die rechte Seite einen Sinn hat, müssen jeweils zwei Glieder in der Summe zusammengefasst werden. Die Reihe bricht nach endlichen vielen Summanden ab und stellt jedenfalls eine rationale Zahl ≥ 0 dar. Lediglich der Satz, dass es sich um eine ganze Zahl handelt, ist nichttrivial.

Wie kam überhaupt Artin auf diese merkwürdige Definition? Er sagt dazu in diesem Brief nichts, aber im folgenden Brief Nr. 31 vom 23. 9. 1930 heißt es:

> „*In der Führersache und der Funktionalgleichung musste ich auch alles erraten.*"

Wir können wohl annehmen, dass das „Erraten" darin bestand, die Gültigkeit der Eigenschaften a)-i), die er in seinem Brief formuliert, zu garantieren. Der Führer ist durch diese Eigenschaften bereits bestimmt, wie Artin in seiner Publikation [Art31] zeigt. Genauer: die Eigenschaften d) und i), zusammen

mit der Homomorphie-Eigenschaft $\mathfrak{f}(\chi_1+\chi_2) = \mathfrak{f}(\chi_1)\mathfrak{f}(\chi_2)$ reichen schon aus, um $\mathfrak{f}(\chi)$ als Funktion auf den Charakteren χ der Galoisgruppe G von $K|k$ und ihrer Untergruppen eindeutig zu charakterisieren. Diese Eindeutigkeitssaussage erweist sich als wichtig für Artins Beweis insbesondere von a), also der Ganzheit des Exponenten (44), so wie er ihn in seiner Arbeit [Art31] dargestellt hat.

Heute ist es üblich, die rechte Seite von (44) als inneres Produkt (α,χ), genommen über die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$, mit dem sogenannten „Artin-Charakter" α zu schreiben. Der letztere ist definiert wie folgt:

$$\alpha(\tau) = -i \qquad \text{wenn} \qquad \tau \in \mathfrak{V}_{i-1} \setminus \mathfrak{V}_i \,,$$

während $\alpha(1)$ so definiert ist, dass

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{T}} \alpha(\tau) = 1 \,.$$

Mit dieser Definition von α lässt sich (44) so schreiben:

$$f_{\mathfrak{p}}(\chi) = (\alpha,\chi) = \frac{1}{e}\sum_{\tau\in\mathfrak{T}} \alpha(\tau)\chi(\tau) \,. \tag{45}$$

Definitionsgemäß ist α konstant auf den Konjugationsklassen der Trägheitsgruppe, also ein „virtueller" Charakter. Die von Artin bewiesenen Tatsache, dass (α,χ) eine positive ganze Zahl ist für alle irreduziblen Charaktere χ von $\mathfrak{T}$, bedeutet, dass α wirklich der Charakter einer Matrizendarstellung von $\mathfrak{T}$ ist. Diese wird heute die „Artin-Darstellung" genannt. Demnach ist $f_{\mathfrak{p}}(\chi)$ die Vielfachheit. mit der die zu χ gehörige irreduzible Darstellung in der Artin-Darstellung vorkommt.

Bald nach Bekanntwerden der Artinschen Führer-Definition (44) hat man versucht, eine explizite Realisierung der Artin-Darstellung zu finden. Hätte man diese gewonnen, so würde sich daraus die Ganzzahligkeit von $f_{\mathfrak{p}}(\chi)$ ohne weiteres ergeben. Vielleicht hat auch schon Artin danach gesucht? Wir haben jedoch keine Hinweise darauf gefunden.

Serre [Ser60] hat nachgewiesen, dass die Artin-Darstellung jedenfalls nicht über $\mathbb{Q}$ realisiert werden kann, wohl aber über jedem ℓ-adischen Körper $\mathbb{Q}_\ell$ für Primzahlen $\ell \neq p$. Es fehlt jedoch bisher eine kanonische Konstruktion eines Darstellungsmoduls.[17]

[17] Im Falle von Funktionenkörpern hat Laumon [Lau91] einen solchen Darstellungsmodul konstruiert.

30.1.4 Emmy Noether

Wir wissen, dass sich Emmy Noether intensiv mit dieser Frage befasste. Schon früher, also vor 1930, hatte sie ihre Arbeit über Differenten und Diskriminanten in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern [Noe27] publiziert. Ein Jahr später hatte sie eine zweite Arbeit über die Differente fertiggestellt, diese war jedoch zu ihren Lebzeiten nicht mehr erschienen, weil Noether sie noch überarbeiten wollte. Posthum erschien diese Arbeit 1950 im Crelleschen Journal [Noe50].

Hasse hatte einen engen Briefwechsel mit Emmy Noether. Weil er wusste, dass sie sich für Diskriminanten und Führer interessierte, hatte er ihr Kenntnis von dem Artinschen Brief Nr. 30 vom 18. 9. 1930 gegeben. Am 10. 10. 1930 schrieb sie an Hasse:

> „*Schönen Dank für Artin! Die Sachen sind wirklich wunderschön! Mich reizen besonders die darin steckenden formalen Grundlagen; einiges Hyperkomplexe –einstweilen noch ganz unabhängig– habe ich mir überlegt...*“

Wenn Noether hier von „formalen Grundlagen“ spricht, dann ist das so zu interpretieren, dass sie mit den rein rechnerischen Überlegungen Artins nicht zufrieden ist und die Führer „formal“ direkt als Ideale finden möchte. Dazu möchte sie die Theorie der Algebren benutzen (die sie stets „hyperkomplex“ nennt); es war eines der Prinzipien von Emmy Noether, dass die nichtkommutative Theorie der Algebren als ein starkes Hilfsmittel zur Untersuchung der kommutativen Zahlkörper eingesetzt werden kann. Wie es scheint, wollte Noether eine Algebra finden, die in irgendeiner Form mit der Artin-Darstellung verbunden ist, und aus deren Modul-Zerlegung sich die Artinschen Führerideale ergeben.

Insgesamt ist es Noether nicht gelungen, diese „formalen Grundlagen“ der Artinschen Führer allgemein aufzuklären, wie sie es offenbar vorhatte. Nur im Falle zahmer Verzweigung ist sie darin weitergekommen. Ihre Lösung des Problems ist enthalten in ihrer Arbeit [Noe32], die im Crelle-Festband für Hensel erschienen ist, und die weithin bekannt wurde durch ihren Beweis der Existenz von lokalen Ganzheitsbasen im zahm-verzweigten Fall.[18] Ihr Hauptanliegen in dieser Arbeit war jedoch die Konstruktion der Artinschen Führerideale mit Hilfe von algebrentheoretischen Methoden. In der Tat konnte sie (immer nur im zahm-verzweigten Fall) mit ihren Methoden eine

[18] Siehe die Darstellung in [Roq00]. Zu den Noether-Briefen siehe auch [LR06].

Aufspaltung der (lokalen) Diskriminante gewinnen, und zwar in ein Produkt von Beiträgen die den einzelnen Gruppencharakteren zugeordnet sind. Es gelang ihr jedoch nicht, nachzuweisen, dass diese Ideale identisch sind mit den Artinschen Führern. Das wurde erst viel später, im Jahre 1983, von Fröhlich [Frö83] gezeigt.

30.2 ℓ^n-primär

Das Problem der Bestimmung der genauen Bedingungen dafür, dass eine Zahl ℓ^n-primär ist, wurde von Artin und Hasse schon in früheren Briefen diskutiert, allerdings ohne definitives Ergebnis. Vgl. die Briefe Nr. 11 vom 26. 7. 1927, Nr. 14 vom 6. 8. 1927 und Nr. 16 vom 4. 9. 1927. Auch jetzt kommt Artin nicht zu einem abschließenden Ergebnis, seine Formel bezieht sich lediglich auf den Fall $n = 2$. Im nächsten Brief Nr. 31 gibt Artin eine detaillierte Begründung für diese Formel, offenbar hatte Hasse ihn darum gebeten.

Zur weiteren Entwicklung siehe 14.2.1.

30.2.1 Weddle

Thomas Weddle (1817-1853) war ein englischer Mathematiker, der vor allem wegen der nach ihm benannten *Weddleschen Regel* und der *Weddleschen Fläche* bekannt ist. Bei der Ersteren handelt es sich um ein numerisches Integrationsverfahren ähnlich der Simpsonschen Regel aber genauer, und bei der Letzteren um ein birationales Modell der Kummerschen Fläche. Vielleicht handelt es sich bei der Arbeit von Weddle, die Artin erwähnt, um diejenige von 1842, wo ein Algorithmus zur genäherten Lösung einer algebraischen Gleichung entwickelt wird.[19] Es könnte sich aber auch um die Arbeit von 1845 handeln, wo Weddle eine Methode zur Berechnung von Logarithmen durch Zerlegung einer Zahl in ihre Faktoren behandelt.[20]

---

[19] *A New Method of Solving Numerical Equations*, Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 4, 1837-1843, pp. 300-301.

[20] Messenger (2) III. 66-92.

31 23.09.1930, Brief von Artin an Hasse

Berlin, den 23. Sept. 1930

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren freundlichen Brief. Was die Veröffentlichung in Crelle betrifft, so möchte ich Ihnen folgendes vorschlagen:[1]

Ich hatte schon vor, die Untersuchungen in zwei Teile zu zerlegen: 1.) Gruppentheoretische Struktur der Diskriminante algebraischer Zahlkörper. 2.) Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren. Diese Teilung will ich vornehmen, weil mir 1.) von allgemeiner Wichtigkeit zu sein scheint, unabhängig von der Anwendung bei 2.). Ich verspreche mir von einem weiteren Ausbau der Führertheorie noch sehr viele weitere Resultate. Z.B. habe ich eine kleine Hoffnung für den Klassenkörperturm. In einer Untersuchung über die L-Reihen aber würde das völlig untergehen. Publiziere ich es aber selbständig, so werden es doch vielleicht einige Leute beachten, die beim Lesen des Titels L-Reihe die Arbeit mit Grauen beiseite legen würden.

Ich möchte Ihnen nun vorschlagen, dass ich 1.) bei Ihnen drucken lasse, 2.) aber aus alter Anhänglichkeit in Hamburg. Das passt auch insofern ganz gut, als ja bei Ihnen Ihre eigene Führerarbeit[2] erschienen ist, in Hamburg aber andrerseits die erste Publikation über L-Reihen. Erscheint Ihnen die Trennung und diese Gesichtspunkte nicht auch richtig? Die genaue Niederschrift werde ich erst am 15. Oktober machen können, da ich nicht wesentlich früher in Hamburg eintreffen werde und vorher doch nicht zu einer Ausarbeitung komme.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch fragen: War Ihnen die Formel für $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ im Abelschen Falle bekannt? Wenn nicht, so ist sie immerhin noch eine kleine Ergänzung auch zur Klassenkörpertheorie. [3]

Nun komme ich meinerseits mit einer grossen Bitte. Wie Sie vielleicht erfahren haben, habe ich die weitere Herausgabe der Sammlung Hilb bei der Akademischen Verlagsgesellschaft übernommen. Nun hätte ich da gar zu gerne auch ein Buch von Ihnen. Wäre es Ihnen nicht möglich in dieser Sammlung ein Buch über komplexe Multiplikation zu schreiben? Ich habe schon mit dem Verleger verhandelt. Wir nehmen jeden Beitrag von Ihnen. Ich denke hauptsächlich an komplexe Multiplikation, weil da bisher überhaupt kein

[1] Siehe 31.1.
[2] Siehe 31.2.
[3] Siehe 31.2.

brauchbares Buch vorliegt. Aber auch alles sonstige würde ich gerne nehmen. Wie denken Sie darüber. Erfüllen Sie doch meine Bitte! Einen Termin würde ich Ihnen auch nicht stellen wollen, da ich weiss wie sehr Sie bisher schon mit dem „Bericht“ überlastet worden sind. Das würde ich alles Ihnen überlassen.[4]

Nun komme ich zu ℓ^2-primär .[5] Ich gehe von Ihrer Formel

$$\left(\frac{\eta_a, \eta_b}{\lambda}\right) = \prod \left(\frac{\lambda}{\eta_{pa+qb}}\right)^{p_0 a + q_0 b}$$

für ungerades ℓ^n aus, und schreibe sie mir zunächst auf unsere alte τ_a-Basis um. Da wird sie einfacher. Beim Umschreiben braucht man nicht den Wert von $\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)$ einzusetzen, sondern kann alles direkt machen. Man erhält

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\tau_{a+b}}\right)^b \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\tau_{a+\ell^\nu b}}\right)^b \cdot \left(\frac{\lambda}{\tau_{a\ell^\nu + b}}\right)^{-a},$$

in der viel weniger Faktoren vorkommen. Die Formel ist noch für beliebiges a, b richtig. Im Falle $\ell = 2$ leichte Modifikation. Lassen wir aber ℓ ungerade.

Sind a und b prim zu ℓ, so folgt aus unserer Arbeit Punkt 8, dass

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\tau_{a+b}}\right)^b$$

ist. Im Falle $a = \ell^n$ aber folgt für zu ℓ primes b:

$$\left(\frac{\tau_{\ell^n}, \tau_b}{\lambda}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^n+\ell^\nu b}}\right)^b .$$

Im ersten Fall ist $a + b < 2\ell^n$, also nach Punkt 15 unserer Arbeit:

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^{\frac{\ell^n}{a+b}\binom{a+b}{\ell^n} b}$$

was auch nur für durch ℓ teilbares $a + b$ des Intervalls

$$\ell^n \leq a + b \leq n\ell^n - (n-1)\ell^{n-1}$$

[4]Siehe 31.3.
[5]Siehe 30.2.

von 1 verschieden sein kann.

Im Falle $n = 2$ bedeutet das: $\ell^2 \leq a + b \leq \ell^2 + (\ell - 1)\ell$, also:

1.) $a + b = \ell^2$, wo dann $\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^b$ ist,

2.) $a + b = \ell^2 + k\ell$ mit $1 \leq k \leq \ell - 1$, wo dann:

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^{\frac{\ell}{\ell+k}\binom{\ell^2+k\ell}{\ell^2}b} = \zeta^{\frac{\ell}{\ell+k}\binom{\ell+k}{\ell}b}$$

nach Hilfssatz 2 unserer Arbeit. Dabei ist

$$\binom{\ell+k}{\ell} = \binom{\ell+k}{k} = \frac{(\ell+1)(\ell+2)\cdots(\ell+k)}{1 \quad 2 \quad \cdots \quad k} \equiv 1 \pmod{\ell}$$

und $\ell + k \equiv k \pmod{\ell}$, so dass

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^{\frac{\ell}{k}b}$$

ist. (Der Exponent natürlich ganz mod ℓ^2 verstanden.) Bleibt noch $\left(\frac{\tau_{\ell^2}, \tau_b}{\lambda}\right)$ zu bestimmen. Im Produkt genügt dann $\nu = 1$, so dass:

$$\left(\frac{\tau_{\ell^2}, \tau_b}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\tau_{\ell^2+b\ell}}\right)^b$$

ist. Wieder genügt der Fall $1 \leq b \leq \ell - 1$ und es ist:

$$\left(\frac{\tau_{\ell^2}, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^{\frac{\ell^2}{\ell^2+b\ell}\binom{\ell^2+b\ell}{\ell^2}b} = \zeta^{\frac{\ell}{\ell+b}\binom{\ell+b}{\ell}b} = \zeta^{\ell}\ .$$

Das ergibt jetzt bei anderer Schreibweise folgende Tabelle für das Normenrestsymbol: Es ist:

$$\left(\frac{\tau_{\ell^2}, \tau_b}{\lambda}\right) = \zeta^{\ell} \qquad \text{für} \quad b = 1, 2, \ldots, \ell - 1$$

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_{\ell^2-a}}{\lambda}\right) = \zeta^{-a} \qquad \text{für} \quad (a, \ell) = 1, \quad 1 \leq a \leq \ell^2 - 1\ .$$

$$\left(\frac{\tau_a, \tau_{\ell^2-a+k\ell}}{\lambda}\right) = \zeta^{-\frac{\ell a}{k}} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, \ell - 1, \quad (a, \ell) = 1, \quad k\ell + 1 \leq a \leq \ell^2 - 1$$

und endlich $\left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right) = 1$ für die anderen τ_a, τ_b unserer Basis.

Ein primäres ξ kann gleich in der Form $\xi = \tau_{\ell^2} \prod\limits_{\substack{(a,\ell)=1 \\ 1 \le a \le \ell^2-1}} \tau_a^{x_a}$ angesetzt werden, wo die x_a zu bestimmen sind.

Da $\xi \equiv 1 \pmod{\lambda_1^\ell = \lambda^{\ell^2}}$ sein muss, sind dabei die x_a alle durch ℓ teilbar. Nun muss gelten:

$$\left(\frac{\xi, \tau_b}{\lambda}\right) = \left(\frac{\tau_{\ell^2}, \tau_b}{\lambda}\right) \cdot \prod_{\substack{(a,\ell)=1 \\ 1 \le a \le \ell^2-1}} \left(\frac{\tau_a, \tau_b}{\lambda}\right)^{x_a} = 1 \text{ für alle } \tau_b \text{ der Basis.}$$

Für $b = \ell^2$ ist nach der Tabelle vermöge $x_a \equiv 0 \pmod{\ell}$ schon alles erfüllt. Sei also b prim zu ℓ. Da die x_a durch ℓ teilbar sind, folgt aus der Tabelle, dass vom Produkt nur das eine Glied mit $a = \ell^2 - b$ stehen bleibt. Man hat nun zu unterscheiden:

1.) $b = 1, 2, \dots \ell - 1$; dann lautet die Gleichung:

$$\zeta^{\ell + b x_{\ell^2 - b}} = 1,$$

also:

$$x_{\ell^2 - b} \equiv -\frac{\ell}{b} \pmod{\ell^2}.$$

2.) $b \ge \ell + 1$; dann lautet sie:

$$\zeta^{b x_{\ell^2 - b}} = 1, \quad \text{also } x_{\ell^2 - b} \equiv 0 \pmod{\ell^2}.$$

Es kann also gesetzt werden:

$$\xi = \tau_{\ell^2} \cdot \tau_{\ell^2-1}^{-\frac{\ell}{1}} \tau_{\ell^2-2}^{-\frac{\ell}{2}} \cdots \tau_{\ell^2-(\ell-1)}^{-\frac{\ell}{\ell-1}}$$

Da nun $\eta_{2\ell^2}$ schon primär ist, kann τ_{ℓ^2} ersetzt werden durch η_{ℓ^2}. Potenziert man aus und lässt analog alles weg was jenseits des Primäritätsmoduls liegt, so erhält man:

$$\xi \equiv 1 - \lambda^{\ell^2} + \frac{\ell}{1}\lambda^{\ell^2-1} + \frac{\ell}{2}\lambda^{\ell^2-2} + \cdots + \frac{\ell}{\ell+1}\lambda^{\ell^2-(\ell-1)} \pmod{\ell^2 \lambda_1}.$$

Dabei dürfen die Brüche $\frac{\ell}{\nu}$ nach dem Modul ℓ^2 behandelt werden. Nun ist $\binom{\ell}{\nu} = \frac{\ell}{\nu} \cdot \frac{\ell-1}{1} \cdot \frac{\ell-2}{2} \cdots \frac{\ell-(\nu-1)}{(\nu-1)} \equiv (-1)^{\nu-1}\frac{\ell}{\nu} \pmod{\ell^2}$ für $1 \le \nu \le$

$\ell - 1$. Also ist:

$$\begin{aligned}\xi &\equiv 1 - \lambda^{\ell^2} + \binom{\ell}{1}\lambda^{\ell^2-1} - \binom{\ell}{2}\lambda^{\ell^2-2} + \ldots - \binom{\ell}{\ell-1}\lambda^{\ell^2-(\ell-1)} \\ &\equiv 1 - \lambda^{\ell^2} + \lambda^{\ell^2-\ell}\left(-\binom{\ell}{1}\lambda + \binom{\ell}{2}\lambda^2 - \binom{\ell}{3}\lambda^3 + \ldots + \binom{\ell}{\ell-1}\lambda^{\ell-1}\right) .\end{aligned}$$

Oder:

$$\xi \equiv 1 - \lambda^{\ell^2} + \lambda^{\ell^2-\ell}\left((1-\lambda)^\ell - 1 + \lambda^\ell\right) \equiv 1 - \lambda^{\ell^2-\ell}\lambda_1 ,$$

wobei $\lambda_1 = 1 - \zeta_1 = 1 - (1-\lambda)^\ell$ gesetzt ist. Also ist die Zahl:[6]

$$\boxed{\xi = 1 - \lambda^{\ell^2-\ell}\lambda_1}$$

ℓ^2-primär im ℓ^2-ten Kreiskörper und somit ℓ^2-primär in jedem Oberkörper, also auch ℓ^2-primär für jeden Primteiler $\mathfrak{l}$ von ℓ in jedem Oberkörper des Kreiskörpers. Da sie $\not\equiv 1 \pmod{\ell\lambda_1\mathfrak{l}}$ ist, ist sie die gesuchte Basis für die primären Zahlen.

Da haben Sie also den Beweis. Wie Sie sehen, bin ich mit dem Kopf durch die Wand gegangen. Das habe ich auch noch im Falle ℓ^3-primär getan. Ergebnis: Ein ellenlanger Ausdruck für ξ, dem man weiter nichts ansehen kann. Es lohnt sich also nicht ihn hinzuschreiben. Vielleicht lag das an meiner Ungeschicklichkeit, und vielleicht erraten Sie nun das Richtige. Ich glaube hier kommt es aufs Erraten an. In der Führersache und der Funktionalgleichung musste ich auch alles erraten.

Welche Behauptungen stellt eigentlich Weddle[7] auf? Ich schrieb Ihnen schon, dass mir seine Arbeit unzugänglich ist.

Darf ich Sie endlich noch bitten, mir ganz kurz die Ergebnisse von Frl. Taussky zu erzählen? Das interessiert mich sehr.[8]

Ja, Sie werden enttäuscht sein von dem ℓ^2-primär, aber vielleicht finden Sie in dem Brief doch noch etwas brauchbares.

Darf ich Sie nun noch bitten, mir nach Reichenberg zu schreiben: Adresse: Artin, bei Dr. Hübner, Reichenberg Č.S.R., Felgenhauerstrasse 20.

Ich verreise nämlich in den nächsten Tagen dorthin.

---

[6] Dieses Resultat hatte Artin schon in seinem vorangegangenen Brief Nr. 30 vom 18. 9. 1930 angegeben. Offenbar hatte Hasse gebeten, ihm Details des Beweises mitzuteilen. Siehe auch 30.2 und die dortigen Verweise.

[7] Siehe 30.2.1.

[8] Siehe 31.4.

Mit den besten Grüssen auch an Frau Gemahlin und auch von meiner Frau

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr.31:

31.1 Zwei Publikationen

Hasse hatte schnell auf Artins Brief vom 18. 9. 1930 reagiert. Er hatte seine Antwort nach Berlin geschickt wo, wie er wusste, sich Artin bei den Schwiegereltern aufhielt. Offenbar hatte Hasse die Bedeutung der neuen Resultate Artins sofort erkannt und ihm spontan angeboten, diese im Crelleschen Journal zu publizieren. Artin antwortet nun, dass er die Arbeit in zwei Teile spalten und nur den ersten Teil im Crelleschen Journal drucken lassen möchte, während er den zweiten Teil „aus alter Anhänglichkeit“ in die Hamburger Abhandlungen geben will.[9]

Artin gibt auch Gründe für die Aufteilung an: Der erste Teil, der die Artinschen Führer behandelt, sei wohl von allgemeinem Interesse, insbesondere ist er unabhängig von der Anwendung bei den L-Reihen. Artin hegt insbesondere eine „kleine“ Hoffnung für den Klassenkörperturm.[10] Das ist wohl so zu verstehen, dass durch eine geeignete Abschätzung der Artinschen Führer und demgemäss auch für die Diskriminante die bekannte Minkowskische Abschätzung vielleicht verbessert werden könnte. Wir erinnern daran, dass Artin schon früher darauf aufmerksam gemacht hatte: eine geeignete Verbesserung der Minkowskischen Diskriminanten-Abschätzung würde die Endlichkeit der Klassenkörpertürme zur Folge haben.[11] Allerdings ist Artins Hoffnung jetzt „klein“, was wohl bedeutet, dass er inzwischen Zweifel hat, ob die Klassenkörpertürme stets abbrechen. Vielleicht waren diese Zweifel aufgekommen, nachdem Arnold Scholz auf einfache Weise beliebig hohe Klassenkörpertürme konstruieren konnte. (Vgl. dazu 20.1.1.)

Bemerkenswert ist, dass in dem von Artin gewählten Titel „*Gruppentheoretische Struktur der Diskriminante*“ das Wort „*Führer*“ nicht vorkommt. Können wir daraus schließen, dass Artin als wichtigstes Resultat seiner Arbeit die Produkt-Aufspaltung der Diskriminante ansieht? (Siehe Punkt 3.) d) in dem vorangegangenen Brief Nr. 30 vom 18. 9. 1930.) Wir würden heute bei der Einstufung dieser Arbeit das Gewicht mehr auf den Führer legen, und den Führer-Diskriminantensatz nur als eine von einer ganzen Reihe von

[9] Da die Hamburger Abhandlungen schneller publizieren konnten als das Crellesche Journal, so erschien der zweite Teil noch vor dem ersten, nämlich noch in dem letzten Heft des Jahres 1930, der erste Teil aber erst im ersten Heft des Jahres 1931.

[10] Zum Turmproblem der Klassenkörpertheorie siehe 15.1.

[11] Das findet man in dem Hasseschen Klassenkörperbericht I, §11.3, mit Bezugnahme auf eine mündliche Mitteilung von Artin.

wichtigen Eigenschaften der Artinschen Führer ansehen.

Dabei ist zu beachten, dass es sich hier um die *gruppentheoretischen* Führer handelt, welche zu Charakteren χ einer beliebigen Galoisgruppe gehören. Im Gegensatz dazu gibt es im abelschen Falle die aus der Klassenkörpertheorie bekannten *arithmetischen* Führer; diese gehören zu den Charakteren der Strahlklassengruppe, welche die abelsche Erweiterung beschreibt. Aufgrund des Artinschen Reziprozitätsgesetzes können die Strahlklassencharaktere mit den gruppentheoretischen Charakteren identifiziert werden. Der Nachweis, dass bei dieser Identifikation die arithmetischen mit den Artinschen Führern übereinstimmen (im abelschen Fall), bildet einen wesentlichen Bestandteil des Ganzzahligkeitsbeweises für die Artinschen Führer-Exponenten (44) im allgemeinen galoisschen Fall.

31.2 Hasses Führer-Arbeit

Artin begründet die Publikation im Crelleschen Journal auch damit, dass dort ja Hasses „eigene Führerarbeit" erschienen sei. Er meint damit Hasses Arbeit [Has30d] mit dem Titel „*Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper*". Die Arbeit war soeben im Crelleschen Journal erschienen. Offenbar kannte Artin die Einzelheiten dieser Arbeit noch nicht, denn im nächsten Brief Nr. 32 vom 10. 10. 1930 bittet er Hasse um ein Separatum. Aber der vorliegende Brief zeigt, dass Artin über die Existenz der Hasseschen Arbeit informiert war.

In der genannten Arbeit [Has30d] gibt Hasse u.a. einen Beweis der Führer-Diskriminantenformel für die arithmetischen Führer, also für die Führer der Klassenkörpertheorie. Er sagt dazu:

> „*Die [Führer-Diskriminanten]formel ist eine tiefliegende Tatsache ... Zu ihrem Beweis war man bisher auf außerordentlich komplizierte Hilfsmittel angewiesen, nämlich auf die Funktionalgleichung der Heckeschen L-Reihen mit Größencharakteren. Ich gebe im folgenden einen rein-arithmetischen Beweis ... Er stützt sich wesentlich auf die Ergebnisse der Normenresttheorie, die ich in zwei vorangegangenen Arbeiten entwickelt habe.*"

Hasse bezieht sich dabei auf die beiden Arbeiten [Has30e], [Has30c], die beide in demselben Band 162 des Crelleschen Journals erschienen waren wie [Has30d].

Für Artins Theorie der gruppentheoretischen Führer war die Hassesche Arbeit von besonderer Bedeutung. Denn ein wesentlicher Teil der Beweise bei

Artin beruht auf der Führer-Diskriminantenformel der Klassenkörpertheorie. Und dafür musste er ursprünglich den Beweis aus Hasses Klassenkörperbericht I [Has26a] zitieren, der damals (1926) nur mit Hilfe der Funktionalgleichung für die Heckeschen L-Reihen mit Größencharakteren geführt werden konnte. Nun aber erfährt Artin durch die neue Arbeit von Hasse, dass es auch einen arithmetischen Beweis gibt. Demgemäß hat er der endgültigen Fassung seines Manuskripts einen Hinweis auf die Hassesche Arbeit eingefügt. Er sagt dazu in [Art31], nachdem er auf den engen Zusammenhang zwischen Diskriminanten und Führern abelscher Körper hingewiesen hat:

> „*Die Kenntnis der Relativdiskriminanten aller Zwischenkörper zieht die Kenntnis der Führer dieser Körper nach sich, und umgekehrt. Vermittelt wird dieser Zusammenhang durch die Führer-Diskriminanten-Formel , deren Beweis entweder mit Hilfe der Funktionalgleichung der L-Reihen geführt wird oder, wie Herr Hasse kürzlich gezeigt hat, der Normenresttheorie entnommen werden kann.*“

In seinem Brief fragt Artin noch an, ob seine Formel für $f(\chi, K|k)$ im abelschen Fall bekannt sei. Es scheint so, dass Hasse diese Frage verneint hat, denn im Vorwort zu seiner Arbeit [Art31] sagt Artin schließlich, dass seine Führerformel „*eine neue Ergänzung der Klassenkörpertheorie*“ darstellt. Andererseits ist es nicht schwer, im abelschen Falle bei einem irreduziblen, also eindimensionalen Charakter die Artinsche Formel (44) mit der Hasseschen Formel (46) zu identifizieren. (Vgl. dazu 32.1.1.) Hasse hätte also die Frage von Artin durchaus bejahen können.

31.3 Buchprojekte

Artin kannte die Arbeit [Has27d] von Hasse zur Komplexen Multiplikation und hatte eine hohe Meinung davon. Vgl. Brief vom 10. 2. 1926 und 6.1. Von daher erscheint es verständlich, wenn sich Artin an Hasse wendet, um für die von ihm herausgegebene Sammlung ein Buch über Komplexe Multiplikation anzuwerben. Zwar gab es damals schon ein Buch über komplexe Multiplikation, nämlich Fueters „Vorlesungen“ [Fue24]. Dies Buch war jedoch auf Kritik gestoßen; Hasse selbst hatte im Jahresbericht der DMV eine ziemlich kritische Buchbesprechung geliefert [Has26b]. Es gab damals ein Bedürfnis, eine umfassende und präzise Darstellung der Theorie der Komplexen Multiplikation in Buchform zu haben, insbesondere da Hasse durch seinen Klassenkörperbericht die Klassenkörpertheorie weiteren Kreisen zugänglich

gemacht hatte.

Vielleicht hatte Artin auch von Hecke den Rat bekommen, sich an Hasse zu wenden. Jedenfalls hatte Hecke schon früher, am 6. 2. 1926, an Hasse geschrieben und eine Buchpublikation angeregt:

> „*Die endliche Abrundung der Theorie der komplexen Multiplikation, die noch ausstand, ist durch Ihre schöne und sehr einleuchtende Theorie nun geleistet. Ich finde die Sache so wichtig, daß Sie die Arbeit doch recht bald und vollständig und nachdrücklich publizieren sollten, um das nachlässige Fuetersche Buch zu kompensieren.*“

Wir haben aber keine Anhaltspunkte dafür gefunden, dass Hasse jemals ernsthaft den Plan eines Buches über komplexe Multiplikation erwogen hatte. Wenn sich Artin im folgenden Brief (Nr. 32 vom 10. 10. 1930) über Hasses „*halbe Zusage*“ bedankt, so ist das wohl nur so zu verstehen, dass Hasse nicht sofort abgelehnt hatte; vielleicht hatte Hasse seine Antwort als „halbe Absage“ abgefasst. Hasse hatte schon seit einiger Zeit einen Vertrag mit dem Springer-Verlag über eine zweibändige „Zahlentheorie“, wobei in dem ersten Band die Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie auf der Basis der Henselschen p-adischen Körper behandelt werden sollte, und im zweiten Band die Klassenkörpertheorie.[12] Vielleicht hatte Hasse in seiner Antwort an Artin auf diesen Vertrag mit dem Springer-Verlag hingewiesen; das würde die Anfrage Artins in seinem nächsten Brief Nr. 32 erklären, wo er sich nach den „Bedingungen bei Springer“ erkundigt.

In den folgenden Jahren war von dem Buchprojekt „Komplexe Multiplikation“ nicht mehr die Rede.

Die „Sammlung Hilb“, von der Artin spricht, war eine Buchreihe mit dem Titel „Mathematik in Monographien und Lehrbüchern“, die in der Akademischen Verlagsanstalt Geest & Portig in Leipzig erschien und von Emil Hilb (Würzburg) ins Leben gerufen worden war. In dieser Sammlung war z.Bsp. kürzlich das Algebra-Buch von Hilbs erstem Doktoranden, Otto Haupt [Hau29] erschienen, worin zum ersten Mal die „Moderne Algebra“ im Sinne von Emmy Noether dargestellt war.[13] Nach dem Tod von Hilb im Jahre 1929 hatte Artin die Herausgabe dieser Buchreihe übernommen, wie er berichtet.

[12] Der erste Band erschien jedoch aufgrund mancherlei Verzögerungen erst im Jahr 1949, und zwar nicht im Springer-Verlag, sondern im Akademie-Verlag Berlin [Has49]. Der zweite Band wurde niemals verwirklicht. Hierzu siehe auch [Fre77].

[13] Haupt berichtet in seinen Lebenserinnerungen, dass er die Moderne Algebra auf gemeinsamen Spaziergängen mit Emmy Noether gelernt habe. Haupt war damals Ordinarius

31.4 Olga Taussky

Olga Taussky (1806–1995) war 1929 bei Furtwängler in Wien promoviert worden. Am 24. 8. 1930 hatte sie ihre Dissertation an Hasse geschickt, zusammen mit der Ankündigung, dass sie den in ihrer Dissertation bewiesenen Satz verallgemeinert habe. Wie diese Verallgemeinerung aussieht, sagte sie noch nicht, lediglich dass es sich um eine Frage über Kapitulation von Idealen in Teilkörpern des Klassenkörpers handele. Sie kündigte jedoch an, dass sie auf der demnächst stattfindenden DMV-Tagung in Königsberg darüber sprechen werde.

Die Königsberger DMV-Tagung fand vom 4.–7. September 1930 statt. Gleich am ersten Tag hielt Taussky ihren Vortrag. Sie selbst berichtet darüber in [Tau81] wie folgt:

> *I myself gave a short paper at this meeting. It concerned my thesis, written under Furtwängler, entitled „Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes." As soon as I had finished Emmy*[14] *jumped up and made a quite lengthy comment which, unfortunately, I was unable to understand because of insufficient training. However, Hasse understood it and replied to it at some length, and there developed between these two mathematicians some sort of duet which they enjoyed thoroughly.*

Hasse war von Olga Taussky's Resultat offenbar so beeindruckt, dass er anbot, ihre Arbeit im Crelleschen Journal zu publizieren. Die Arbeit [Tau32] erschien dann 1932 in Band 168.

Artin war nicht zu der DMV-Tagung nach Königsberg gefahren. Offenbar hatte ihm Hasse deshalb einiges über die Tagung berichtet, auch über den Vortrag von Taussky, vielleicht auch über seine Diskussion mit Emmy Noether dazu. Artin erkundigt sich nun nach den Einzelheiten. Wenn Artin schreibt, dass ihn das sehr interessiere, dann liegt das sicher an der von Taussky behandelten Fragestellung, nämlich der Kapitulation von Idealen in Teilkörpern des Klassenkörpers. Wir erinnern daran, dass Artin schon in früheren Briefen an solchen Fragen Interesse gezeigt hatte; siehe die Briefe Nr. 20–25 aus der Zeit von November 1928 bis Januar 1929.

Anscheinend hat Hasse an Taussky geschrieben und ihr berichtet, dass

---

in Erlangen und Emmy Noether besuchte ihre Heimatstadt öfter. Die „Moderne Algebra" von van der Waerden war damals noch nicht erschienen, gewann dann aber später weltweit viel mehr Beachtung als das Buch von Haupt.

[14] Gemeint ist Emmy Noether.

sich Artin für ihre Arbeit interessiere. Am 6. 10. 1930 schrieb daraufhin Taussky an Hasse:

> „...*Ich danke Ihnen auch vielmals, daß Sie Professor Artin auf meine Dissertation aufmerksam machen wollten. Ich lasse gleichzeitig einen Abzug an ihn gelangen.*"

Welche Ergebnisse hat denn nun Olga Taussky in Königsberg vorgetragen? Sie hat in [Tau31] einen Bericht über diesen Vortrag gegeben. Es erscheint uns aber besser, stattdessen aus der publizierten Arbeit [Tau32] zu zitieren:

> *Ist für einen algebraischen Zahlkörper die absolute ℓ-Klassengruppe vom Typus $(\ell, \ell, \dots, \ell)$, so läßt sich für sie eine Basis $c_1, c_2, \dots, c_n$ so finden, daß jede Basisklasse c_i bereits in einem unverzweigten relativ zyklischen Oberkörper vom Relativgrade ℓ Hauptklasse wird.*

Für $\ell = 2$, so berichtet Taussky, war dieser Satz von Furtwängler bewiesen worden.[15] Jedoch:

> *Für beliebige Primzahlen ℓ ist der Satz nicht allgemein richtig. Wir werden aber hinreichende Bedingungen für den Grundkörper k formulieren, bei deren Bestehen der Hauptidealsatz in dieser verschärften Form gilt. Diese Bedingungen werden als Eigenschaften der zweistufigen Relativgruppe des zweiten Klassenkörpers in Bezug auf den Grundkörper k auftreten. Weiter werden wir zeigen, dass sich mit Hilfe der zweistufigen Gruppe allein nicht entscheiden läßt, ob die Verschärfung allgemein gilt ...*

Es handelt sich also nicht um ein abschliessendes Resultat, sondern sozusagen um das Ergebnis eines Tests: wie weit läßt sich die Furtwänglersche Frage allein mit Hilfe der zweistufigen Galoisgruppe entscheiden? Wir haben schon früher in 21.1 berichtet, dass Furtwängler in einem Brief an Hasse dieses (negativ zu wertende) Ergebnis angesprochen hat.

Kisilevsky in seinem Nachruf [Kis97] auf Olga Taussky sieht als Ergebnis ihrer Arbeit [Tau32] die Erkenntnis, dass

> „*the pattern of capitulation in cyclic unramified extensions of degree ℓ behaved in a rather chaotic manner and depended both on ℓ and $\ell - 2$.*"

[15] Furtwänglers Arbeit [Fur32] erschien 1932 im Crelleschen Journal, in dem Festband aus Anlass des 70. Geburtstages von Kurt Hensel.

Wie Artin ja selbst schreibt, war er grundsätzlich an Fragen dieser Art sehr interessiert. Das ergibt sich außerdem aus den früheren Briefen, die wir oben zitiert haben. Es erscheint uns daher merkwürdig, dass Artin auf Hasses genaueren Bericht nicht direkt geantwortet hat, und auch später nicht in dem Briefwechsel mit Hasse darauf zurückgekommen ist. Wir kennen den Grund dafür nicht. Vielleicht fehlte ihm hinsichtlich der Gruppentheorie die Unterstützung seines Freundes und Mitarbeiters Otto Schreier, der 1929 verstorben war? Jedenfalls berichtet Kisilevsky in [Kis97], dass Artin noch Jahre später diese Art Fragestellungen als „hopeless problems" betrachtete.

Artins wichtigstes Anliegen war es ja immer gewesen, Gesetzmäßigkeiten in galoisschen nicht-abelschen Erweiterungen zu finden, insbesondere die Zerlegungsgesetze. Aber beim Kapitulationsproblem hat er wohl gesehen, dass man mit den bisherigen Methoden nicht weiterkommen kann.

Dass das Kapitulationsproblem „hopeless" ist, gilt auch heute noch. Die vielen Arbeiten zu diesem Problem zeigen, dass man außer in speziellen Fällen nicht an das Problem herankommt. Fast alle Möglichkeiten von Kapitulationen können auftreten; es sind keine Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. In diesem Zusammenhang erwähnen wir noch die Arbeit von Heider und Schmithals [HS82], die im Laufe der historischen Entwicklung eine Rolle gespielt hat, und wo auch umfangreiche numerische Beispiele angegeben werden.

32 10.10.1930, Brief von Artin an Hasse

Hamburg-Fuhlsbüttel[1]
Kleekamp 3 I

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihre ausserordentlich interessanten Mitteilungen.[2] Sie sind da wirklich einen grossen Schritt vorwärts gekommen. Ich bin jetzt leider mit der Ausarbeitung (allerdings nur im Kopf) der schwebenden Dinge[3] so in Anspruch genommen, dass ich das noch nicht vollständig verdauen konnte. Ausserdem komme ich hier nicht recht zum Arbeiten. In Hamburg will ich mich dann ausführlicher damit beschäftigen.

Sie fragen nach den Kongruenzen für die v_i.[4] Ich glaube nicht, dass diese Kongruenzen auch im allgemeinen galois'schen Fall stimmen, sondern dass sie aus anderen Sätzen folgen. Wenn Sie den Nenner im Exponenten von $\mathfrak{f}(\chi)$ betrachten, so handelt es sich bei der Ganzheit um eine Teilbarkeit durch $e = e_0 p^{R_1}$. Die Teilbarkeit durch e_0 konnte ich durch einen einfachen Hilfssatz erledigen, der im abelschen Fall die Teilbarkeit der v_i durch e_0 nach sich zieht (dieser Hilfssatz hat mir allerdings zuerst die grössten Schwierigkeiten verursacht).[5]

Der unangenehme Teil ist die Teilbarkeit durch p^{R_1}. Im abelschen Fall besagt diese genau Ihre Kongruenzen. Ich habe lange versucht diese Teilbarkeit direkt zu zeigen, bin aber viel zu ungeschickt um es auch nur im abelschen Fall zu können. Nun haben Sie das aber getan. Ich glaube, an der Hand Ihres Beweises würde mir vielleicht der direkte Nachweis gelingen. Nun habe ich aber kein Separatum Ihrer Führerarbeit. Auch in Hamburg habe ich keines. Darf ich Sie also herzlich bitten mir eines nach Hamburg zu senden, damit ich versuchen kann diese Teilbarkeitsfrage direkt zu entscheiden? Ich sehe

[1]Dieser Brief ist nicht datiert. Wir haben Grund zur Annahme, dass er etwa am 10. Oktober 1930 geschrieben wurde. Die Adresse rechts oben ist von Hasse eingetragen worden; es handelt sich offenbar um Artins damals aktuelle Adresse in Hamburg. Der Brief wurde von Artin nicht in Hamburg geschrieben, sondern wahrscheinlich noch in seiner Heimatstadt Reichenberg, wohin er Ende September gefahren war. Im vorangegangenen Brief Nr. 31 vom 23. 9. 1930 hatte Artin seine Adresse in Reichenberg mitgeteilt und gebeten, dorthin zu schreiben. Das hatte Hasse offenbar getan, und dies ist Artins Antwort darauf. Am 14. Oktober, schreibt Artin, wird er endgültig wieder in Hamburg sein.

[2]Siehe 32.1.

[3]Damit meint Artin offenbar seine Theorie der L-Reihen und der Führer, die er im vorvorigen Brief Nr. 30 vom 18. 9. 1930 geschildert hatte.

[4]Siehe 32.1.1

[5]Siehe 33.2.

schon, dass es mir ohne die neue Idee, die in Ihrer Arbeit stecken muss nicht glücken wird. Ausserdem werde ich die Arbeit wahrscheinlich auch wegen des Zitats benötigen.

Ich will Ihnen kurz zeigen, auf welchem Umweg ich die Teilbarkeit durch p^{R_1} doch noch erzwungen habe. Es sei $K_{\mathfrak{V}}$ der erste Verzweigungskörper. Man sieht sofort, dass der Exponent von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ im „Wesentlichen“ derselbe ist, wie der von $\mathfrak{p}_{\mathfrak{V}}$ in $\mathfrak{f}(\chi, K/K_{\mathfrak{V}})$, wenn $\mathfrak{p}_{\mathfrak{V}}$ der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in $K_{\mathfrak{V}}$ ist. Also genügt es, im Körper $K/K_{\mathfrak{V}}$ die Ganzheit des Exponenten zu zeigen. Damit ist man auf den Fall einer Gruppe von Primzahlpotenzordnung zurückgekommen. Da nun jede Darstellung einer solchen Gruppe eine monomiale ist, reduziert sich endlich der Nachweis auf den Abelschen Fall und damit bin ich am Ende.

Ich habe natürlich versucht diesen Umweg zu vermeiden. Wie ich schon sagte, gelang mir aber der Nachweis nicht einmal im Abelschen Fall. Daher möchte ich gerne den Beweis Ihrer Kongruenzen kennen lernen.

Welche Voraussetzungen aus der Klassenkörpertheorie muss ich nun machen? Für den formalen Teil keine. Für die Ganzheit des Exponenten entweder Ihre Kongruenzen, oder die Diskriminanten-Führerformel , aus der man sie rückwärts gewinnen kann. Für die Tatsache aber, dass im abelschen Fall $\mathfrak{f}(\chi)$ wirklich der Führer ist, die Diskriminanten-Führerformel also nach Belieben Ihren Beweis oder den Heckeschen.[6] Es kann aber sein, dass sich jetzt auch einige Vereinfachungen der Diskriminanten-Führerformel ergeben. Das kann ich aber erst nach Kenntnis Ihres Beweises sagen.

Ich schreibe das alles nicht so sehr ausführlich, da Sie ja doch bald mein Manuskript in Händen haben werden.

Ich will lieber noch einiges erzählen was hinzugekommen ist.

1.) Bei gegebenem Wert von $\chi(1)$ (dem Grad der Darstellung), gegebenem Grundkörper k und gegebenem Ideal $\mathfrak{a}$ aus k, hat die Gleichung $\mathfrak{f}(\chi) = \mathfrak{a}$ nur „endlich viele“ Lösungen. D.h. es gibt nur endlich viele Oberkörper K, in denen $\mathfrak{f}(\chi)$ vorkommen kann (dabei K immer kleinstmöglich). Der Beweis ist noch sehr umständlich.[7]

2.) Zur Theorie der L-Reihen. Bildet man L-Reihen mit *rationalen* Cha-

[6]Es ist nicht klar, was Artin mit dem „Heckeschen Beweis“ der Diskriminanten-Führerformel meint. Wir haben in der Literatur bei Hecke keinen Beweis gefunden. Wahrscheinlich meint Artin den Beweis, den Hasse in seinem Klassenkörperbericht I [Has26a] dargestellt hat, wobei er die Funktionalgleichung der Heckeschen L-Reihen für Größencharaktere benutzt.

[7]Dieser Satz wurde dann in der publizierten Arbeit [Art31] ohne Beweis angegeben.

rakteren, d.h. Charakteren $\chi(\sigma)$ deren Werte rational sind und die nicht einfach zu sein brauchen, so hat man in ihnen die „Bestandteile“ der Zetafunktionen. Sie lassen sich umgekehrt durch Zetafunktionen ausdrücken so dass zu ihrer Fortsetzbarkeit nicht das Rez[iprozitäts]ges[etz] herangezogen werden muss. Alles geht hier ohne Klassenkörpertheorie. Da nun die Anzahl der rationalen Charaktere gleich der Anzahl der Abteilungen in der Gruppe ist, hat man hier genau die für die Frobeniusdichtigkeiten erforderlichen Funktionen. Was die ζ-Relationen betrifft, so erhält man das ziemlich abschliessende Ergebnis: Die Anzahl der unabhängigen unter den ζ-Funktionen der Unterkörper ist gleich der Anzahl der Abteilungen der Gruppe.[8]

3.) Ich erwähnte eben: Die Anzahl der rationalen Charaktere ist gleich der Anzahl der Abteilungen. Dieser Satz war mir nicht bekannt und ich glaube auch dass er neu ist.[9] Analog kann man z.B. genau den Charakterenkörper irgend einer Gruppe angeben:

Sei n die Ordnung der Gruppe. Man suche alle Restklassen $i \pmod n$ mit der Eigenschaft, dass für alle σ aus $\mathfrak{G}$ gilt $\sigma \sim \sigma^i$ (wo $\sim$ bedeutet zur gleichen Klasse konjugierter Elemente). Diese Restklassen i bilden eine Untergruppe g der Gruppe G aller Restklassen $\pmod n$, also der Gruppe des n-ten Kreiskörpers. Zu g gehört nun ein gewisser Unterkörper k des Kreiskörpers und dieser ist genau der Charakterenkörper.[10]

Kennen Sie diese und ähnliche Sätze? Ich glaube sie sind neu.

Die Umrechnung Ihrer Formel auf die τ_a-Basis ist in der Tat rein formal. Ich halte die Angelegenheit nicht für so wichtig um sie zu schreiben. Ich kann sie Ihnen ja später einmal mitteilen.

Wir fahren in den nächsten Tagen weg und kommen am 14. Oktober endgültig nach Hamburg.

Darf ich meine Bitte um ein Separatum nochmals erneuern und Sie darum ersuchen es nach Hamburg zu schicken?

---

[8]Mit „unabhängig“ ist hier die *multiplikative* Unabhängigkeit gemeint. Nicolae [Nic01] hat darüberhinaus bewiesen, dass die L-Funktionen der irreduziblen Charaktere *algebraisch* unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

[9]Der Satz war nicht neu. Er findet sich in einer gemeinsamen Arbeit von Frobenius und Schur aus dem Jahre 1906 [FS06b]. Offenbar wurde Artin darauf aufmerksam gemacht (vielleicht von Hasse?), denn in der publizierten Fassung zitiert Artin eine Arbeit von Frobenius und Schur aus dem Jahre 1906. Allerdings ist Artin dabei ein Irrtum unterlaufen: Statt der Arbeit [FS06b], in welcher sich der in Rede stehende Satz befindet, wird irrtümlich [FS06a] zitiert. Beide Arbeiten sind im gleichen Band der Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften erschienen.

[10]Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem vorangehenden Satz und war somit auch nicht als „neu“ anzusehen.

Mit vielen Grüssen auch von meiner Frau und besten Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin.

Herzlichst Ihr

Artin

P.S. Ich vergass soeben das Wichtigste, nämlich Ihnen für Ihre halbe Zusage zur komplexen Multiplikation zu danken. Mir würde wirklich sehr viel daran liegen, das Buch in die Sammlung zu bekommen und wir können ja vorläufig die Sache noch vertagen und ihre weitere Entwicklung abwarten. Jedenfalls will ich Sie nicht mit einem Kontrakt plagen. Darf ich Sie nach den Bedingungen bei Springer fragen und auch danach, in welchen Punkten Sie gerne Günstigeres wünschen würden? Seien Sie überzeugt, dass ich alles daransetzen werde um Ihre Wünsche zu befriedigen.[11]

[11] Siehe 31.3.

Kommentare zum Brief Nr.32:

32.1 Hasses Mitteilungen

Wir wissen nicht genau, welche „außerordentlich interessanten“ Mitteilungen Hasse an Artin geschickt hatte. Nach Lage der Dinge dürfte es sich um einen Bericht über die wichtigsten Resultate aus Hasses kürzlich erschienener Führer-Arbeit [Has30d] gehandelt haben, die Artin im vorangegangenen Brief Nr. 31 vom 23. 9. 1930 erwähnt hatte. Aber es war noch kein Sonderdruck, denn am Schluss seines Briefes bittet Artin um ein Separatum.

32.1.1 Die Kongruenzen

Artin erwähnt die „*Kongruenzen für die* v_i“. Um das verständlich zu machen, müssen wir auf den Inhalt der Arbeit [Has30d] eingehen, über deren Ergebnisse Hasse an Artin berichtet hatte. Hasse betrachtet eine abelsche Zahlkörper-Erweiterung $K|k$ mit Galoisgruppe G und eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k. Es geht um die Bestimmung des $\mathfrak{p}$-Beitrags des zugehörigen Führers. Für $i \geq 0$ sei V_i die i-te Verzweigungsgruppe zu $\mathfrak{p}$.[12] Es sei

$$T = V_0 \supset V_{v_1} \supsetneqq V_{v_2} \supsetneqq \cdots V_{v_{n-1}} \supsetneqq V_{v_n} \supsetneqq 1$$

die Reihe der *verschiedenen* Verzweigungsgruppen, wobei die v_i so bestimmt sind, dass jeweils $V_{v_i} \supsetneqq V_{v_i+1}$. Die Indizes $p^{r_i} = (V_{v_i} : V_{v_{i+1}})$ sind p-Potenzen ($i \geq 1$). Demgemäss ist $p^{r_1+\dots+r_n}$ die Ordnung der Verzweigungsgruppe. Die Verzweigungsordnung von $K|k$ ist $e = e_0 p^{r_1+\dots+r_n}$, wobei e_0 prim zu p ist, nämlich der Index der Verzweigungsgruppe in der Trägheitsgruppe. In dieser Situation beweist Hasse in [Has30d] die folgende Formel für den Führer-Exponenten $f_\mathfrak{p}$ von $K|k$:

$$f_\mathfrak{p}(K|k) = 1 + \frac{v_1}{e_0} + \frac{v_2 - v_1}{e_0 p^{r_1}} + \cdots + \frac{v_n - v_{n-1}}{e_0 p^{r_1+\cdots+r_{n-1}}}\,. \tag{46}$$

Und darüberhinaus zeigt er die Gültigkeit der folgenden Kongruenzen:

$$\begin{aligned} &v_1 \equiv 0 \bmod e_0 \\ &v_i \equiv v_{i-1} \bmod e_0 p^{r_1+\cdots+r_{i-1}} \qquad (1 \leq i \leq n)\,; \end{aligned} \tag{47}$$

sie setzen in Evidenz, dass jeder Term auf der rechten Seite von (46) in der Tat ganzzahlig ist.

[12] $V_0 =: T$ ist die Trägheitsgruppe. $V_1 =: V$ ist die volle Verzweigungsgruppe.

Offenbar sind es diese Kongruenzen, die Artin in seinem Brief anspricht. Wie es scheint, hatte Hasse ihm mitgeteilt, dass er diese Kongruenzen im abelschen Fall in [Has30d] bewiesen habe. Artin bestätigt in seinem Brief, dass im abelschen Fall diese Kongruenzen genau die Ganzzahligkeit seines Führerexponenten (44) besagen (siehe Seite 323). Beachte: Ist im abelschen Falle χ ein irreduzibler Charakter, so gehört zu χ eine zyklische Erweiterung K_χ des Grundkörpers k. Artin will sagen, dass dann sein Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi)$ mit dem Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K_\chi|k)$ der Klassenkörpertheorie übereinstimmt. Das kann man leicht durch Vergleich der Formeln (44) und (46) erkennen.

Offenbar hatte Hasse die Frage aufgeworfen, ob die Kongruenzen (47) für beliebige galoissche Erweiterungen gelten. Wenn ja, dann würde sich daraus ohne weiteres auch im allgemeinen Falle ablesen lassen, dass der Artinsche Führerexponent (44) ganzzahlig ist. Wie wir nun dem Brief entnehmen, glaubt Artin nicht an die allgemeine Gültigkeit von (47). In der Tat beinhalten diese Kongruenzen die Gültigkeit des „Satzes von Hasse-Arf", und heute wissen wir nach Fesenko [Fes95], dass der Satz von Hasse-Arf in gewissem Sinne auf abelsche Erweiterungen beschränkt ist.

Nun möchte Artin den Hasseschen Beweis der Kongruenzen (47) sehen, in der Hoffnung, dass darin ein neuer Gedanke stecke, den er vielleicht verallgemeinern kann, um damit direkt die Ganzzahligkeit von (44) zu beweisen. Er schreibt: „*Ich glaube, an der Hand Ihres Beweises würde mir vielleicht der direkte Nachweis gelingen.*" Artin kennt also den Hasseschen Beweis noch nicht; deshalb bittet er um mehr Information. Er vermutet, dass ihm dies „*ohne die neue Idee, die in Ihrer Arbeit stecken muss nicht glücken wird.*". Siehe hierzu auch Artins Ausführungen im nächsten Brief Nr. 33 vom 7. 11. 1930.

32.2 Der Umweg

Mit seiner eigenen Methode zum Beweis der Ganzzahligkeit von (44) ist Artin offenbar nicht zufrieden, er betrachtet diese als einen Umweg. Er schildert in Kürze diesen Umweg: Zuerst die Zurückführung auf die Verzweigungsgruppe, also eine p-Gruppe. Sodann vermöge des gruppentheoretischen Induktionsprozesses für Charaktere die Zurückführung auf den abelschen Fall, unter Anwendung des Satzes von Blichfeldt [Bli04], dass jede irreduzible[13] Darstellung einer p-Gruppe sich durch den gruppentheoretischen Induktionsprozess aus einer abelschen Darstellung einer Untergruppe ergibt.[14] Im abelschen

[13] Artin erwähnt in seinem Brief nicht die notwendige Voraussetzung der Irreduzibilität.

[14] Heute könnte man diese beiden Schritte zusammenziehen unter Anwendung des Brauerschen Satzes über induzierte Charaktere [Bra47a].

Fall, so schreibt Artin, ist er „am Ende“. Damit meint er wahrscheinlich, dass er ohne Klassenkörpertheorie nicht weiter kommt. Dies wird deutlich in seinem nächsten Brief, wo er sagt, dass ihm die angestrebte Vereinfachung nicht geglückt sei. Er habe nämlich vermutet, dass Hasse bei dem Beweis seiner Kongruenzen (47) ohne Klassenkörpertheorie auskomme, also lediglich gruppentheoretisch ähnlich „wie Speiser“ arbeite.[15] Das sei aber nicht der Fall.

Der „Umweg“, den Artin machen muss aber eigentlich vermeiden möchte, besteht also darin, dass er die Klassenkörpertheorie zum Beweis der Grundeigenschaften seiner Führer $\mathfrak{f}(\chi)$ benutzt. Hauptsächlich geht es dabei um die Ganzzahligkeit der Exponenten (44), also die Tatsache, dass $\mathfrak{f}(\chi)$ ein Ideal des Grundkörpers ist. Er vermutet, dass diese Tatsache unabhängig von der Klassenkörpertheorie ist, also für jede (lokale) galoissche Erweiterung gilt.

Dies wurde einige Jahre später durch den Hasse-Schüler Cahit Arf in seiner Dissertation [Arf39] bestätigt. Vgl. 33.4.2.

[15] Damit meint er offenbar die Arbeit [Spe19] aus dem Jahre 1919.

33 07.11.1930, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 7. November 1930

Lieber Herr Hasse!

Hier haben Sie also das versprochene Manuskript.[1] Sie ersehen daraus, dass mir die gewünschte Vereinfachung nicht geglückt ist. Das ist auch kein Wunder. Ich hegte die Hoffnung, dass Sie Ihre Kongruenzen nicht aus der Klassenkörpertheorie beziehen, sondern direkt, etwa wie Speiser beweisen. Dabei habe ich immerhin die schöne Arbeit von Speiser zu Gesicht bekommen, die ich noch nicht kannte und die ich zitieren musste, denn mein Beweis der Teilbarkeit durch e_0 geschieht auf ähnlichem Wege wie Speiser seine Resultate gewinnt.[2] Sie ersehen jetzt auch, warum ich nicht an eine allgemeine Gültigkeit der Kongruenzen glaube. Wie aber der entsprechende Satz allgemein lautet, davon habe ich keine Ahnung.

Hoffentlich finden Sie nicht dass ich in der Einleitung mit Zukunftsausblicken zu phantastisch gewesen bin aber ich bin der Meinung, dass man mit seinen Vermutungen nicht immer hinter dem Berge bleiben soll.[3]

Darf ich Sie nun fragen, in welches Heft die Arbeit hinein kommen soll? Das hat für mich grosses Interesse, denn die Arbeit über die L-Reihen wird soeben gedruckt und ich musste beim Zitat der vorliegenden Arbeit natürlich die Bandnummer frei lassen. Da ich in wenigen Tagen Korrekturen bekommen werde, wäre ich Ihnen sehr verbunden, wenn ich den Erscheinungsband wissen könnte.[4]

Nochmals meinen besten Dank für die Übersendungen. Leider hat sich eben keine Vereinfachung gefunden, aber ich bin überzeugt, dass man jetzt bald dahinter kommen wird.

[1] Siehe 33.1.

[2] Siehe 33.2.

[3] Siehe 33.3.

[4] Die Arbeit erschien in Band 164 des Crelleschen Journals. In [Art30] zitiert Artin versehentlich Band 146.

Blaschke hat mir viel erzählt von der gemeinsamen Fahrt die Sie mit Courant von Jena aus unternommen haben. Schade dass ich nicht dort war.[5]

Inzwischen mit den besten Grüssen auch von meiner Frau an Ihre Frau Gemahlin.

Ihr Artin

---

[5]Wir wissen nicht, aus welchem Anlass sich Hasse zusammen mit Blaschke und Courant in Jena aufgehalten hatte. Hasse war im Jahre 1930 zum Mitglied der Habilitationskommission für Heinrich Grell in Jena gewählt worden. Vielleicht war es die Habilitation von Grell, aus deren Anlass Hasse nach Jena gereist war? Aus einem Brief von Grell an Hasse vom 9. 1. 1931 geht hervor, dass Hasse kurz zuvor vor der Mathematischen Gesellschaft in Jena einen Vortrag gehalten hatte. Grell bedankt sich nämlich bei Hasse dafür, dass ihm dieser sein Vortragsmanuskript überlassen hatte und schickt es zurück. (Wir haben dieses Vortragsmanuskript nicht in dem Nachlass Hasse gefunden.)

Kommentare zum Brief Nr.33:

33.1 Das Führer-Manuskript

Es handelt sich um das Manuskript zur Arbeit [Art31] über die von Artin eingeführten neuen Führer $\mathfrak{f}(\chi)$. Die Arbeit soll im Crelleschen Journal erscheinen, wie Artin es in dem vorvorigen Brief Nr. 31 vom 23. 9. 1930 angekündigt hatte. Das Manuskript hatte Artin erst nach seiner Ankunft in Hamburg am 14. 10. 1930 begonnen, was aus dem vorigen Brief Nr. 32 zu entnehmen ist. Artin hat also seine Arbeit in weniger als 3 Wochen angefertigt. Das Eingangsdatum beim Crelleschen Journal ist als der 9. 11. 1930 angegeben.

Wenn Artin schreibt, dass ihm die „*Vereinfachung nicht geglückt*“ sei, dann knüpft er damit an seine entsprechenden Bemerkungen im vorangegangenen Brief Nr. 32 an, vgl. 32.2. Er suchte also nach einer Beweisführung für die Ganzzahligkeit seines Führerexponenten (44) (Seite 323), *ohne Zuhilfenahme der Klassenkörpertheorie*. Er hatte geglaubt, dass der Beweis von Hasse für die Kongruenzen (47) (Seite 344) im abelschen Falle gruppentheoretischer Art sei, und dass er daraus Ideen zum Beweis auch im nicht-abelschen Falle gewinnen könne. Nun aber musste er feststellen, dass auch Hasses Beweis die Klassenkörpertheorie benutzt, nämlich im Rahmen der von Hasse neu begründeten Theorie der Normenreste.

In diesem Zusammenhang erinnern wir daran, dass die Hassesche Theorie der Normenreste zwar lokaler Natur ist, aber zu dem damaligen Zeitpunkt ihre Begründung aus der *globalen* Klassenkörpertheorie schöpfte. Erst später gelang es Hasse in [Has33a], seine Normenresttheorie und damit auch die lokale Klassenkörpertheorie rein lokal zu begründen. Diese Arbeit erschien 1933 in den Mathematischen Annalen, war aber schon im Frühjahr 1932 fertig, als Hasse sie zum 50. Geburtstag Emmy Noethers am 23. März 1932 vorlegte. Vgl. dazu [LR06].

33.2 Speiser

Hier bezieht sich Artin auf die Arbeit von Speiser über die Zerlegungsgruppe [Spe19], die 1919 im Crelleschen Journal erschienen war. Die Teilbarkeit durch e_0, die Artin erwähnt, bildet den „einfachen Hilfssatz“, den Artin in seinem vorangegangenen Brief Nr. 32 vom 10. 10. 1930 erwähnt. Dieser Satz wird zwar bei Speiser nicht explizit formuliert. Er ergibt sich jedoch implizit aus den Rechnungen bei Speiser, was ja Artin auch sagt. Die Methode besteht

darin, die Wirkung der Trägheitsgruppe auf der Faktorgruppe $V_{v_i}/V_{v_{i+1}}$ zu studieren.

Im vorangegangenen Brief Nr. 32 wird Speiser nicht erwähnt. Jetzt sagt Artin, dass er die „schöne Arbeit“ von Speiser damals noch nicht kannte. Es hat also den Anschein, dass er den Hinweis auf diese Arbeit inzwischen von Hasse bekommen hatte. Hasse kannte die Speisersche Arbeit, denn er hatte sie zitiert in [Has30d]; dieser Artikel war ja zum Zeitpunkt dieses Briefwechsels schon erschienen.

Übrigens: Bei Speiser [Spe19] werden für eine beliebige Galoisgruppe, die also nicht notwendig abelsch ist, die Kongruenzrelationen (47) in einer sehr viel schwächeren Version bewiesen:

$$v_i \equiv v_{i-1} \bmod e_0 p\,.$$

Dies reicht im allgemeinen nicht aus, um die Ganzzahligkeit in (44) nachzuweisen. Vielleicht ist das der Grund dafür, dass Artin schreibt, er glaube nicht an die allgemeine Gültigkeit der Hasseschen Kongruenzen (47) auch im nicht-abelschen Fall.

33.3 Zukunftsaussichten

Artin hat die Sorge, dass er in der Einleitung zu seiner Arbeit [Art31] einige unbedachte „phantastische Zukunftsaussichten“ formuliert hat. Sehen wir uns etwas näher an, was er in [Art31] gesagt hat. Zunächst:

> „*Man wird mit Recht erwarten, daß auch im Falle nicht-abelscher Gruppen unsere Ideale*[6] *eine ausgezeichnete Rolle bei den Zerlegungsgesetzen spielen werden.*“

Mit „Zerlegungsgesetze“ meint Artin die Gesetze, nach denen sich ein gegebenes Primideal des Grundkörpers im galoisschen Oberkörper zerlegt. Im abelschen Falle werden diese Zerlegungsgesetze durch das Artinsche Reziprozitätsgesetz und die Klassenkörpertheorie vermittelt. Schon in einem früheren Brief, nämlich Nr. 15 vom 19. 8. 1927, hat Artin gesagt, dass es eines seiner Ziele sei, an die nicht-abelschen Körper heranzukommen. (Vgl. dazu 15.4.) Hier sehen wir, dass er dieses Ziel weiter verfolgt, und wir werden dasselbe auch aus späteren Briefen entnehmen können. Zu den von ihm angesprochenen „Zerlegungssätzen“ erklärt Artin jedoch:

[6] Gemeint sind die Artinschen Führer.

> „*Ich kann über diese Frage nichts aussagen*“.

Er hat also keine eigentliche Vermutung dazu, obwohl er in dem Brief an Hasse von „Vermutungen“ spricht. Weiter:

> „*Man wird vielleicht hinter das Geheimnis der Zerlegungsgesetze kommen, wenn man die Ergebnisse dieser Arbeit direkt zu begründen versucht.*“

Hierbei meint er mit „direkt“, dass man ohne Klassenkörpertheorie auskommen soll. Und:

> „*Ich kann nicht daran glauben, daß diese dazu*[7] *wirklich erforderlich ist.*“

Hier sagt also Artin öffentlich, was wir aus seinen Briefen schon wissen, nämlich dass er Beweise ohne Klassenkörpertheorie anstrebt. Das konnte später bestätigt werden. Ob das allerdings im Sinne dessen war, was Artin sich hier vorgestellt hat, sei dahingestellt. Vgl. dazu 33.4.

Mehr noch verspricht sich Artin von dem Versuch, die Determinante einer galoisschen Zahlkörpererweiterung als Gruppendeterminante zu schreiben:

> „*Aus einer solchen Schreibweise würde man alle Sätze dieser Arbeit ablesen können.*“

Diesen Gedanken hat Emmy Noether aufgenommen. In der bereits am Schluss von 30.1.3 zitierten Arbeit [Noe32] hat sie jedenfalls im zahm-verzweigten Fall die Existenz einer lokalen Ganzheits-Normalbasis nachgewiesen. Das hat zur Folge, dass die Diskriminante in der Tat als Gruppendeterminante geschrieben werden kann. Genauer: Ist $\{u^\sigma\}$ eine Ganzheits-Normalbasis (wobei σ die Elemente der Galoisgruppe durchläuft), so ist die Diskriminante das Quadrat der Gruppendeterminante $\det(u^{\sigma\tau^{-1}})$. Allerdings hat sich die Vermutung von Artin, dass dadurch „*alle Sätze dieser Arbeit abgelesen werden können*“, nicht bewahrheitet. In der genannten Noetherschen Arbeit wird ein von Deuring stammendes Gegenbeispiel angegeben.

Daher ist uns nicht klar, was Artin gemeint haben könnte, wenn er sagt, dass die Diskriminante vielleicht als Gruppendeterminante geschrieben werden könnte. Denn eine Ganzheits-Normalbasis gibt es nach Speiser [Spe16]

[7] Nämlich die Klassenkörpertheorie zur Begründung der Ergebnisse der Artinschen Arbeit.

nur dann, wenn die Verzweigung zahm ist. Vielleicht hatte Artin an „Gruppendeterminante“ in einer anderen Struktur gedacht, nicht notwendig in der galoisschen Erweiterung selbst.

In einem aber können wir Artin aus heutiger Sicht voll und ganz zustimmen:

> „*Immerhin scheinen mir diese Erwägungen die Wichtigkeit der neuen Begriffe für die künftige Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie zu zeigen.*“

Denn die Artinschen L-Funktionen und die Artinschen Führer spielen eine herausragende Rolle in der algebraischen Zahlentheorie auch aus heutiger Sicht.

33.4 Ohne Klassenkörpertheorie

In diesem Abschnitt wollen wir einen Überblick geben über die Aktivitäten, die Artins Idee, seine Führertheorie unabhängig von der Klassenkörpertheorie zu begründen, umzusetzen versuchten. Die Noethersche Arbeit [Noe32], die allerdings nur den zahm verzweigten Fall behandeln konnte, haben wir schon erwähnt. Vgl. 30.1.3 und 33.3.

33.4.1 Normenreste

Im Jahr 1934 erschien Hasses Arbeit [Has34b] mit dem Titel: „*Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper.*“ In gewisser Weise kann dies als eine Neufassung der bereits erwähnten Führer-Arbeit [Has30d] angesehen werden (vgl. Kommentare 31.2 und 32.1). Jetzt aber wird die Untersuchung systematisch auf galoissche Körper ausgedehnt, die nicht notwendig abelsch sind. Es ist unschwer zu erkennen, dass diese Arbeit unmittelbar beeinflusst wurde durch die Frage Artins, wie denn die Hasseschen Kongruenzen (47) (Seite 344) im galoisschen Fall aussehen würden. Denn im vorliegenden Brief sagt Artin: „*Wie aber der entsprechende Satz allgemein lautet, davon habe ich keine Ahnung*“. Hasse versucht es nun in [Has34b] mit einer genauen Untersuchung der Normenreste im galoisschen Fall.

Die wesentlichen Hilfsmittel dazu sind, *erstens*, seine eigenen Arbeiten zum lokalen Aufbau der Normenresttheorie, und *zweitens*, die Ergänzung von Herbrand zur Hilbertschen Verzweigungstheorie für galoissche Körper

[Her31a]. In dieser Arbeit führt Herbrand die sogenannte „obere Numerierung“ der Verzweigungsgruppen ein. Nach [Has34b] kann dies durch eine stückweise lineare und monotone Funktion, die sogenannte „Hasse-Funktion“, beschrieben werden, die man heute meist in der Form

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{dt}{(V_0 : V_t)}$$

schreibt. Dabei wird für reelles t die Verzweigungsgruppe $V_t = V_i$ gesetzt, wenn i die kleinste ganze Zahl $\geq t$ ist. Sei ψ die Umkehrfunktion von φ. Die Herbrandsche Numerierung der Verzweigungsgruppen wird dann gegeben durch

$$V_i = V^{\varphi(i)} \qquad \text{also} \qquad V^j = V_{\psi(j)}\,.$$

Nach Herbrand passt sich diese Numerierung dem Übergang zu galoisschen Teilkörpern an, also zu Faktorgruppen der Galoisgruppe. Hasse untersucht nun in [Has34b] systematisch den Zusammenhang dieser Herbrandschen Numerierung mit den Normenresten. Es ist offensichtlich (obwohl Hasse das nicht explizit sagt), dass er dabei zum Ziel hat, eine Verallgemeinerung der Kongruenzen (47), die er vom abelschen Fall her ja kannte, für beliebige galoissche Körper zu finden, um damit vielleicht das Problem der Artinschen Führer lösen zu können. Zwar gelingt ihm das nicht, aber dennoch ist diese Arbeit zu den bedeutenden Fortschritten in der von Hensel begonnenen lokalen Theorie der Normenreste zu zählen. Eine systematische Darstellung im Rahmen der Theorie der lokalen Körper findet man in Serres „Corps locaux“ [Ser62].

Im abelschen Falle findet Hasse in [Has34b] seine Kongruenzen (47) wieder, allerdings wiederum nur mit Hilfe der Klassenkörpertheorie. Diesmal aber kann er sich auf die inzwischen entwickelte *lokale Klassenkörpertheorie* in ihrer lokalen Begründung stützen; diese wurde von Chevalley und Herbrand besonders vereinfacht. Hasse zitiert dazu die Chevalleysche Thèse [Che33b], die in derselben Zeitschrift unmittelbar vor der Hasseschen Arbeit abgedruckt ist. Obwohl, wie gesagt, Hasse die Artinsche Frage hier nicht löst, so ist [Has34b] im abelschen Fall als eine Vereinfachung und Systematisierung der Resultate aus [Has30d] zu werten.

33.4.2 Hasse-Arf

Cahit Arf war ein Doktorand von Hasse in den Jahren 1937–1938 in Göttingen. Offenbar erinnerte sich Hasse an das damalige Desideratum von Artin,

dass die Theorie der Führer ohne Benutzung der Klassenkörpertheorie begründet werden sollte. Daher stellte er Arf die Aufgabe, nach einer solchen Begründung zu suchen. Es geht darum, die Gültigkeit der Hasseschen Formel (46) mit den Kongruenzen (47) für eine abelsche Erweiterung $K|k$ eines *beliebigen diskret bewerteten kompletten Körpers k mit vollkommenem Restklassenkörper* zu beweisen. Es genügt, den rein verzweigten Fall zu behandeln; man kann sich dabei auf den zyklischen Fall beschränken. Arf führte das in seiner Dissertation [Arf39] durch; wir haben diese Arbeit bereits in 32.2 erwähnt.

Interessant ist, dass Arf als Hilfsmittel die Einbettung von $K|k$ in nicht-kommutative Algebren A betrachtet, und zwar so, dass die Hauptordnung von K in einer Maximalordnung von A enthalten ist. Er benutzt dabei, *erstens*, die von Hasse [Has31b] entwickelte Strukturtheorie der lokalen Algebren, und *zweitens*, den Zusammenhang zwischen den Hauptordnungen einer lokalen Divisionsalgebra mit denen ihrer maximalen Teilkörper, wie sie von Hasse in dem Herbrand-Gedächtnisband dargestellt worden war [Has34d]. (Hierzu siehe auch Noether [Noe34]; die sich überschneidenden Noetherschen und Hasseschen Resultate sind unabhängig voneinander gefunden worden.) Die Heranziehung von nicht-kommutativen Algebren erinnert an den Ansatz von Emmy Noether in [Noe32], die ja ebenfalls die Artinschen Führer mit Hilfe nicht-kommutativer Strukturen gewinnen wollte.

Die Arbeit von Arf ist nicht einfach zu lesen. Uns scheint, dass sie in weiten Teilen im Stil von Marc Krasner geschrieben wurde. Das erklärt sich vielleicht dadurch, dass Arf in Paris studiert hatte, bevor er nach Göttingen kam. Ein Teil seiner Techniken und Hilfsbetrachtungen über die Erzeugung rein verzweigter Erweiterungen wurden unabhängig auch von Krasner in [Kra37] entwickelt. Arf hatte diese Arbeit im Zentralblatt für Mathematik referiert.

Der von Arf bewiesene Satz wird heute allgemein als „Satz von Hasse-Arf“ bezeichnet. Hasse hatte diesen Satz für die lokalen Körper in der Zahlentheorie bewiesen; das läuft auf den Fall endlicher Restklassenkörper zurück. Die Verallgemeinerung von Arf besteht darin, dass er beliebige vollkommene Restklassenkörper zulässt und damit die Beweise unabhängig von der Klassenkörpertheorie führt.

33.4.3 Weiteres

In Weiterführung und Vereinfachung der Arfschen Untersuchungen [Arf39] sind folgende Arbeiten zu nennen:

Serre [Ser61] hat für diskret bewertete komplette Körper mit *algebraisch abgeschlossenem* Restklassenkörper eine Art Klassenkörpertheorie entwickelt, und in diesem Rahmen den Satz von Hasse-Arf bewiesen. Der Fall eines beliebigen vollkommenen Restklassenkörpers kann darauf zurückgeführt werden.

In seinem Buch „Corps locaux“ [Ser62] hat Serre die Hassesche Normenresttheorie auf den Fall eines beliebigen (vollkommenen) Restklassenkörpers erweitert. Als Anwendung wird dann der Satz von Hasse-Arf in diesem Rahmen bewiesen. Dabei (wie auch in der vorgenannten Arbeit) wird alles auf den Fall einer rein verzweigten zyklischen Erweiterung von p-Potenzgrad reduziert; dies ist also das Kernstück des Beweises. Es verwundert, dass nicht Hasse selbst im Anschluss an seine Normenresttheorie aus [Has34b] auf diese, von der (lokalen) Klassenkörpertheorie unabhängige Beweisvariante gekommen ist.

Im Jahr 1969 hat Shankar Sen, ein Doktorand von Tate, einen besonders einfachen und schönen Beweis des Satzes von Hasse-Arf gegeben. Zwar ist dieser Beweis auf rein verzweigte zyklische Erweiterungen von p-Potenzgrad beschränkt, aber wir haben schon oben erwähnt, dass dieser Satz das Kernstück des Beweises für beliebige abelsche Erweiterungen bildet. Sen zeigt, dass in diesem Falle die Kongruenzen

$$v_i \equiv v_{i-1} \bmod p^{i-1}$$

gelten; dies sind in der Tat die Kongruenzen (47) im zyklischen Falle.

Für weitere Informationen siehe [Roq00].

34 11.11.1930, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 11. November 1930

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief und die Bemerkungen zur Arbeit.[1] Sie ersehen aber die nachlässige Redaktion meiner Arbeit nicht nur an der Zahl der Fehler sondern auch daran, dass ich mir keinen Durchschlag der Arbeit angefertigt habe, so dass ich im Augenblick die Sachen nicht überprüfen kann. Ich werde das erst während der Korrekturen machen können. Ich möchte nur noch einen Moment auf die fraglichen Kongruenzen zu sprechen kommen. Es handelt sich dabei nur um die Kongruenzen nach dem Modul e_0. Da haben Sie natürlich recht und es ist eine Nachlässigkeit im Zitat. Ich habe aber doch auch recht. Denn Ihre Kongruenzen leitet man unmittelbar aus dem allgemeinen Satz über die Automorphismen der Verzweigungsgruppe her. Das fragliche Zitat hätte also lauten sollen: „Ist die Gruppe abelsch, so sind dies Kongruenzen, die einen Spezialfall der von Hasse gefundenen Kongruenzen bilden. Aber auch die Hasseschen Kongruenzen lassen sich aus dem vorigen Satz im Spezialfall der abelschen Gruppen leicht herleiten, das heisst derjenige Teil, der sich auf den Modul e_0 bezieht“. So oder so ähnlich hätte ich schreiben sollen und wollte es auch ursprünglich. Im Manuskript habe ich es dann vergessen. Darf ich Sie noch fragen auf welches Problem ich bezug nehmen soll? Auf Seite 192 steht nämlich keins. Ich nehme an, dass es die Probleme sind, die Sie in dem Bericht angeben, und das will ich natürlich gerne tun; umso lieber, als ich durch sie erst zur Untersuchung angeregt wurde.

Ein bisschen Zukunftsmusik.[2] Ich denke mir, dass man jetzt den Ring der Zahlen untersuchen muss, der durch Erweiterung des Körpers mit seiner eigenen Gruppe entsteht, also den nicht-kommutativen Ring den schon Dickson eingeführt hat. Leider kenne ich die ganze neue in Ihrem Brief erwähnte Literatur nicht, habe also nicht alles darin verstanden. Dass die Sache mit den Matrizendarstellungen dieses Rings etwas zu tun haben muss, erscheint mir jetzt als ausgemacht. Verstanden habe ich den Teil wo Sie sagen, man muss die Einteilung im Oberkörper, das heisst besser im genannten Ring untersuchen. Das ist auch meine Meinung gewesen. Ich denke aber, dass man dabei mit den Führern selbst auskommen wird. Zunächst braucht man sich ja überhaupt nicht den Kopf über den genauen Modul zu zerbrechen, der

[1] Siehe 34.1.
[2] Siehe 34.2.

stellt sich dann schon von selbst ein. Leider habe ich im Augenblick gar keine Zeit diese Dinge zu verfolgen, ich kann nur gelegentlich daran denken. Ich bin aber überzeugt, dass wir in spätestens einem Jahre darüber Bescheid wissen werden. Vielleicht aber bin ich darin zu optimistisch.

Ich habe Ihnen heute eine Korrektur von der anderen Arbeit[3] schicken lassen, will Sie aber um Gottes Willen nicht mit den langweiligen Korrekturen plagen. Wenn Ihnen darin aber etwas auffällt, so wäre ich Ihnen sehr dankbar wenn Sie es mir schreiben wollten. Bei den unendlichen Primstellen wollte ich gerne noch ein paar Zitate bringen, ausser Ihrem Bericht aber weiss ich keins. Daher wollte ich mit dem Zitat bis zur Korrektur warten und Sie um Rat fragen.

Mit den besten Grüssen auch von meiner Frau.

Ihr Artin

[3]Gemeint ist Artins Arbeit [Art30] über L-Funktionen, die in den Hamburger Abhandlungen erscheinen soll. Siehe auch 35.1.

Kommentare zum Brief Nr.34:

34.1 Die Bemerkungen

Artin hatte zusammen mit seinem vorangehenden Brief vom 7. 11. 1930 das Manuskript zu seiner Führer-Arbeit [Art31] geschickt, die im Crelleschen Journal erscheinen sollte. Als Herausgeber des Crelleschen Journals hatte Hasse das Manuskript genau angesehen und Artin, dem Autor, seine Bemerkungen dazu geschickt. Hasse pflegte jedes Manuskript, das ihm zur Publikation im Crelleschen Journal vorgelegt wurde, einer genauen Prüfung zu unterziehen. Rohrbach berichtet in [Roh64] für die 1920er und 1930er Jahre:

> „*... ist keine Arbeit in Crelles Journal gedruckt worden, von der Herr Hasse nicht Wort für Wort und Formel für Formel kritisch gelesen hätte. Groß ist die Anzahl der dabei von ihm gemachten Verbesserungsvorschläge aller Art an die Autoren – sowohl für die äußere Form der Darstellung als auch für den sachlichen Inhalt ...*“

Dies gilt also auch für die Führer-Arbeit von Artin.

Was die von Artin erwähnten „fraglichen Kongruenzen“ betrifft, so handelt es sich um die Kongruenzen (47) aus Hasses Führer-Arbeit [Has30d]. Offenbar hatte Hasse in dem Artinschen Manuskript ein entsprechendes Zitat vermisst. Wir haben die Situation bereits in 32.1.1 geschildert. Im abelschen Falle ist es leicht, für einen irreduziblen Charakter χ die Artinsche Formel (44) mit der Hasseschen Formel (46) zu identifizieren, und daher mit Hilfe der Kongruenzen (47) die Ganzzahligkeit von (44) zu beweisen. Offenbar war dies der Grund, weshalb Hasse von Artin ein Zitat der Arbeit [Has30d] erwartete. Artin aber geht einen anderen Weg, nämlich über die Führer-Diskriminantenformel . Für diese zitiert er zwar auch Hasse, nämlich erstens den Hasseschen Klassenkörperbericht I [Has26a], und zweitens die Hassesche Führer-Arbeit [Has30d]. Aber er zitiert eben nicht die Kongruenzen (47). Allerdings gibt Artin zu, dass er bei den auf e_0 bezüglichen Kongruenzen die Führer-Arbeit von Hasse hätte erwähnen wollen, es dann aber vergessen habe. Demgemäß hat Artin am Ende von §1 seiner Arbeit den Satz hinzugefügt: „*Dieses Resultat ist auf anderem Wege von Herrn Hasse gefunden worden*“, und es wird die Führer-Arbeit von Hasse zitiert.

In seinem Brief fragt Artin „*auf welches Problem ich Bezug nehmen soll*“. Hier handelt es sich um die von Hasse am Schluss seines Klassenkörperbe-

richts II aufgeführten offenen Probleme. Dort hatte Hasse u.a. die folgenden Probleme über Artins L-Funktionen genannt:

1. Explizite Angabe der Beiträge der Diskriminantenteiler zu den Artinschen L-Funktionen.
2. Eindeutigkeit der Artinschen L-Funktionen.
3. Ganzheit der Artinschen L-Funktionen.
4. Teilbarkeit der Dedekindschen ζ-Funktionen.
5. Analogon zur Riemannschen Vermutung für die Artinschen L-Funktionen.

Artin sagt nun in einer Fußnote zu [Art31]:

> „*Die in Teil II des zitierten Berichts von Herrn Hasse, Ergänzungsband* 6 (1930) *Seite* 193 *aufgeführten Probleme über L-Reihen haben zu der vorliegenden Untersuchung den Anstoß gegeben.*“

Das entspricht also genau der Situation, die wir in diesen Briefen vorgefunden haben; vgl. insbesondere die Briefe Nr. 29 vom 23. 8. 1930 und Nr. 30 vom 18. 9. 1930.

Vielleicht ist die Frage Artins, „*auf welches Problem*“ er Bezug nehmen soll, nicht nur durch die inkorrekte Seitenzahl begründet[4], sondern so zu verstehen, dass es ja eigentlich nur das Problem 1. ist, das er in seinen beiden Arbeiten [Art30] und [Art31] behandelt. Sollte er nur auf das Problem 1. Bezug nehmen? Wie wir in dem obigen Zitat sehen, hat er es dann vorgezogen, sich nicht auf ein spezielles der genannten Probleme zu beziehen, sondern seinen Hinweis auf den Klassenkörperbericht II allgemein zu halten.

Bekanntlich hat Richard Brauer im Jahre 1947 das Problem 2. gelöst [Bra47b], während die anderen genannten Probleme noch heute offen sind, abgesehen von Problem 4., für das Aramata [Ara30] aufgrund der Artinschen Resultate gezeigt hat, dass für eine *galoissche* Erweiterung $K|k$ die Zetafunktion von K durch die von k teilbar ist.

34.2 Zukunftsmusik

Wie es scheint, kommentiert Artin hier einige Äußerungen von Hasse, die wir nicht kennen. Der Abschnitt wird jedoch verständlich, wenn man die Korrespondenz Hasse-Noether heranzieht. Wir haben schon in 30.1.4 erwähnt,

[4] Es handelte sich um Seite 193, während Artin in seinem Brief nach Seite 192 fragt. Vielleicht hatte sich Hasse bei der Angabe der Seitenzahl geirrt.

dass Hasse mit Noether in engem Briefwechsel stand, dass er sie über die Artinschen Ideen über L-Reihen und Führer informiert hatte, und dass sie sogleich daran ging, sich über die Grundlagen der Artinschen Führertheorie im Rahmen der Theorie der Algebren (oder hyperkomplexen Systeme) Gedanken zu machen. In dem bereits in 30.1.4 herangezogenen Brief Noethers vom 10. 10. 1930 schreibt sie folgendes. Dabei bezeichnet $K|k$ eine galoissche Erweiterung von Zahlkörpern.

> „*Das verschränkte Produkt von K mit seinem Gruppenring (Gruppenring von $K|k$) wird wegen Faktorensystem* eins *ein voller Matrizenring über K. Jede Basis von $K|k$ – zusammen mit der Einheit der identischen Darstellung des Gruppenringes – liefert eine Zerlegung in einseitig einfache, etwa Rechtsideale. Die entsprechende Linkszerlegung wird dann durch die komplementäre Basis von $K|k$ erzeugt. Beschränkt man sich auf ganzzahlige Ideale, so gehören also Rechts- und Linkszerlegung komplementären Idealklassen von $K|k$ an. Ich vermute, daß man so auch Sätze über Differentenzerlegung erhält, und dann nach Normbildung Zusammenhänge mit Artin. Aber das ist Zukunftsphantasie!*“

Wir können daraus entnehmen, dass Noether die Theorie der Artinschen Führer mit Hilfe der Arithmetik in dem zerfallenden verschränkten Produkt von $K|k$ mit seiner Galoisgruppe begründen möchte. (Wir haben schon in 30.1.4 gesagt, dass ihr das im zahm verzweigten Fall schließlich gelang.)

Man beachte, dass Noethers Brief am 10. Oktober geschrieben wurde und Artins Brief am 11. November, also einen Monat später. Inzwischen hatte Hasse, so nehmen wir an, Artin über die Noetherschen Ideen informiert, so wie er vorher Noether über die Artinschen Ideen informiert hatte. Und Artins „Zukunftsmusik“ aus dem vorliegenden Abschnitt seines Briefes ist eine Antwort auf Noethers „Zukunftsphantasien“. Und zwar im zustimmenden Sinn.

In der Tat erwähnt ja Artin „*den Ring, den schon Dickson*[5] *eingeführt hat*“, also das zerfallende verschränkte Produkt. Und er meint auch, man muss „*die Einteilung ... besser im genannten Ring*“ untersuchen. Das bedeutet, dass man in dem nichtkommutativen verschränkten Produkt Arithmetik treiben und Klasseneinteilungen studieren muss, so wie man es im kommutativen Fall in der Klassenkörpertheorie gewohnt ist. Das aber ist genau der Ansatz von Emmy Noether in ihrem Brief.

[5] Artin bezieht sich wahrscheinlich auf das Buch „Algebras and their arithmetics“ [Dic23], das er in seiner Arbeit [Art28b] zitiert hatte.

35 27.11.1930, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 27. November 1930

Lieber Herr Hasse!

Leider kann ich Ihnen die Korrekturen erst heute schicken, da ich in der letzten Zeit erkältet war und nicht die nötige Konzentration zum Korrekturenlesen aufbrachte.

Wie Sie sehen, war ich ein getreuer Schüler und habe Ihre Anregungen getreulich befolgt, bis auf das zweimal vorkommende k. Ich glaube nämlich, dass mit dem Grundkörper wirklich keine Verwechslung eintreten kann. Daher habe ich es gelassen.[1]

Nicht ganz so zufrieden werden Sie dagegen mit den anderen Korrekturen sein. Die Hauptsache nämlich, den „richtigen Bewertungsbegriff", habe ich doch nicht eingeführt. Ich hätte nämlich sonst den ganzen Paragraphen neu schreiben müssen und das wäre immerhin kostspielig geworden. Ich habe aber die richtige Definition in einer Fussnote gebracht.

Ich danke Ihnen noch einmal für die Mühe die Sie sich mit den Korrekturen gemacht haben. Sie sind wirklich ein ungeheuer fleissiger Mensch. Ich glaube, dass Sie der einzige sein werden, der die Arbeit überhaupt liest.

Ich danke Ihnen auch für die Übersendung der Korrekturen Ihrer schönen und interessanten Arbeit über die Hyperkomplexe Arithmetik.[2] Dadurch ist wirklich alles sehr einfach geworden. Was den Satz über die Schiefkörper betrifft so glaube ich, dass jeder Schiefkörper (endlicher[3]) über einem Zahlkörper zyklisch sein wird. Natürlich entsprechend verallgemeinert: K/k cyklischer Körper n-ten Grades, erzeugende Substitution σ, Schiefkörperrelationen für alle $\alpha : \sigma.\alpha = \sigma(\alpha) \cdot \sigma = \alpha^\sigma \cdot \sigma$ und $\sigma^n = \beta$ mit passendem β. Könnten Sie das nicht etwa mit Ihrer Methode beweisen oder glauben Sie das nicht oder haben Sie gar ein Gegenbeispiel?

Sonst ist nichts neues vorgefallen. Ich lege Ihnen noch die gewünschte Arbeit bei.[4]

---

[1] Siehe 35.1.

[2] Siehe 35.2.

[3] Gemeint ist ein Schiefkörper endlicher Dimension.

[4] Uns ist nicht bekannt, um welche Arbeit es sich handelte.

Mit besten Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin, auch von meiner Frau

Ihr Artin

Wieviel Separata bekomme ich eigentlich bei Crelle und was kosten ungefähr weitere Sonderdrucke?[5]

Da fällt mir eben ein dass ich gehört habe, dass man Ihnen nur 25 Separata Ihres Berichts zur Verfügung gestellt hat. Ich finde das unerhört. Denn wenn 20 Leute das ganze Papier verbrauchen, bekommen sie die volle Anzahl und das kostet doch genau so viel wie wenn es ein Mann verbraucht. Dabei ist doch die Arbeit die Sie in den Bericht hineingesteckt haben enorm. Hier in Hamburg ist jeder von dem Bericht begeistert und richtig stolz, wenn er ein Separatum davon bekommen hat. Ich habe die drei Teile zusammenbinden lassen. Schade, dass sie nicht auf einmal erschienen sind.[6]

[5] „Crelle“ bedeutet „Crelles Journal“ und hat eigentlich den offiziellen Titel „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik“. Artin erkundigt sich nach den Sonderdrucken für seine Führer-Arbeit [Art31], für die er ja gerade die Korrekturfahnen eingesandt hat.

[6] Siehe 35.3.

Kommentare zum Brief Nr.35:

35.1 Korrekturen

Es handelt sich um zwei verschiedene Korrekturen. *Erstens*, die Korrekturfahnen der Artinschen Führer-Arbeit [Art31], die im Crelleschen Journal erscheinen soll; diese Korrekturen gehen an Hasse als dem Herausgeber des Journals. Im vorangegangenen Brief Nr. 34 haben wir gelesen, dass Hasse zum Manuskript zahlreiche Druckfehler moniert und Anregungen gegeben hatte (vgl. 34.1). Nun schickt Artin die korrigierte Version wieder zurück. Wir wissen nicht, welche Anregungen Hasse gegeben hatte; nur die eine, die Artin eben nicht befolgt hat, ist uns nach diesem Brief bekannt. Der Buchstabe k wird nämlich in [Art31] in zwei verschiedenen Bedeutungen benutzt: einmal als Summationsindex und das andere Mal zur Bezeichnung des Grundkörpers. Artin hält das für tolerierbar.

Zweitens, handelt es sich um die *„anderen Korrekturen"*, d.h. die Korrekturfahnen der Artinschen L-Funktionen-Arbeit [Art30], die in den Hamburger Abhandlungen erscheinen soll. Diese Korrekturen hatte Artin zusammen mit dem vorangegangenen Brief an Hasse geschickt und ihn um kritische inhaltliche Durchsicht gebeten. Insbesondere ging es Artin um ein Zitat, wo und wie die unendlichen Primstellen eines Zahlkörpers definiert worden sind.

Offenbar war aber Hasse nicht mit der Terminologie von Artin einverstanden, der als „Bewertung" eines endlichen Erweiterungskörpers von $\mathbb{Q}$ eine „Abbildung auf gewöhnliche Zahlkörper" definiert. Wie es scheint, hatte Hasse geschrieben, dass Artin den „richtigen Bewertungsbegriff" einführen möge, so wie er damals benutzt wurde. Artin meint aber, dass es dazu zu spät sei, denn das würde eine grössere Änderung bei den Korrekturen bedeuten, die zu kostspielig geworden wäre. Die im Brief von Artin erwähnte Fußnote lautet:

> *Unter Bewertung hat man eigentlich die Zuordnung eines absoluten Betrages zu verstehen. Jede Abbildung auf einen Zahlkörper liefert dann eine solche, wobei konjugiert komplexe Abbildungen jetzt die gleiche Bewertung ergeben.*

Wir wissen nicht, ob Hasse mit diesem Text zufrieden war. Wir haben zu bedenken, dass Artin sich mit der L-Reihen-Arbeit insbesondere auch an Analytiker wandte, die nicht unbedingt mit den damals gängigen Begriffen der algebraischen Zahlentheorie vertraut waren.

Als Zitat, wo die archimedischen Bewertungen als „unendliche Primstellen“ zuerst auftraten, führt Artin das Buch „Zahlentheorie“ von Hensel [Hen13] an. Dort aber wird nur der rationale Zahlkörper behandelt. Für beliebige Zahlkörper verweist Artin auf Hasses Arbeit [Has24a] über das Lokal-Global-Prinzip bei quadratischen Formen, sowie auch auf den Klassenkörperbericht Ia [Has27a]. Es ist evident, dass Artin diese Zitate wie gewünscht von Hasse erhalten hatte.

Wenn Artin schreibt, dass Hasse wohl der einzige sein werde, der die Arbeit liest, so ist dies wohl nicht als Bescheidenheit auszulegen, sondern als bewusstes Understatement. Aus dem vorangegangenen Briefwechsel können wir entnehmen, dass sich Artin sehr wohl über die Bedeutung seiner L-Reihenarbeit im Klaren war.

35.2 Hyperkomplexe Arithmetik

Hier geht es noch einmal um Korrekturen, diesmal aber über die Korrekturfahnen einer Arbeit von Hasse, die dieser an Artin zur Information (als „Preprint“) geschickt hatte. Darin entwickelte Hasse die Arithmetik der Algebren. Diese Arbeit [Has31b] ist als bahnbrechend zu bezeichnen, denn Hasse führt darin nach dem Henselschen Vorbild die lokale Betrachtungsweise der Algebren ein, die dann ein Jahr später zum Lokal-Global-Prinzip für Algebren führt und heute zum selbstverständlichen Rüstzeug der Zahlentheoretiker gehört.

Es ist kein Zufall, dass Hasse diese Korrekturen gerade an Artin geschickt hatte. Denn Artin selbst hatte kurz zuvor eine eigene große Arbeit publiziert, in der er die Arithmetik der Algebren über Zahlkörpern entwickelt, in Fortführung eines Ansatzes von Speiser [Spe27]. Artin hatte seine Arbeit in drei Teile aufgeteilt: [Art28a], [Art28b], [Art28c], erschienen in den Hamburger Abhandlungen. Diese Arbeiten werden von Hasse in seinem Vorwort erwähnt. Zunächst spricht Hasse von der dritten der Artinschen Arbeiten [Art28c]; darin wird u.a. das Brandtsche Gruppoid der Ideale und Idealklassen definiert und untersucht, als Analogon zur Idealklassengruppe bei den Zahlkörpern. Dazu aber, so sagt Hasse,

> „*erfordert die Durchführung der Artinschen Theorie eine Ausdehnung der Wedderburnschen Struktursätze auf allgemeinere Ringe, etwa solche, wie sie ... durch Restsysteme nach einem Primzahlpotenzmodul gegeben werden ...*“

womit er die zweite Artinsche Arbeit [Art28b] meint, in der die Theorie der

heute sogenannten „Artinschen Ringe“ entwickelt wird, d.h. der Ringe, in denen neben dem aufsteigenden auch der absteigende Teilerkettensatz für Ideale gilt.[7] Diese sind nicht mehr Algebren über einem Körper, in welchen die ursprünglichen Wedderburnschen Sätze gelten; daher müssen die Wedderburnschen Struktursätze auf diesen Fall verallgemeinert werden. Heute ist das Routine, damals war es jedoch ein ganz neuer Gesichtspunkt. Hasse erkennt an, dass

> „*diese Artinschen Struktursätze im Rahmen einer algebraischen Strukturtheorie allgemeiner nichtkommutativer Ringe, wie sie etwa in der neuen großen Arbeit von Fräulein Noether niedergelegt ist*[8]*, von hohem Interesse ist ...*“

aber, so scheint es ihm, ist es andererseits wertvoll, mit den ursprünglichen Wedderburnschen Struktursätzen auszukommen. Das kann Hasse nun erreichen. Er sagt:

> „*Ich baue den ursprünglichen Speiserschen Ansatz in demselben Sinne aus, wie es die Henselsche Arithmetik der algebraischen Zahlkörper mit dem ursprünglichen ... Ansatz tut.*“

Das bedeutet: Statt Kongruenzen nach beliebig hohen Primzahlpotenzmoduln zu betrachten, wird der p-adische Limes genommen. Dadurch gelangt Hasse zu den Lokalisierungen von Algebren. Jede Algebra über einem Zahlkörper bestimmt also für jede Primstelle des Grundkörpers eine Lokalisierung, und die Strukturtheorie dieser Lokalisierungen gewährt Aufschlüsse über die Arithmetik der ursprünglichen Algebra.

Mit dieser Sichtweise eröffnet Hasse in [Has31b] einen neuen Weg in der Algebrentheorie über Zahlkörpern, der sich als überaus fruchtbar erwiesen hat und heute zum Standard gehört. Wie bereits oben gesagt, führt dieser Ansatz schließlich über das Lokal-Global-Prinzip zur Beschreibung der Brauerschen Gruppe durch die sog. Hasseschen Invarianten. Und auch zu einem neuen Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes der Klassenkörpertheorie. Siehe [Has33a].

---

[7] Damals war noch nicht bekannt, dass aus dem absteigenden Teilerkettensatz („Minimalbedingung“) der aufsteigende Teilerkettensatz („Maximalbedingung“) folgt; dies wurde erst 1939 in [Hop39] bewiesen. Die Theorie der „Rings with minimum condition“ wurde dann systematisch in der Broschüre von Artin, Nesbitt and Thrall [ANT44] dargestellt. Die grundlegenden Ideen dazu stammen jedoch aus der frühen Artinschen Arbeit [Art28b].

[8] Gemeint ist die Noethersche Arbeit [Noe29] aus dem Jahre 1929, in der u.a. die Theorie der (heute so genannten) Artinschen Ringe systematisch und abstrakt begründet wird.

Es erscheint uns bemerkenswert, dass Artin die Bedeutung der Hasseschen Arbeit [Has31b] sofort erkennt; er nennt sie „*schön und interessant*“ und findet, dass nun „*wirklich alles sehr einfach geworden*“ ist. In der Tat ist die von Hasse begründete Theorie der lokalen Algebren nun sehr einfach geworden: jede solche Algebra ist zyklisch und durch ihre Invariante gekennzeichnet.[9] Wir erkennen hier eine Tendenz, die immer wieder in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik zu beobachten ist, nämlich: *Vereinfachung bahnt den Weg zu neuen Ergebnissen.*

Sehr bemerkenswert ist auch, dass Artin schon in diesem Brief seine definitive Meinung äußert, dass jeder (endlichdimensionale) Schiefkörper über einem Zahlkörper zyklisch ist. Artin bezieht sich dabei auf Hasses „Satz über die Schiefkörper“, das ist der Satz 38 in [Has31b], in dem gezeigt wird, dass jeder (endlichdimensionale) Schiefkörper über einem *lokalen Körper* zyklisch ist.[10] Vielleicht hatte Hasse ihn um seine Meinung dazu gefragt. In der Tat erscheint das wahrscheinlich, denn schon seit einiger Zeit beschäftigte sich Hasse mit dieser Frage. Er hatte z.Bsp. Richard Brauer schon früher, in einem Brief vom 16. 3. 1930, gefragt,

> „*... ob Ihnen über dem* rationalen *Körper als Zentrum oder einem gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper k als Zentrum ein Schiefkörper bekannt ist, für den es keinen* Abelschen *oder wenigstens keinen* zyklischen *maximalen Teilkörper gibt*“.

Brauer hatte damals geantwortet:

> „*Auch die ... von Ihnen gestellte Frage, ob es Schiefkörper gibt, die nicht vom Dicksonschen Typ sind (d.h. die keinen zyklischen maximalen Teilkörper haben), weiß ich nicht.*“

Im selben Brief, also schon im März 1930, hatte Hasse an Brauer seine Ergebnisse über p-adische Schiefkörper im Detail mitgeteilt, so wie er es jetzt, in der Form von Korrekturbogen, an Artin mitgeteilt hat.

Artins Antwort ist im Vergleich zu Brauers ziemlich bestimmt und kategorisch. Allerdings ist er offenbar doch noch nicht vollständig überzeugt; er

[9] Letzteres wird allerdings im Detail erst in der Folgearbeit [Has32b] formuliert.

[10] Übrigens benutzt Hasse in seiner Arbeit noch nicht die Terminologie „zyklischer Schiefkörper“, sondern er spricht von einem Schiefkörper „*derjenigen Art, die Herr Dickson als Typus D bezeichnet*“. Wir ersehen daraus, dass die Terminologie „zyklischer Schiefkörper“ damals noch nicht allgemein üblich war; dies erklärt wohl auch, dass Artin in seinem Brief diese Terminologie noch für erklärungsbedürftig hält. Erst in seiner nächsten Arbeit [Has31a] folgt auch Hasse dieser Terminologie.

scheint es immerhin für möglich zu halten, dass es Gegenbeispiele gibt, denn er fragt Hasse danach.

Siehe dazu auch den nächsten Brief Nr. 36 vom 24. 1. 1931, insbesondere 41.2.

35.3 Der Klassenkörperbericht ist erschienen

Es handelt sich um Teil II des Hasseschen Klassenkörperberichtes [Has30a], der offenbar jetzt endlich erschienen ist, und von dem Artin einen Sonderdruck bekommen hat. In dem vorangegangenen Briefwechsel hatten wir gesehen, dass Artin an der Entstehung dieses Berichtes, der ja auf dem Artinschen Reziprozitätsgesetz fußt, regen Anteil genommen hatte. Der Bericht hat 204 Seiten und war als Ergänzungsband zum DMV-Jahresbericht erschienen. Wenn Artin von drei Teilen spricht, dann meint er die Teile I, Ia und II, die er zusammenbinden ließ. Offenbar war es damals üblich, dass die drei Teile zusammengebunden wurden; man findet solche Bücher noch heute in Bibliotheken und Antiquariaten.

An dieser Stelle erscheint es angebracht, aus einem Brief von Z. Suetuna an Hasse vom 17. 11. 1930 zu zitieren.[11] Hasse hatte auch ihm nach Hamburg einen Sonderdruck des Berichtes geschickt, und Suetuna bedankt sich nun dafür. Er fährt fort:

> „*Manchmal spreche ich mit Artin über diese Arbeit. Er freut sich auch darüber und sagt, es ist die beste Arbeit der letzten Zeit!*“

Das folgende Zitat stammt von Hecke aus späterer Zeit. In einem Brief an Hasse vom 16. 11. 1938 schreibt er:

> „*Ich habe kürzlich wieder einmal eingehend Ihren Klassenkörper–Bericht studieren müssen und bin wieder ganz von Bewunderung erfüllt, wie Sie diesen riesigen Stoff gemeistert und gestaltet haben.*“

Hecke erwähnt den „Klassenkörper-Bericht“ zwar nur ganz allgemein, aber nach Lage der Dinge handelt es sich offensichtlich um den Teil II. Denn der in den Teilen I und Ia entwickelte Aufbau der Klassenkörpertheorie war inzwischen weiter entwickelt worden, nicht zuletzt unter dem Einfluss des

[11] Zu Suetuna siehe 28.1.

Hasseschen Berichts selbst, und hatte nunmehr (1938) ein ganz neues Gesicht bekommen, zuletzt durch die Einführung des Begriffs der „Idele“ durch Chevalley [Che36]. (Übrigens stammt die Bezeichnung „Idel“ von Hasse. Vgl. das von Hasse im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik verfasste Referat der Arbeit [Che36] von Chevalley.)

36 24.01.1931, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 24. Januar 1931

Lieber Herr Hasse!

Bitte verzeihen Sie die verspätete Zusendung der Korrekturen. Ich bin nämlich während der Weihnachtsferien nicht zu den Korrekturen gekommen und war die letzte Zeit auch immer verhindert. Im übrigen ist es wirklich schlimm mit mir. Unverlässlich und unpünktlich wie immer. Sie werden es schon bereut haben, dass die Arbeit bei Ihnen erscheint.[1]

Vielen Dank auch für Ihre hochinteressanten Briefe.[2] Hoffentlich kommen Sie in der Behandlung der Fragen bald weiter. Werden Sie aber diese Dinge nicht so wie sie sind publizieren? Ich finde dass sie ein bedeutendes Interesse haben auch dann, wenn die grundlegenden Sätze noch nicht bewiesen sind. Zeigt die Arbeit doch ein ganz neues und schönes Anwendungsgebiet der Klassenkörpertheorie. [3] Leider kann ich Ihre Fragen über die Diskriminanten der Schiefkörper auch nicht beantworten. Sie erscheinen mir sehr schwierig.

Ich lege Ihnen noch die Korrektur einer kleinen Broschüre über die Gammafunktion bei, die sehr bald erscheinen wird. Man stellt nämlich an die Studenten der höheren Semester immer die Anforderung, dass sie mit der Gammafunktion vertraut sein sollen, kann ihnen aber keine Literatur nennen, in der sie die Resultate in einfacher Weise begründet finden. Die Broschüre ist also in erster Linie für die Studenten bestimmt und zwar für die Anfänger. Ich glaube, dass man darin jede wirklich wichtige Eigenschaft der Gammafunktion finden wird. Auf die Funktionentheorie bin ich dabei nicht eingegangen, da es sich dabei immer um Trivialitäten handelt. Ich möchte noch erwähnen, dass Sie sich nicht mit den Korrekturarbeiten plagen sollen,

---

[1] Schon im vorangegangenen Brief vom 27. 11. 1930 hatte Artin die Korrekturen zu seiner Führer-Arbeit geschickt, die in Crelles Journal erscheinen sollte. Wenn er jetzt noch einmal von der Korrektursendung spricht, so spiegelt das die Tatsache wider, dass damals der Autor zweimal Korrektur lesen musste (oder durfte). Beim zweiten Mal wurde geprüft, ob die ersten Korrekturen von dem Setzer ordnungsgemäß ausgeführt worden waren.

[2] Offenbar hatte Hasse seit dem letzten Artin-Brief (27.11.1930) mehrere Briefe an Artin geschickt. Entsprechendes beobachten wir auch bei anderen Briefstellen, in denen sich Artin für Hasses Briefe (im Plural) bedankt. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass Hasse seine Korrespondenzpartner fortlaufend über seine mathematischen Fortschritte und Probleme informierte, jedenfalls wenn es sich um wichtige Sachen handelte.

[3] Siehe 36.1.

denn die Korrekturen sind alle schon fertig. Die Korrekturen sind nicht alle im Exemplar vermerkt das ich Ihnen zusende, es finden sich aber keine bedeutenden Fehler mehr darin. Ich sende Ihnen die Korrektur weil ich annehme dass es Sie vielleicht interessiert und da eben sowieso eine Sendung abgeht. Ich nehme an, dass die Broschüre in der nächsten Woche erscheinen wird. Vielleicht ist es Ihnen auch angenehm, die Studenten nun auf sie verweisen zu können.[4]

Ungefähr zur gleichen Zeit wird auch der Schreier Sperner erscheinen.[5]

Von Suetuna[6] höre ich, dass Sie die Absicht haben, ein Buch über Zahlentheorie zu schreiben. Darf ich Ihnen die blaue Sammlung in Erinnerung bringen? Oder handelt es sich um das Buch für das ein Vertrag mit Springer vorliegt?[7] Ich wäre sehr froh, wenn Sie das Buch in der Hilbschen Sammlung herausbringen würden.[8]

Mit den besten Empfehlungen an Ihre Frau Gemahlin und vielen Grüssen von meiner Frau und mir

Ihr Artin

Darf ich um 150 Separata bitten?[9]

---

[4]Siehe 36.2.

[5]Siehe 36.3.

[6]Suetuna hatte Hasse in Marburg im Januar 1931 besucht um, wie er in einem Brief vom 7. 11. 1930 an Hasse geschrieben hatte, „*vor meiner Rückkehr nach Tokyo noch einmal Sie zu grüssen*“. Er trug im Marburger Kolloquium über die Resultate der gemeinsamen Arbeit mit Hasse vor [HS31]. – Zu Suetuna siehe 28.1.

[7]Es wird sich wohl um die „Zahlentheorie“ gehandelt haben, für die Hasse einen Vertrag mit dem Springer-Verlag hatte. Das Buch erschien allerdings erst viel später, im Jahre 1949 und zwar im Akademie-Verlag [Has49]. Da der Einband des Buches blaue Farbe hatte, so wurde das Buch gemeinhin als „der blaue Hasse“ bezeichnet, im Unterschied zu dem „gelben Hasse“, womit das im Springer Verlag 1950 erschienene Buch „Vorlesungen über Zahlentheorie“ bezeichnet wurde [Has50]. Erst 1980, nach der dritten Auflage, wurde der „blaue Hasse“ zu einem „gelben“, denn die englische Übersetzung erschien im Springer-Verlag (Nachdruck 2002). Zum „blauen Hasse“ siehe auch [Fre77].

[8]Artin hatte schon früher einmal Hasse um ein Buch für die sog. Hilbsche (oder blaue) Sammlung gebeten, siehe 31.3.

[9]Artin wünscht 150 Separata seiner Führer-Arbeit [Art31], die im Crelleschen Journal erscheinen soll. Im vorangegangenen Brief hatte er sich bei Hasse als dem Herausgeber nach dem Preis für zusätzliche Separata erkundigt. Damals erhielt jeder Autor des Crelleschen Journals 100 Separata frei geliefert. Artin wünscht also 50 zusätzliche Exemplare.

Kommentare zum Brief Nr.361:

36.1 Vermutungen über Algebren

Aus dem Briefwechsel von Hasse mit Emmy Noether wissen wir, dass Hasse im Dezember 1930 eine Reihe von systematischen Vermutungen für Algebren über Zahlkörpern aufgestellt hatte. Er hatte diese Vermutungen Emmy Noether mitgeteilt und sie um ihre Meinung dazu gebeten. Auch anderen Korrespondenzpartnern hatte Hasse diese Vermutungen mitgeteilt. Hier sehen wir, dass er auch an Artin eine Version davon geschickt hatte. Insbesondere fand sich darunter die Vermutung, dass jede einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist[10]; hierüber hatte er ja schon früher Artins Meinung eingeholt; siehe 35.2.[11]

Was Emmy Noether betrifft, so reagierte sie auf die Hasseschen Vermutungen zunächst negativ und glaubte, Gegenbeispiele gefunden zu haben. Sie bemerkte jedoch bald, dass sie sich dabei geirrt hatte und wurde von da an zu einer eifrigen Verfechterin der Hasseschen Vermutungen, die dann in der gemeinsamen Arbeit von Brauer, Hasse und Noether ein Jahr später bestätigt wurden. Vgl. dazu [Roq05b], [LR06].

Artin gibt, wie wir hier sehen, keine Stellungnahmen zu den Einzelheiten dieser Vermutungen; zur Frage der Zyklizität hatte er ja schon im vorangegangenen Brief seine Meinung geäußert. Er findet die Vermutungen aber „hochinteressant“ und „von bedeutendem Interesse“, und er empfiehlt die Publikation, auch wenn die grundlegenden Sätze noch nicht bewiesen seien. Wir werden dabei an Artins eigene Haltung anläßlich des von ihm

[10] In der Literatur, z.Bsp. in [Fei79], wird gelegentlich behauptet, dies sei eine alte Vermutung von Dickson. Wir haben jedoch in den Dicksonschen Arbeiten keine Stelle gefunden, in der diese Vermutung explizit oder implizit geäußert wurde. Natürlich wäre es möglich, dass Dickson gelegentlich einmal diese Vermutung mündlich geäußert hatte, aber wir haben dafür keine Bestätigung bekommen können. Aufgrund des Briefwechsels Hasse–Noether und Artin–Hasse wissen wir jedenfalls, dass Hasse diese Vermutung im Dezember 1930 explizit formuliert hat, gemeinsam mit anderen Vermutungen, die damit eng zusammenhängen. Aufgrund des Briefwechsels von Hasse mit Albert im Jahr 1931 erscheint es nicht unwahrscheinlich, dass Albert von dieser Vermutung durch Hasse gehört hatte; möglicherweise hat Albert dann Dickson darüber berichtet. Siehe dazu [Roq05b], [LR06].

[11] In einem kürzlich erschienenen Artikel [FS07] wird gesagt, Hasse habe diese seine Vermutung „*revealed within the safe confines of a letter to Emil Artin* ...“. Uns scheint, dass solch eine Aussage die Rolle des Briefschreibens bei Hasse gründlich verkennt. Wenn Hasse Briefe schrieb, dann wünschte er seine Ideen der mathematischen Öffentlichkeit weiterzugeben und zu verbreiten und nicht in einem „safe confine“ zu verbergen.

konzipierten Reziprozitätsgesetzes erinnert; damals, im Jahre 1923 in seiner L-Reihenarbeit, hatte er keine Bedenken gehabt, das Reziprozitätsgesetz als heuristisches Prinzip ohne vollständigen Beweis in seine Arbeit aufzunehmen. Siehe 5.6. Es hatte damals drei Jahre gedauert, bis er den Beweis nachholen konnte; siehe Brief Nr. 8.

Möglicherweise hat Hasse diese Empfehlung Artins zum Anlass genommen, seine Arbeit über die Struktur der zyklischen Algebren niederzuschreiben, die dann in den Transactions of the American Mathematical Society erschien [Has32b]. Wenn dann der Hauptsatz über die Zyklizität später bewiesen sein würde (was ja Hasse und Artin angenommen haben), dann würde diese amerikanische Arbeit ihre Bedeutung als eine vollständige arithmetische Theorie der einfachen Algebren über Zahlkörpern erhalten.[12] Jedenfalls wissen wir aus anderen Quellen, dass Hasse seine amerikanische Arbeit zwischen dem 6. März und dem 29. Mai 1931 aufgeschrieben hat, also einige Wochen nach dem vorliegenden Brief von Artin.

36.2 Die Gammafunktion

Die Artinsche Broschüre über die Gammafunktion erschien im Rahmen der „Hamburger mathematischen Einzelschriften“. Wie Artin in diesem Brief erläutert, war sie als Einführung für Studenten gedacht. Die Gammafunktion wird als reelle Funktion durch die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ definiert, zusammen mit der Forderung, dass sie logarithmisch konvex sein soll und der Normierungsbedingung $\Gamma(1) = 1$ genügt. Diese Charakterisierung war damals zwar nicht neu; Artin hatte sie von einer Vorlesungsausarbeitung aus Kopenhagen übernommen, die unter dem Namen „Bohr-Mollerup“ bekannt war. Neu war jedoch die wirklich elementare Darstellung, welche die Gammafunktion auch Anfängerstudenten zugänglich machte. In der Besprechung im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ heißt es:

> „*Die vorliegende Schrift bildet einen durchaus elementaren Zugang zur Γ-Funktion und füllt daher fraglos eine Lücke in der deutschen mathematischen Literatur aus. Durch die zugrundegelegte Charakterisierung gewinnt die Theorie in erstaunlichem Maße an Einfachheit und Durchsichtigkeit.*“

Die Broschüre verbreitete sich schnell, und die Artinsche Darstellung wurde im Laufe der Zeit zur Standard Methode in den mathematischen Anfänger-

[12] In der Tat gelang es Hasse gemeinsam mit Emmy Noether und Richard Brauer noch in diesem Jahr, den Zyklizitätssatz zu beweisen; siehe 40.1.

vorlesungen über Analysis. Noch im Jahre 1964, nach Artins Tod, erschien eine englische Übersetzung.

36.3 Schreier-Sperner

Das Anfänger-Lehrbuch „Schreier-Sperner“ [SS31] entstand aus Vorlesungen, die Otto Schreier als Privatdozent in Hamburg gehalten hatte. Es hatte den Titel „Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra“ und erschien, wie die Artinsche „Γ-Funktion“, in der Serie „Hamburger mathematische Einzelschriften“. Durch Betonung der Algebra, genauer der *linearen* Algebra über einem *beliebigen* Körper, unterschied es sich inhaltlich wesentlich von den damals in Deutschland üblichen Vorlesungsinhalten, in denen die sogenannte Analytische Geometrie gelehrt wurde. (Letztere bestand traditionsgemäß aus der Lehre von den Geraden, Ebenen und Quadriken im 2- und 3-dimensionalen euklidischen, affinen oder projektiven Raum über $\mathbb{R}$, vornehmlich zur Ausbildung der Gymnasiallehrer.) Schreier selbst konnte sein Buch nicht mehr vollenden; er starb 1929. Es gab jedoch eine Vorlesungsausarbeitung, die von Schreiers Schüler Sperner herausgegeben und ergänzt wurde. Im selben Jahr 1931 erschien eine ebenfalls auf Vorlesungen Schreiers basierende Broschüre „Vorlesungen über Matrizen“, die einige Jahre später ergänzt und als Band 2 der „Einführung in die analytische Geometrie und Algebra“ herausgegeben wurde.

Der „Schreier-Sperner“, der in mehreren Auflagen, auch in englischer Übersetzung, erschien (später in bearbeiteter Form als „Sperner“ unter Weglassung des Namens von Schreier), trug wesentlich dazu bei, den Inhalt der Anfängervorlesungen an den Universitäten zu reformieren, indem die abstrakte lineare Algebra statt der Geometrie in den Vordergrund gestellt wurde – so wie es heute üblich ist.

Wie aus den früheren Briefen von Artin hervorgeht[13], hatte Artin engen wissenschaftlichen Kontakt mit Otto Schreier, der wie Artin aus Österreich stammte. Wir können davon ausgehen, dass Artin an dem Konzept Schreiers zur Reform des Anfängerunterrichts regen Anteil genommen und auch selbst wesentliche Ideen beigesteuert hatte. Darauf weist auch die Tatsache hin, dass Artin das Erscheinen des „Schreier-Sperner“ hier in seinem Brief besonders erwähnt.

[13] Vgl. die Briefe vom 5. 8., 29. 11. und 22. 11. 1928.

37 06.05.1931, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 6. Mai 1931

Lieber Herr Hasse!

Ich danke Ihnen für Ihren lieben Brief mit der Einladung, nach Pfingsten nach Marburg zu kommen. Da möchte ich zunächst fragen, ob sich die Sache nicht am Ende der Pfingstwoche machen lässt? Dass ich etwa am Sonnabend nach Pfingsten hinkomme. Mein Kolleg fängt erst am Dienstag wieder an, so dass sich vielleicht am Montag auch Zeit für einen Vortrag finden liesse. Eventuell könnte ich auch Dienstag hier noch ausfallen lassen, wenn ich auch lieber keine Stunde verlieren möchte.

Eine weitere Frage ist die, was soll ich Ihnen denn erzählen? Ich habe absolut nichts Neues! Das hätte ich Ihnen ja schon geschrieben. Was meinen Sie also?

Eine Kleinigkeit möchte ich Ihnen noch erzählen die mich sehr erstaunt hat, mit der ich aber bis jetzt weiter nichts anfangen kann. Es gibt relativ unverzweigte Ikosaederkörper und zwar sind sie sogar sehr häufig unverzweigt. Ich kenne diesen Umstand schon seit Ende des vorigen Semesters und habe auch sehr viel numerisch gerechnet, bin aber auf keinen Anhaltspunkt für die Zerlegungsgesetze gekommen. Das Beispiel ist das folgende:[1]

Die Gleichung 5-ten Grades $x^5 = x + 1$ hat keinen Affekt. Der zugehörige galois'sche Körper K über R vom Grade 120 ist nun *unverzweigt* in bezug auf den darin enthaltenen quadratischen Unterkörper $\Omega = R(\sqrt{2869})$ und die Gruppe natürlich die Ikosaedergruppe. Legt man also den quadratischen Körper als Grundkörper zugrunde, so sind die Führer alle $= 1$, es werden also in den Zerlegungsgesetzen vermutlich keine Kongruenzen auftreten. Damit ist eine kleine Vereinfachung für das Aufsuchen der Gesetze gegeben, die man vielleicht ausnützen kann.

An zahlentheoretischen Daten die bei diesem Körper interessieren könnten, kann ich Ihnen noch folgendes mitteilen: Der quadratische Körper hat die Klassenzahl 1. Wegen der unendlichen Primstellen gibt es aber noch den einen relativ quadratischen Klassenkörper $\Omega(\sqrt{-19})$, da $2869 = 19 \cdot 151$ ist. Der so entstehende Körper hat die Klassenzahl 7, es gibt also ausser dem Ikosaederkörper noch einen relativ unverzweigten Körper vom Grade 14 über dem quadratischen.

[1] Siehe 37.1

Sei ferner k der Körper 5-ten Grades über R. Seine Diskriminante ist 2869, seine Minimalbasis besteht aus den Potenzen der Gleichungswurzel. Die Klassenzahl dieses Körpers ist auch 1. Seine Grundeinheiten sind die Gleichungswurzel x und $1 - x^2$.

Endlich habe ich noch die Primzahlen bis 311 im Körper k in Primideale zerlegt, womit ihre Zerlegung auch im Körper K gewonnen ist. Ich hatte die Hoffnung, dass man nach Erraten eines Zerlegungsgesetzes hier eine numerische Prüfung haben würde. Leider ist mir aber nichts eingefallen.

Dass es überhaupt einen unverzweigten, nicht metazyklischen Körper gibt, hätte ich vorher nicht geglaubt. Vielleicht können Sie etwas mit diesen Dingen anfangen.

Dass ich gerne am Ende der Pfingstwoche hinkommen würde hat seinen Grund darin, dass wir in der Pfingstwoche gerne eine Wanderung unternehmen wollen und dabei vermutlich in Ihre Gegend gelangen werden.

Mit den besten Grüssen auch von meiner Frau und an Ihre Frau Gemahlin

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr.37:

37.1 Ikosaederkörper

Artin sagt, dass die Gleichung $x^5 = x+1$ „keinen Affekt“ habe. Das bedeutet, dass die Galoisgruppe die volle symmetrische Gruppe ist. Diese Tatsache war seit langem bekannt, handelt es sich doch um das einfachste Beispiel einer Gleichung, die nicht durch Radikale auflösbar ist. Auch dass die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung im galoisschen Körper K enthalten ist, zählt zu den damals wohlbekannten Tatsachen aus der klassischen Galoistheorie.[2] Da die Diskriminante $2869 = 19 \cdot 151$ quadratfrei ist, so ist K über $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{2869})$ *unverzweigt*. Hierin ist die eigentliche Entdeckung Artins zu sehen.

Bislang hatte man in diesem Zusammenhang wohl nicht daran gedacht, diesen Körper auf sein Verzweigungsverhalten zu untersuchen, sonst wäre wohl die Unverzweigheit schon früher bemerkt worden, denn sie folgt ja in einfacher Weise aus der Hilbertschen Verzweigungstheorie im Hinblick auf die Struktur der symmetrischen Gruppe S_5. Das hat z. Bsp. Arnold Scholz im Jahre 1934 bei der Lösung einer von van der Waerden gestellten Aufgabe nachgewiesen [Sch34]. Scholz zeigt, dass ein über $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom von Primzahlgrad, dessen Diskriminante quadratfrei ist, stets die symmetrische Gruppe besitzt, und dass sein Galoiskörper unverzweigt über dem quadratischen Teilkörper ist. Zwar erwähnt Scholz die Unverzweigheit nicht explizit; ihm kommt es gemäß der Aufgabenstellung nur auf die symmetrische Gruppe an. Sein Beweis dafür beruht jedoch darauf, dass die Trägheitsgruppe eines Diskriminanten-Primteilers durch eine Involution erzeugt wird, und das ergibt unmittelbar die Unverzweigtheit über dem quadratischen Teilkörper.[3] Übrigens: van der Waerden stand ja mit Artin in engem Kontakt, insbesondere bei der Niederschrift seines Buches „Moderne Algebra“, das weitgehend auf Vorlesungen von Artin beruhte. Im Abschnitt über Galoistheorie kommt auch $x^5 = x + 1$ vor, als Beispiel für eine affektlose Gleichung. Hat vielleicht van der Waerden die oben erwähnte Aufgabe, die u.a. von Scholz gelöst wurde, auf Anregung von Artin in den Jahresbericht DMV gestellt?

Interessant ist auch, dass Artin (wie er schreibt) vorher nicht geglaubt

[2] Das wird z.Bsp. in Webers Lehrbuch der Algebra [Web98] ausführlich behandelt. Artin hat dieses Buch natürlich sehr gut gekannt.

[3] Wir danken F. Lemmermeyer für den Hinweis auf Scholz [Sch34] in diesem Zusammenhang, und ebenfalls auf Nakagawa [Nak88], wo dasselbe für beliebig vorgegebenen Polynomgrad n, nicht notwendig Primzahl, gezeigt wird.

hätte, dass es eine unverzweigte nicht metazyklische galoissche Körpererweiterung gibt. Er hatte also angenommen, dass die Klassenkörper und deren Iterierte bereits alle unverzweigten Körper umfassen. Einen Grund für diese Annahme nennt er dafür nicht. Es scheint also tatsächlich, was wir schon oben sagten, dass man vorher wohl nicht daran gedacht hatte, auch Artin nicht, die *Verzweigungsstruktur* der Gleichung $x^5 = x + 1$ oder anderer Gleichungen ohne Affekt zu untersuchen. Artin erwähnt noch, offenbar aufgrund numerischer Rechnungen, dass die unverzweigten Ikosaederkörper „sehr häufig" sind. Er gibt jedoch keine weiteren Beispiele. Glaubte Artin, dass die über quadratischen Körpern unverzweigten Ikosaederkörper in einem geeigneten Sinne eine positive Dichte besitzen? Das kann wohl mit Sicherheit angenommen werden, denn die Häufigkeit solcher Gleichungen wurde in der damaligen Zeit ausführlich diskutiert.

Die Motivation Artins für die Untersuchung des galoisschen Körpers von $x^5 = x + 1$ erfährt man aus einer späteren Briefstelle, nämlich die Hoffnung, das *Zerlegungsgesetz* für Primzahlen in dem Galois-Körper Ω zu „*erraten*". Die Unverzweigtheit, meint Artin, sollte dazu führen, dass in den Zerlegungsgesetzen „*vermutlich keine Kongruenzen*" auftreten werden. Wahrscheinlich denkt er dabei an den Hilbertschen Klassenkörper, bei dem es nur auf die gewöhnliche Idealklassengruppe ankommt, in deren Definition also nicht (wie bei Strahlklassengruppen) Kongruenzen eine Rolle spielen. Es erstaunt uns heute nicht mehr, dass Artin dazu „*nichts eingefallen*" ist, wie er schreibt. Die, wie wir heute wissen, vergebliche Suche nach algebraisch formulierbaren Zerlegungsgesetzen in nicht-abelschen Körpern, also die Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie, dominierte in diesen Jahren mehr und mehr die Arbeiten von Artin, Hasse und Emmy Noether.

Noch in späteren Jahren ist Artin in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie gerne auf das Beispiel des Ikosaederkörpers $x^5 = x + 1$ als *unverzweigte, nicht auflösbare* Erweiterung eines quadratischen Körpers zurückgekommen; das geht vielleicht auf die Überraschung zurück, die er bei der Auffindung dieses Beispiels erfahren hat, wie er es in diesem Brief zum Ausdruck bringt – er hatte ja bis dahin nicht geglaubt, dass es einen unverzweigten, nicht metazyklischen Körper gibt. Artin ist jedoch niemals in einer Publikation auf die damit zusammenhängenden Fragen eingegangen. Ungeachtet dessen hat er sich aber auch weiterhin Gedanken über unverzweigte, nicht metazyklische Zahlkörper gemacht. Wir entnehmen das einer späteren Eintragung im Hasseschen Tagebuch, datiert im Februar 1934 unter Bezugnahme auf Artin.[4]

[4]Wir hatten diese Tagebuchstelle schon im Zusammenhang mit dem Klassenkörperturm-Problem in 15.1.3 erwähnt.

Dort werden unverzweigte Zahlkörper-Erweiterungen mit *beliebig vorgegebener Galoisgruppe* G konstruiert. Diese Konstruktion ist nicht schwierig, weil der Grundkörper nicht festgelegt ist. Denn wenn $K|k$ ein (evtl. verzweigter) galoisscher Körper mit der Gruppe G ist, dann erhält man nach geeigneter Grundkörper-Erweiterung $\overline{k}|k$ einen *unverzweigten* Körper $K\overline{k}|\overline{k}$ mit derselben Galoisgruppe G.

38 16.06.1931, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 16. Juni 1931

Lieber Herr Hasse!

Ich habe Ihnen bis heute noch nicht geschrieben, da ich erst die Abzüge von den Bildern fertig machen wollte. Ich lege Sie Ihnen heute bei. Sie sind doch ganz nett geworden.[1] Dass die meinigen, die Sie gemacht haben nicht so besonders geworden sind, ist nicht Ihre Schuld sondern die meine, da ich fast immer auf Photographien ein dummes Gesicht zu machen pflege. Übrigens haben Sie sich revanchiert, denn die Bilder die wir von Ihnen gemacht haben, sind leider auch nichts geworden. Teils verwackelt, teils unscharf und eins unterbelichtet (die Zimmeraufnahme).

Ich muss Ihnen noch vielmals für die freundliche Aufnahme in Ihrem Kreis danken. Sowohl ich wie meine Frau denken mit grossem Vergnügen an die Marburger Tage zurück. Vom Seminar in Marburg wurden mir noch 50 Mark überwiesen. Das wäre doch nicht nötig gewesen, wo Sie doch in so rührender Weise um uns besorgt waren.[2]

Nun zu Ihren Fragen.[3]

1) Sei $\mathfrak{o}$ die Maximalordnung von k, $\mathfrak{O}$ irgend eine von K. Man bilde $\mathfrak{o}\mathfrak{O}$. Das ist ein Rechtsideal in $\mathfrak{O}$. Multipliziert man es mit $\mathfrak{o}$, so erhält man bei Multiplikation von links wieder $\mathfrak{o}\mathfrak{O}$. Also liegt $\mathfrak{o}$ in der Linksordnung von unserem Ideal, diese Linksordnung enthält also $\mathfrak{o}$ eingebettet.

2) Ist in Ordnung.

3) Ist unrichtig; es seien i, j, k, die gewöhnlichen Quaternioneneinheiten. Man setze $a = \dfrac{i+2j+2k}{3}$. Dann ist $a^2 = -1$. Also ist der Körper $R(i)$ mit $R(a)$ isomorph. Die Maximalordnung dieses Körpers ist aber zum Beispiel nicht in die gewöhnliche eingebettet.

---

[1] Dies bezieht sich auf den Besuch Artins in Marburg am Wochenende nach Pfingsten, wie er im vorangegangenen Brief Nr. 37 vom 6. 5. 1931 avisiert war. Zu den Fotos siehe Fußnote 7.

[2] Wir wissen nicht, worüber Artin im Marburger Kolloquium gesprochen hat. Möglicherweise über die unverzweigten Ikosaederkörper, die er im vorangegangenen Brief erwähnt hatte.

[3] Vgl. 38.1.

Was den Beweis von Siegel betrifft[4], so glaube ich dass er in Ordnung ist. Ich kann zwar im Augenblick den betreffenden Satz auch nicht beweisen, es ist aber ungefähr das, dass einer indefiniten quadratischen Form eine definite mit gleicher Diskriminante zugeordnet wird. Ich will mich bemühen, den Zusammenhang herauszubekommen, ich glaube, dass man das Ganze überhaupt einfacher machen kann. Die zweite Stelle kann ich Ihnen beantworten. Wenn ein Produkt positiver Zahlen grösser als eins ist, so ist ihr geometrisches Mittel grösser als eins, ihr arithmetisches Mittel also erst recht. Also ist ihre Summe grösser als n.

Ich glaube überhaupt nicht, dass bei den heutigen Mitteln von Minkowski dieser Satz sehr tief liegt. Die wirkliche Schwierigkeit fängt erst bei der Relativdiskriminante an, und das ist doch das was Sie brauchen. Was können Sie denn aus diesem Satze folgern?

Seit ich wieder zurück bin, habe ich mich sehr oft mit Herbrand unterhalten. Das ist ein Mensch der unglaublich viel weiss und kann. Er hat uns hier einen Vortrag gehalten, über Grundlagen, wir waren alle begeistert. Schade dass er schon wieder abgereist ist.[5]

Begeistert bin ich über die neuen ungeheuren Vereinfachungen der Klassenkörpertheorie, die von Herbrand und Chevalley stammen. Man braucht jetzt so gut wie gar keine schlimmen Rechnungen mehr, auch keine trinomischen Gleichungen wie F.K. Schmidt. Da ich an einigen kleinen Punkten auch beteiligt bin, möchte ich Ihnen ganz kurz darüber schreiben.[6]

I. Analytischer Teil. Anders als gewöhnlich, aber nicht mit Frobenius sondern einfacher.

Sei K/k Körper vom Grade n, H eine Klassengruppe mod $\mathfrak{m}$ aus k, die alle Relativnormen der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K enthält. Bilden Sie das Produkt der zu H gehörigen L-Reihen. Es erscheint eine e-Potenz und im Exponenten die bekannte Summe über alle Primidealpotenzen der Hauptklasse H. Wenn nun ein Primideal aus k in K (braucht nicht galoissch zu sein) m Primteiler ersten Grades hat, so liegt es für $m > 0$ als Norm in H und da $m \leq n$ ist, ist der Exponent grösser als die Summe $\frac{h}{n} \sum \frac{m}{\nu \mathcal{N} \mathfrak{p}^{\nu s}}$. Also

$$\sum_{\mathfrak{p}^\nu \in H} \frac{h}{\nu \mathcal{N} \mathfrak{p}^{\nu s}} \geq \frac{h}{n} \sum \frac{m}{\nu \mathcal{N} \mathfrak{p}^{\nu s}} .$$

Da die rechte Seite bei $s = 1$ divergiert, so auch die linke, so dass das

[4] Vgl. 38.2.

[5] Herbrand war nach Göttingen zu Emmy Noether abgereist. – Zu Herbrand siehe 39.3.

[6] Siehe 38.3.

L-Reihenprodukt bei $s = 1$ nicht regulär sein kann, also keine L-Reihe verschwindet. Bitte! Sie brauchen dazu nicht die Fortsetzbarkeit, sondern nur die Regularität bei $s = 1$ und das ist die übliche Annahme der Klassenkörpertheorie. Also gilt für H der Satz von der arithmetischen Progression mit der üblichen Dichtigkeit. Aus unserer Ungleichung folgt, da die rechte Seite mindestens die Dichtigkeit $\frac{1}{n}$ hat, dass $h \leq n$. Das gilt alles, wenn nur H alle Idealnormen von K enthält.

Sei nun K Klassenkörper. Also $n = h$. Dann lesen Sie aus unserer Ungleichung sofort den Satz ab: Diejenigen Primideale aus H, die in K nicht *vollständig* zerfallen, haben die Dichtigkeit 0. Nun beweisen wir:

Satz. Ist K und K' Klassenkörper über H und H', so ist KK' auch Klassenkörper über dem Durchschnitt H'' von H und H'.

Zunächst fallen alle Idealnormen nach H''. Also gilt für H'' der Satz von der arithmetischen Progression. Insbesondere haben die Primideale aus H'' die Dichtigkeit $\frac{1}{h''}$, wenn h'' den Index von H'' bezeichnet. Da sie alle in H liegen, zerfallen fast alle in K und von diesen, da sie in H' liegen, fast alle in K'. Die in KK' zerfallenden haben also die Dichtigkeit $\frac{1}{h''}$. Andrerseits direkt $\frac{1}{n''}$. Also ist Index gleich Grad und alles ist bewiesen.

Daraus folgt in trivialer Weise Ihr Satz dass K galois'sch ist, der Schachtelsatz und der Eindeutigkeitssatz.

II. Reduktionen:

1) Der Umkehrsatz U braucht nur für cyklische Körper bewiesen werden. Da dafür einfache und direkte Beweise vorliegen, ist er vom Existenzsatz unabhängig geworden. In den Umkehrsatz nehme man dabei die Aussage auf, dass im Führer nur Diskrimantenteiler vorkommen.

2) Unter E verstehe ich den Existenzsatz und den speziellen Zerlegungssatz (für Primteiler aus H) und den Isomorphiesatz. Ferner die Aussage, dass in der Diskriminante nur die Ideale des Führers aufgehen. Dann reduziert sich, wie in Ihrem Bericht, die Aussage auf den Primzahlgrad mit Einheitswurzel im Grundkörper. Jetzt sind alle Reduktionen besonders einfach, da das Zerlegungsgesetz immer mit in die Induktion aufgenommen wird. Auch das Herauswerfen der Einheitswurzel ist jetzt ganz trivial, auch ohne Hinzunahme von Frobenius. Vom Führer braucht nicht gesprochen zu werden.

Es bleibt also U im cyklischen Fall und E im Fall Primzahlgrad mit Einheitswurzel noch zu zeigen. U reduziert sich wie gewöhnlich auf die Bestimmung des Normenrestindex und des Einheitenhauptgeschlechts.

Diese beiden Indizes lassen sich unter Zuhilfenahme eines gruppentheoretischen sehr einfachen Hilfssatzes sozusagen in zwei Zeilen beweisen.

Aber gestatten Sie mir dass ich für heute schliesse. Ich muss noch zur Post, damit dieser Brief wegkommt. Den restlichen Teil schreibe ich Ihnen das nächste Mal, wenn es Ihnen Lust macht. Ich weiss aber nur nicht ob Sie sich in diesem sehr kurzen und summarischen Bericht zurechtfinden.

Und nun die herzlichsten Grüsse auch an Ihre Frau und auch von der meinen,

Ihr Artin

Hoffentlich machen Ihnen die Bilder Spaß.[7] Die Gruppenaufnahme ist ja etwas mißglückt, aber da sie sowieso nicht gut ist wird es Sie hoffentlich nicht stören. Könnten Sie bitte so nett sein und mir den Namen des russischen Professors in Prag, nach dem ich mich für Prof. Hensel erkundigen sollte, schreiben? Das wäre furchtbar nett.[8]

Mit den besten Grüßen auch an Ihre Frau und Jutta[9]

N. Artin

[7]Die folgenden Zeilen sind nicht in Artins Handschrift geschrieben. Sie sind von „N. Artin" unterzeichnet, also von Artins Frau Natascha Artin. Sie galt als gute Fotografin. Bei den Bildern, die sie erwähnt, handelt es sich um Fotos, die von ihr auf der Zusammenkunft in Marburg am Wochenende nach Pfingsten 1931 aufgenommen worden waren. Höchstwahrscheinlich hat sie bei dieser Gelegenheit auch das Foto von Artin und Hasse aufgenommen, das wir auf der gegenüberliegenden Seite zeigen. (Auf der Rückseite des Originals steht in Hasses Handschrift: „*In den dreißiger Jahren*".) Das „Henselbild", das Artin im nächsten Brief erwähnt, ist eine Porträtaufnahme, die Hasse so gelungen fand, dass er sie für den Hensel-Festband des Crelleschen Journals verwenden wollte, was Artin ja auch im nächsten Brief gestattet. Dieser Band (Nr. 167) erschien aus Anlass des 70. Geburtstages von Hensel am 29. Dezember 1931. Die „Gruppenaufnahme", von der Natascha Artin spricht, ist wohl diejenige, die bei Yandell [Yan02] auf Seite 218 gezeigt wird. Darauf sieht man Natascha Artin mit den Familien Hasse und Hensel in Hensels Garten. (Da Natascha, aber nicht Emil Artin auf dem Foto zu sehen ist, wird jenes Bild wohl von Emil Artin aufgenommen worden sein.)

[8] Frau Artin stammte aus Russland, und wahrscheinlich war es dieser Umstand, der Hensel veranlasst hatte, sich bei ihr nach einem russischen Kollegen zu erkundigen.

[9] Die Tochter von Hasse war damals 3 Jahre alt.



Abbildung 6: Artin und Hasse: 1932

(Privatbesitz)

Kommentare zum Brief Nr.38:

38.1 Maximalordnungen

Hasses Fragen 1)-3) sind uns nicht bekannt, aber aus Artins Ausführungen kann man entnehmen, worum es sich handelt, nämlich um Maximalordnungen in einfachen Algebren. Zu der damaligen Zeit arbeitete Hasse intensiv an der Algebrentheorie mit dem Ziel, seine diversen Vermutungen zu beweisen, die er ja kürzlich auch Artin mitgeteilt hatte. (Siehe 36.1.) In der Zeit vom 26. Februar bis 1. März 1931 hatte in Marburg eine Tagung über Schiefkörper stattgefunden, in welcher über die Hasseschen Vermutungen gesprochen wurde.[10] Zu dieser Tagung, die Hasse gemeinsam mit Emmy Noether organisiert hatte, war natürlich auch Artin eingeladen worden; er hatte aber nicht teilgenommen. Wir können vielleicht annehmen, dass Hasse die Pfingsteinladung an Artin hauptsächlich deswegen ausgesprochen hatte, um ihm über die Ergebnisse der Tagung zu berichten, und um überhaupt über Möglichkeiten der Weiterarbeit an den anstehenden Vermutungen zu sprechen.

Das Interesse Hasses an den Maximalordnungen erklärt sich aus seiner damaligen Idee, das Lokal-Global Prinzip für Algebren auf die Berechnung der Diskriminante zu stützen: es war zu zeigen, dass eine überall unverzweigte einfache Algebra zerfällt. Ein Weg dazu war vielleicht, den Zusammenhang von Maximalordnungen der Algebra mit den Maximalordnungen der kommutativen Teilkörper genauer zu untersuchen. Dies war sicherlich eine interessante Aufgabe auch unabhängig von der möglichen Anwendung auf den Beweis des Lokal-Global-Prinzips.

In Hasses Tagebuch haben wir unter dem Datum „Mai 1931“ eine Eintragung gefunden mit dem Titel:

> *Maximalordnungen in einfachen Algebren und deren maximalen Teilkörpern. Im Anschluss an Unterhaltungen mit Artin.*

Offenbar sind damit die Unterhaltungen gemeint, die Hasse mit Artin anläßlich seines Besuches in Marburg am Wochenende des 30. Mai geführt hatte. In der Tagebuch-Eintragung finden wir den folgenden Satz 1.

K bedeutet dabei eine einfache Algebra über einem algebraischen Zahlkörper Ω als Zentrum (dieser Grundkörper wird bei Artin nicht besonders erwähnt). k bedeutet einen maximalen Teilkörper von K. Mit $\mathfrak{o}$ wird die Maximalordnung von k bezeichnet.

---

[10] Siehe [Roq05b].

Satz 1. *Es gibt Maximalordnungen $\mathfrak{O}$ von K, die $\mathfrak{o}$ enthalten.*

Hasse schreibt dazu: „*Satz von Artin, Beweis von einem seiner Schüler*“.[11] Und der Beweis im Hasseschen Tagebuch stimmt überein mit dem Beweis, den Artin in seinem Brief unter Punkt 1) mitteilt. Der Beweis ist sehr einfach und beruht auf der von Artin [Art28c] und dann auch von Hasse [Has31b] entwickelten arithmetischen Theorie der Maximalordnungen.[12] Insbesondere wird benutzt, dass für ein Rechtsideal einer Maximalordnung $\mathfrak{O}$ die zugehörige Linksordnung ebenfalls maximal ist – das war ja der Ausgangspunkt für die Konstruktion des Brandtschen Gruppoids einer Algebra.

Als unmittelbare Folge aus Satz 1 ergibt sich $\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap k$. Dies wird von Hasse in seinem Tagebuch als „Satz 2“ bezeichnet. War dies die Frage von Hasse, die Artin unter Punkt 2) mit „*ist in Ordnung*“ quittiert?

Bei Punkt 3) hatte Hasse, wie es scheint, danach gefragt, ob $\mathfrak{o}$ vielleicht in *jeder* Maximalordnung enthalten ist. Denn Artin zeigt unter Punkt 3) ein Gegenbeispiel hierzu auf, und zwar im Schiefkörper der gewöhnlichen Quaternionen über $\mathbb{Q}$. Unter der „gewöhnlichen“ Maximalordnung des Quaternionenschiefkörpers versteht er die von $1, i, j, k$ und $\frac{1}{2}(1+i+j+k)$ erzeugte Ordnung, die wohl zuerst von Hurwitz [Hur96] betrachtet worden war. Diese Untersuchung von Hurwitz bildete den Ausgangspunkt für die Entwicklung der Theorie der Maximalordnungen von Algebren, die von Hurwitz’ Schüler Du Pasquier begonnen, von Dickson weiter ausgearbeitet und dann von Speiser, Brandt, Artin, Hasse im Rahmen der Idealtheorie vollendet worden war.[13]

Die Hasseschen Aufzeichnungen in seinem Tagebuch gehen jedoch weiter. Es werden die Rechtsideale von $\mathfrak{O}$ untersucht, die von den Idealen $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ erzeugt werden, die also die Form $\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ besitzen; allgemeiner die Ideale der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ wobei $\mathfrak{A}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{O}$ bedeutet. Es wird gezeigt, *erstens* dass $\mathfrak{o}$ nicht nur in der Rechtsordnung $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ enthalten ist, sondern auch in der Linksordnung von $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$. Davon wird *zweitens* auch die Umkehrung bewiesen: Jedes $\mathfrak{O}$-Rechtsideal, dessen Linksordnung ebenfalls $\mathfrak{o}$ enthält, besitzt die Form $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ wie oben – vorausgesetzt, dass das gegebene Ideal prim zur Differente von $\mathfrak{O}$ ist.

Zu diesem Satz findet sich am Schluss der Tagebucheintragung der offen-

[11] Offenbar konnte sich Hasse bei der Niederschrift dieser Tagebucheintragung nicht mehr an den Namen dieses Schülers erinnern. Möglicherweise handelte es sich um Claude Chevalley; siehe unten.

[12] Vgl. dazu 35.2.

[13] Hierzu siehe [Fre07].

bar später von Hasse hinzugefügte Vermerk:

> *Chevalley hat einen anderen Beweis für diesen Satz gegeben und überdies gezeigt, dass der Satz nicht mehr allgemein gilt, wenn die Einschränkung „prim zur Differente von $\mathfrak{O}$“ aufgehoben wird.*

Dabei verweist Hasse auf einen Brief von Chevalley vom Januar 1932.

In der Tat gibt es einen Brief von Chevalley an Hasse, datiert am 31. Dezember 1931. Er hätte von Emmy Noether gehört, dass Hasse sich mit der Beziehung zwischen den $\mathfrak{o}$-Idealen in k und den $\mathfrak{O}$-Idealen in K beschäftige. Und er sagt weiter:

> *A ce propos, et sur les conseils de Monsieur Artin j'ai examiné la question des idéaux à droite de l'ordre maximum dont l'ordre gauche contient l'ordre commutatif. Je ne suis arrivé qu'à des résultats négatifs. Je voulais démontrer que les idéaux en question sont de la forme $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau commutatif et $\mathfrak{A}$ un idéal bilatère. Mais ce théorème est faux en général. On peut facilement donner des exemples en construisant le « Verschränkte Produkt »...*

In einem darauffolgenden Brief vom 17. Januar 1932 schreibt Chevalley, offenbar auf Hasses Anfrage nach Einzelheiten:

> *Naturellement, je me sers dans ma démonstration de votre théorie des algèbres $\mathfrak{p}$-adiques. Mais je ne fais pas de la même manière que vous.*

Und dann gibt er eine ausführliche Darstellung seiner Überlegungen.

Im Wintersemester 1931/32 war Chevalley als junger Rockefeller-Stipendiat bei Artin in Hamburg. Er hat seine Resultate, die er im Brief an Hasse darstellte, dann in den Hamburger Abhandlungen publiziert [Che34]. Wir sehen, dass die Probleme aus der Pfingst-Unterhaltung von Artin und Hasse in Marburg nicht nur von Hasse, sondern auch von Artin und seinen Schülern weiter verfolgt wurden.

Hasse hat übrigens seine Version dann ebenfalls publiziert, unter Hinweis auf Artin und Chevalley, und zwar in dem Gedenkband für Herbrand, der im August 1931 als Bergsteiger tödlich verunglückt war [Has34d]. Und auch Emmy Noether publizierte ähnliche Resultate [Noe34], sodass also im selben Jahr drei verschiedene Arbeiten zu demselben Thema erschienen. Vgl. dazu [LR06] und [Roq00].

38.2 Siegel

Es gibt eine undatierte Postkarte von Siegel an Hasse, mit Poststempel vom Juni 1931 (Tag nicht erkennbar), die folgendermaßen beginnt:

> *Lieber Herr Hasse, ich überlegte mir heute morgen auf der Heimreise noch einmal Ihre Frage wegen der Diskriminante der Schiefkörper. . .*

Demnach war also auch Siegel zu Besuch bei Hasse in Marburg gewesen, und zwar 1-2 Wochen nach Artin, und Hasse hatte ihn wegen der Diskriminante von Schiefkörpern angesprochen. Siegel stellt auf der Postkarte einen Beweis dar, dass die Diskriminante eines Schiefkörpers D, genommen über dem rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$, stets vom Betrag > 1 ist, dass also, falls $\mathbb{Q}$ das Zentrum von D ist, stets eine verzweigte Stelle vorliegt. Wäre der Beweis richtig, dann würde er das Lokal-Global-Prinzip für zentrale Schiefkörper über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ implizieren.

Siegel selbst scheint Zweifel an der Richtigkeit seines Beweises gehabt zu haben, denn am Schluss seiner Postkarte schreibt er: „*Wo liegt der Fehler?*" Wie wir sehen, hat Hasse den Siegelschen Beweis auch nicht recht akzeptiert, und er hat ihn Artin vorgelegt. Zwar meint Artin, dass der Siegelsche Beweis in Ordnung sei, aber er kann ihn im Augenblick auch nicht nachvollziehen. Er begründet seine Ansicht damit, dass die Methoden von Minkowski, an die Siegel in seinem Beweis anschließt, erfahrungsgemäß ziemlich weit führen.[14] Gemeint sind dabei wohl die Gitterpunktmethoden, also insbesondere der Minkowskische *Gitterpunktsatz*, mit denen Minkowski die Diskriminantenabschätzung liefern konnte.

Hasse jedoch hatte dann offenbar herausgefunden, dass der Beweis in der vorgelegten Form nicht zutreffend ist, denn in seinem nächsten Brief an Hasse vom 6. 7. 1931 schreibt Siegel:

> *Was die Diskriminante betrifft, so habe ich offenbar nicht die richtige Definition der Diskriminante zugrunde gelegt. Würden Sie mir gelegentlich mitteilen, wie Sie sie definieren?*

Und weiter:

> *Es ist schade, dass Ihnen für die Durchführung Ihrer schönen Idee nicht geholfen ist.*

[14] Eine ähnliche Ansicht mit ähnlicher Begründung gab Emmy Noether, der Hasse die Frage ebenfalls vorgelegt hatte, in einem Brief vom 24. 8. 1931.

Leider waren die Bemühungen Hasses, den Beweis doch noch zu retten, nicht erfolgreich, denn Siegel schrieb später:

> „*Vielen Dank für Ihre Darstellung meines missglückten Beweises!*“

Dies war am 21. 10. 1931. Nur drei Wochen später gelang es dann Hasse mit Hilfe von Emmy Noether und Richard Brauer, mit ganz anderen Methoden einen Beweis für das gesuchte Lokal-Global-Prinzip zu finden. (Siehe [Roq05b].) Als ihm Hasse dies mitgeteilt hatte und dabei schrieb, dass dies noch in den Festband zu Hensels 70. Geburtstag aufgenommen werde, antwortete Siegel am 9. 12. 1931:

> „*Das ist in der Tat das schönste Geburtstagsgeschenk für Hensel, dass seiner p–adischen Methode ein solcher Triumph beschieden wurde.*“

Und er fügte hinzu:

> „*Der Pessimismus, den ich den Aussichten der Mathematik gegenüber im Allgemeinen empfinde, ist wieder einmal wankend geworden.*“

Zurück zum Brief von Artin: die „*zweite Stelle*“, die er erwähnt, ist eine Schlussweise, die in dem von Siegel angedeuteten Beweis vorkommt. Wir sehen, es handelt sich um eine einfache Folge aus dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel.

38.3 Ungeheure Vereinfachungen

Diese Briefstelle ist von historischer Bedeutung, vergleichbar etwa mit dem Brief Artins vom 17. Juli 1927 (Nr. 8), in welchem er über den Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes berichtete. Wir werden Zeuge einer neuen Wendung in der bewegten Geschichte der Klassenkörpertheorie. Es geht um eine Neufassung der Grundlagen, auf denen das Artinsche Reziprozitätsgesetz fußte. Diese Grundlagen waren von Weber, Hilbert, Furtwängler und Takagi geschaffen worden und in übersichtlicher Form systematisch im 1. Teil des Hasseschen Klassenkörperberichts dargestellt [Has26a]. Obwohl die Hassesche Darstellung sehr begrüßt worden war, so war doch ein allgemeines Unbehagen entstanden über die Diskrepanz zwischen der einfachen

und übersichtlichen Form, die die *Hauptsätze* der Theorie angenommen hatten, und deren verschlungenen und teilweise komplizierten *Beweisen.* Hasse selbst hatte verschiedentlich auf diese Diskrepanz hingewiesen und auf die Notwendigkeit, die Klassenkörpertheorie einfacher zu begründen. (Vgl. 12.1.) Dies wurde nun durch die „*ungeheuren Vereinfachungen*“, von denen Artin spricht, in Angriff genommen.

Schon früher einmal gab es einen Gedankenaustausch zwischen Artin und Hasse über eine mögliche Vereinfachung des Aufbaus der Klassenkörpertheorie. Wir verweisen dazu auf den Brief Nr. 12 vom 29. 7. 1027 und die darauf folgenden Briefe. Der Enthusiasmus, der in dem vorliegenden Brief zum Ausdruck kommt, kann gedeutet werden als Ausdruck der Genugtuung, dass es endlich gelungen ist, ein Stück weiter zu kommen.

Man muss jedoch im Auge behalten, dass dies noch nicht zu einem endgültigen Ergebnis führte. Es handelte sich um einen von mehreren Schritten auf dem Weg zum Verständnis der Klassenkörpertheorie; erst die Ergebnisse von Chevalley im kommenden Jahrzehnt der 1930er Jahre werden in gewisser Weise als abschließend bezeichnet werden können; sie lieferten die Grundlage, auf der sich dann die weitere Entwicklung abspielte, mit den Methoden einerseits der Kohomologie und andererseits der arithmetischen Geometrie.

Die jetzt erreichte neue Wendung wird gewöhnlich Herbrand und Chevalley zugeschrieben [CH31]. Aus dem vorliegenden Brief ersehen wir, dass auch Artin daran beteiligt war. Er spricht zwar davon, dass dies nur an „*einigen kleinen Punkten*“ geschehen ist, aber wie wir Artin kennen, wird sein Einfluss dabei nicht klein gewesen sein. Zumindest der Teil, den er in seinem Brief mit „analytisch“ bezeichnet, wurde wesentlich von ihm selbst gestaltet. Sein Enthusiasmus hat sicherlich viel dazu beigetragen, dass die neue Wendung unter den Zahlentheoretikern schnell bekannt wurde. (Vgl. dazu 39.2.)

Herbrand war im Juni 1931 als Rockefeller-Stipendiat zu Artin nach Hamburg gegangen. (Vgl. 39.3.) Offenbar hatte er im Artinschen Seminar über seine Ergebnisse berichtet, die er zum Teil in Kooperation mit Chevalley[15] gewonnen hatte. Gleich nach der Abreise von Herbrand aus Hamburg informiert nun Artin seinen Briefpartner Hasse über die neue Entwicklung, noch ganz unter dem unmittelbaren Eindruck dieser Ergebnisse. Die Sachen sind offenbar noch nicht vollständig aufgeschrieben; Artin skizziert sozusagen freihändig mit großer Geste, wie er sich den neuen Aufbau vorstellt.

[15] Chevalley war ein Jahr jünger als Herbrand und leistete 1931 seinen Militärdienst; er kam erst im Wintersemester 1931/32 nach Hamburg.

38.3.1 Analytischer Teil

Wenn man die Ausführungen Artins im vorliegenden Brief verstehen will, so hat man diese im Kontext von Hasses Klassenkörperbericht Teil I [Has26a] zu lesen. Dieser Bericht war damals nicht nur die Quelle für die jungen Mathematiker geworden, die die Klassenkörpertheorie lernen wollten (z.Bsp. Herbrand und Chevalley), sondern er wurde auch allgemein als Referenz benutzt, wenn man nicht unbedingt die früheren Arbeiten von Takagi, Weber, Furtwängler usw. zitieren musste. Wir werden ihn im folgenden kurz mit „Bericht" zitieren.

Zunächst geht es um die sogenannte 1. Ungleichung

$$h \leq n$$

der Klassenkörpertheorie, die damals mit Hilfe der analytischen Theorie der L-Reihen bewiesen wurde. Dabei ist $n = [K : k]$ der Grad einer Zahlkörpererweiterung, und h ist der Index einer Klassengruppe H in k, erklärt nach einem Modul $\mathfrak{m}$. Die einzige Bedingung ist, wie Artin sagt, dass

H alle Idealnormen aus K enthält.

Gemeint sind natürlich die Relativnormen der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Ideale von K.

Im „Bericht" findet sich die 1. Ungleichung gleich zu Beginn in §5, Satz 8. Dort werden zwar nur galoissche Körpererweiterungen behandelt, während jetzt Artin ausdrücklich sagt, dass $K|k$ nicht galoissch zu sein braucht. Aber diese Verallgemeinerung ist wohl nicht als der wesentliche Fortschritt zu bezeichnen. Wesentlich ist, dass jetzt gleichzeitig das

Nichtverschwinden der L-Reihen $L(s, \chi)$ im Punkt $s = 1$

mit herauskommt, falls χ nicht der Hauptcharakter ist. Es verwundert einigermaßen, dass dies nicht auch schon im „Bericht" an dieser Stelle erwähnt wird, denn die Schlussweise von Artin hier ist genau dieselbe wie die von Hasse dort. Das ist in der Mathematik nicht selten zu beobachten: die sorgfältige Durchmusterung der verwendeten Schlussweisen kann oft zu nützlichen Verallgemeinerungen oder Vereinfachungen führen.

Es handelt sich um die klassischen Weberschen L-Funktionen der Zahlentheorie (also nicht um die neuartigen Artinschen L-Funktionen, die in den Briefen vom vergangenen Jahr zur Sprache kamen[16]). Diese L-Funktionen

[16] Briefe Nr. 30-33 .

$L(s,\chi)$ gehören also zu den Charakteren χ der Faktorgruppe A/H (dabei bezeichnet A die Gruppe der zum Modul $\mathfrak{m}$ teilerfremden Ideale). Artin schreibt die L-Funktion als e-Potenz und arbeitet mit dem Exponenten, d.h. er arbeitet mit dem Logarithmus (in geeigneter Normierung)

$$\log L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p},\nu} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} .$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{p}$ die zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Primideale und $\mathcal{N}$ bedeutet die Absolutnorm. $s > 1$ bezeichnet stets eine reelle Variable, und im vorliegenden Zusammenhang kommt es auf den Grenzübergang $s \to 1$ an.

Artin hält sich nicht damit auf, die Reihe für $\log L(s,\chi)$ hinzuschreiben; er konnte eben voraussetzen, dass Hasse mit den Begriffsbildungen und der ganzen Situation vertraut war. Er nimmt das Produkt der L-Funktionen zu den verschiedenen Charakteren χ; im Exponenten bedeutet das die Summe der Logarithmen. Diese Summe ergibt aufgrund der Charakterrelationen:

$$\sum_{\chi} \log L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}^\nu \in H} \frac{h}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} . \tag{48}$$

Die rechte Seite schreibt Artin hin. Dies ist eine Doppelsumme über alle Paare $\mathfrak{p}, \nu$ für welche $\mathfrak{p}^\nu \in H$ ist.

Dies wird nun verglichen mit der Zetafunktion des Oberkörpers K:

$$\log \zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{P},\nu} \frac{1}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{P}^{\nu s}}$$

wobei $\mathfrak{P}$ die Primideale von K durchläuft. Im vorliegenden Zusammenhang kommt es nur auf das Verhalten für $s \to 1$ an, und man kann eine für $s \to 1$ beschränkte Funktion beliebig hinzufügen oder weglassen. Aus diesem Grund kann man diejenigen Terme auf der rechten Seite weglassen, für welche $\mathfrak{P}$ vom Relativgrad > 1 ist. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von k erscheinen somit auf der rechten Seite $m_\mathfrak{p}$ Terme, wobei $m_\mathfrak{p}$ (von Artin mit m bezeichnet) die Anzahl der Primteiler $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ vom Relativgrad 1 ist. Bezeichnet M_K die Menge der Primideale $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ von k, für welche $m_\mathfrak{p} > 0$, so folgt also

$$\log \zeta_K(s) \sim \sum_{\mathfrak{p}\in M_K,\nu} \frac{m_\mathfrak{p}}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{p}^{\nu s}}$$

Hier benutzen wir die von Hasse eingeführte Schreibweise $\sim$ welche besagt, dass die Differenz beider Seiten eine für $s \to 1$ beschränkte Funktion ist.

Nun benutzt Artin die Voraussetzung, dass H alle Relativnormen aus K enthält, insbesondere also alle $\mathfrak{p} \in M_K$. Also kommt für jedes $\mathfrak{p} \in M_K$ ein Term auch in (48) vor, und wegen $m_\mathfrak{p} \leq n$ ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{\mathfrak{p}^\nu \in H} \frac{h}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} \geq \frac{h}{n} \sum_{\mathfrak{p} \in M_K, \nu} \frac{m_\mathfrak{p}}{\nu \mathcal{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} \,. \tag{49}$$

Diese so einfach herzuleitende Relation (49) findet sich, wie schon gesagt, bereits im „Bericht" (§5, 3.), wenn dort auch nur für galoissche Erweiterungen ausgesprochen.[17] Was neu ist, das sind die Folgerungen, die Artin hieraus zieht. Nämlich:

Da die rechte Seite in (49) für $s \to 1$ gegen $+\infty$ divergiert (weil $\zeta_K(s)$ an der Stelle $s = 1$ einen Pol besitzt), so auch die linke Seite in (49), also auch die linke Seite in (48). Mithin hat das L-Reihenprodukt

$$\prod_\chi L(s, \chi)$$

an der Stelle $s = 1$ einen Pol, , d.h. der für den Hauptcharakter $\chi = 1$ auftretende Pol 1. Ordnung kann sich nicht durch eine Nullstelle einer der anderen L-Funktionen herausheben. Es ist also

$$L(1, \chi) \neq 0 \qquad \text{für} \qquad \chi \neq 1 \,. \tag{50}$$

Über diese Beobachtung ist Artin so erfreut, dass sie ihm die Exklamation „*Bitte!*" entlockt. Und er sagt dazu, dass er überhaupt nicht die Fortsetzbarkeit der L-Funktionen benötigt[18], sondern lediglich die Regularität bei $s = 1$.[19] Er sagt allerdings nicht, wie er sich den Beweis der Regularität ohne die Fortsetzbarkeit vorstellt.

Was diese Regularität anlangt, so wird sie in dem „Bericht" nicht bewiesen, sondern es wird nur auf eine alte Arbeit von Weber aus dem Jahr 1897 verwiesen [Web97], mit einem Hinweis, dass und wie man evtl. die dortigen Beweise in eine moderne mathematische Schreibweise übersetzen könne. Artin selbst sagt in seinen Göttinger Vorträgen[20], dies erfordere eine „ziemlich

[17] Dabei können noch alle Terme mit $\nu \geq 2$ fortgelassen werden, weil deren Summe für $s \to 1$ beschränkt ist.

[18] Gemeint ist wohl die Fortsetzbarkeit auf die komplexe Ebene oder zumindest auf die rechte Halbebene $s > 0$.

[19] Hier ist „Regularität" einer analytischen Funktion im Sinne von „Holomorphie" zu verstehen.

[20] Vgl. 39.2.

komplizierte“ Überlegung. Erst in den Hasseschen Marburger Vorlesungen[21] finden wir einen ausführlichen Beweis, basierend auf den einschlägigen Abschätzungen der Koeffizientensummen der Dirichletschen Reihenentwicklungen für die L-Funktionen (diese sind noch in einem gewissen Bereich $s > 1-\varepsilon$ konvergent, aber nicht mehr absolut, d.h. es kommt auf die Reihenfolge der Terme an).

Immerhin sagt Artin in dem vorliegenden Brief an Hasse, dass ja die Regularität der L-Funktionen bei $s = 1$ schließlich die „*übliche Annahme der Klassenkörpertheorie*“ sei, insofern sei also seine Überlegung nicht komplizierter als die übliche. Und er sagt auch, dass seine Überlegung „ohne Frobenius“ gehe, d.h. ohne auf den Dichtigkeitssatz von Frobenius (oder gar den von Tschebotareff) zurückzugreifen.

Nun aber: Da das Nichtverschwinden der L-Reihen (50) gesichert ist, ergeben sich sofort eine ganze Reihe von Folgerungen, die für den Aufbau der Klassenkörpertheorie von entscheidender Bedeutung sind. Es sei betont, dass dies keine neuen Resultate waren; die von Artin angegebenen Sätze waren innerhalb der Klassenkörpertheorie wohlbekannt. Es geht Artin darum, in welcher Reihenfolge diese Sätze bewiesen werden, also um das Schema eines neuen Aufbaus der Klassenkörpertheorie.

Wenn $h = n$ ist, wenn also $K|k$ ein Klassenkörper nach der Takagischen Definition ist, dann, so folgert Artin, zerfallen fast alle Primideale aus H vollständig in K, d.h. alle bis auf eine evtl. Ausnahmemenge der Dichte 0. Gemeint ist dabei natürlich die sog. Dirichlet-Dichte. Davon gilt auch die Umkehrung. Diesen Satz formuliert Hasse in seinen Marburger Vorlesungen als „Satz von Artin“ [22]. Daraus können wir wohl schließen, dass dieser Satz in der Tat von Artin stammt, und also nicht von Herbrand und/oder Chevalley. Und dieser Satz von Artin spielt eine wichtige Rolle beim Aufbau der Klassenkörpertheorie. In einem späteren Stadium des Aufbaues stellt sich dann heraus, dass der Satz dahingehend präzisiert werden kann, dass wirklich *alle* Primideale aus H vollständig zerfallen in K.

38.3.2 Reduktionen

Hier bezieht sich Artin auf das Beweisschema in dem „Bericht“, mit dem er das neue Beweisschema vergleicht. Auch dort gibt es eine Reihe von Beweisschritten, die von Hasse „Reduktionen“ genannt worden waren.

---

[21] [Has33c], Satz (80).
[22] [Has33c], Satz (100).

Artin unterscheidet 2 Reduktionen:

1) Der „Umkehrsatz“ besagt, dass jede abelsche Erweiterung ein Klassenkörper ist. Weil Artin soeben schon den Satz über Körperkomposita bewiesen hat, so braucht der Umkehrsatz nur für zyklische Erweiterungen $K|k$ bewiesen zu werden. Und für zyklische Erweiterungen, so sagt er weiter unten, reduziert sich der Umkehrsatz auf die Bestimmung zweier Gruppenindizes. Das ist wie früher im „Bericht“. Neu aber ist, dass sich jetzt die Berechnung dieser Indizes, wie Artin sagt, „in zwei Zeilen“ durchführen läßt. Zwar sind diese „zwei Zeilen“ wohl etwas übertrieben (oder besser: untertrieben), aber Tatsache ist, dass sich in der Tat diese Berechnung jetzt sehr viel einfacher gestalten lässt als früher. Und zwar sofort für beliebige zyklische Erweiterungen, während im „Bericht“ zunächst per Induktion auf den Fall eines Primzahlgrades zurückgeschlossen und der Beweis in diesem Falle mit dem Beweis des Existenzsatzes verwoben werden musste. Dies ist der „ungeheure Fortschritt“, von dem Artin eingangs gesprochen hat, und der auf Herbrand und Chevalley zurückgeht. Der gruppentheoretische Hilfssatz, von dem Artin spricht, ist heute unter dem Namen „*Herbrandsches Lemma*“ wohlbekannt und wird meist als Aussage über die Kohomologie zyklischer Gruppen interpretiert.

Jedoch verliert Artin hier kein Wort über die Natur dieses Hilfssatzes. Das wäre doch vielleicht informativ für Hasse gewesen, insbesondere weil es, wie Artin anmerkt, doch die „*schlimmen Rechnungen*“ unnötig machte.[23]

Als Resultat dieser Indexrechnungen kommt heraus, wenn $K|k$ Klassenkörper zu H ist, dass dann

$$h \geq n$$

ist, also die sogenannte 2. Ungleichung der Klassenkörpertheorie. Im zyklischen Falle ergibt sich noch als Nebenprodukt das *Lokal-Global-Prinzip* für die Normen – jedenfalls, wenn man die lokale Klassenkörpertheorie voraussetzt. Wir beachten, dass die Entdeckung der lokalen Klassenkörpertheorie durch Hasse und F. K. Schmidt bereits mehr als ein Jahr zurückliegt [Has30c]; damals jedoch musste noch die *globale* Klassenkörpertheorie zum Aufbau der *lokalen* Klassenkörpertheorie benutzt werden. Erst ein weiteres Jahr später gelang es Hasse, angeregt durch Emmy Noether, die lokale Klassenkörpertheorie ohne Benutzung der globalen zu begründen.

[23] Im selben Zusammenhang spricht Artin davon, dass auch die „trinomischen Gleichungen“ bei F. K. Schmidt unnötig werden. Wir haben nicht feststellen können, was er damit meint. In der Literatur haben wir keine entsprechende Arbeit von F. K. Schmidt gefunden, und in dem Briefwechsel von Hasse mit F. K. Schmidt, der erhalten geblieben ist, wird davon nicht gesprochen.

2) Der „Existenzsatz“ besagt, dass es zu vorgegebener, nach einem Modul $\mathfrak{m}$ definierten Klassengruppe H von k eine abelsche Erweiterung $K|k$ als Klassenkörper gibt. Artin verbindet ihn mit dem „Isomorphiesatz“ (nämlich dass A/H isomorph zur Galoisgruppe von $K|k$ ist) und dem „speziellen Zerlegungssatz“ (nämlich dass die Primideale aus H und nur diese in K voll zerfallen). Im Grunde, sagt Artin, geht alles wie im „Bericht“, nur dass manche Schlüsse einfacher werden infolge eines sorgfältig angelegten Induktionsbeweises.

Übrigens ist der Existenzsatz in den Artinschen Göttinger Vorträgen[24] nicht behandelt worden. Wahrscheinlich hat die zur Verfügung stehende Zeit nicht ausgereicht. Daraus, dass Artin den Existenzsatz aus dem Programm seiner Göttinger Vorträge gestrichen hat, können wir vielleicht entnehmen, dass er den neuen Beweis nicht zu den „ungeheuren Vereinfachungen“ zählte, von denen er in seinem Brief an Hasse spricht.

[24]Vg. 39.2.

39 24.08.1931, Brief von Artin an Hasse

(39) Hamburg den 24. August 1931.

Lieber Herr Hasse!

Wir waren auf einige Tage in der Sommerfrische im Harz und da habe ich zwei Arbeiten niedergeschrieben die ich Ihnen für das Henselheft anbiete.[1] Es ist zwar nichts besonderes und wenn Sie meinen dass Sie es nicht recht brauchen können, so schicken Sie sie mir halt wieder zurück. Sie können sich ja auch was aussuchen. Die eine ist eine einfachere Begründung des Ostrowskischen Satzes über die Bewertungen. Der von Ostrowski gegebene Beweis insbesondere für den archimedischen Fall ist meiner Ansicht viel zu kompliziert. Wie Sie aus dem kleinen Umfang ersehen, geht es ganz einfach. Die andere Arbeit beweist auf einfacherem Wege den Herbrandschen Satz über Einheiten relativ galois'scher Zahlkörper. Da er die Grundlage für die neuen Klassenkörperbeweise ist, war ein einfacher Beweis zu wünschen. Natürlich hatte ich in der Sommerfrische keine Schreibmaschine so dass die Arbeiten handschriftlich sind. Ich habe mich aber bemüht so leserlich wie möglich zu schreiben.

Ich habe die Klassenkörperbeweise jetzt endlich aufgeschrieben und werde sie Ihnen hoffentlich bald zuschicken können. Es hat doch länger gedauert als ich annehmen konnte. [2]

Sie werden wahrscheinlich schon von dem schrecklichen Unglück gehört haben, das Herbrand getroffen hat. Er ist in den Alpen tödlich verunglückt. Das ist wirklich ein schwerer Schlag der die Arithmetik getroffen hat. Vierzehn Tage vor seinem Tode war Herbrand noch unser Gast und ich erwartete mir große Dinge von ihm.[3]

Inzwischen haben Sie sicher schon den Satz über Schiefkörper bewiesen. Ich bin schon sehr gespannt darauf.[4]

Mit den besten Grüssen, auch an Ihre Frau

Ihr Artin

[1]Siehe 39.1.
[2]Siehe 39.2.
[3]Siehe 39.3.
[4]Siehe 39.4.

Sie können natürlich gerne das Henselbild verwenden, wenn Sie es brauchen können.[5]

[5] Siehe Fußnote 7 zum vorangegangenen Brief.

Kommentare zum Brief Nr.39:

39.1 Das Henselheft

Mit „Henselheft" meint Artin den Festband des Crelleschen Journals aus Anlass des 70. Geburtstages von Kurt Hensel am 29. Dezember 1931. Hasse, der wie Hensel einer der Herausgeber des Crelleschen Journals war, hatte in einem Rundschreiben an ausgewählte Adressaten dazu eingeladen, Beiträge für dieses Heft einzusenden. Auch Artin hatte eine solche Einladung erhalten. Wie wir aus dem Brief erfahren, hat er seine beiden Beiträge während eines Sommerurlaubs im Harz niedergeschrieben. Als Termin für die Einsendung der Beiträge war aus redaktionellen Gründen der 1. September 1931 vorgesehen; die Artinsche Sendung kam also gerade zur rechten Zeit.[6] Beide Arbeiten wurden von Hasse in das Crellesche Journal aufgenommen.

Zwar meint Artin, dass diese Arbeiten „*nichts besonderes*" seien, womit er offenbar ausdrücken will, dass es sich nur um relativ kleine Noten handelt, und in jeder von ihnen nur um eine Vereinfachung der Beweise von bekannten Sätzen. Normalerweise pflegte Artin solche Dinge nicht zu publizieren, sondern er stellte sie in seinen Vorlesungen vor oder erzählte sie seinen Gesprächspartnern; von da aus gelangten sie dann in die Literatur und zur Kenntnis der interessierten Mathematiker. Jetzt aber benutzte Artin diese Arbeiten als eine Gelegenheit, um Beiträge zum „Henselheft" liefern zu können. Er hatte ja sonst „*absolut nichts Neues*" zu liefern, wie er sich im Brief Nr. 37 vom 6. 5. 1931 ausdrückte.

Nichtsdestoweniger sind beide Arbeiten in der Folge von Bedeutung geworden. Der Satz von Ostrowski [Ost18] klassifiziert die Bewertungen des rationalen Zahlkörpers; dies wird hier von Artin in [Art32a] ganz einfach auf nur $2\frac{1}{2}$ Seiten durchgeführt, und zwar gleich für einen beliebigen Zahlkörper endlichen Grades. Seitdem ist die Artinsche Methode zum Standard in den Lehrbüchern und Vorlesungen geworden. Zum Beispiel verwendet Hasse in seiner „Zahlentheorie" [Has49] diese Methode mit dem Vermerk: „*Dieser schöne Beweis geht auf Artin zurück.*"

Der Einheitensatz von Herbrand [Her31b] bezieht sich auf eine galoissche Zahlkörper-Erweiterung $K|k$ und beschreibt die Galois-Struktur der Einheitengruppe von K. Das ist wichtig um, wie von Artin im vorangegangenen

[6] Auch Emmy Noether hatte, um den Termin einzuhalten, ihren Sommerurlaub zur Niederschrift ihrer „Hensel-Note" [Noe32] genutzt; es handelte sich um ihre berühmte Arbeit „*Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung*". Vgl. [LR06], und dort den Brief vom 22. 8. 1931.

Brief erwähnt, das „Einheitenhauptgeschlecht“ mit Hilfe des Herbrandschen Lemmas zu bestimmen. In seiner Arbeit [Art32b] betont Artin, dass sein Beweis einfacher als bei Herbrand sei, weil er unabhängig von der Darstellungstheorie ist. Das würden wir heute allerdings nicht mehr so sehen. Die Darstellungstheorie liefert uns die Struktur der Einheitengruppe als Galoismodul und somit eine vertiefte Einsicht. Nichtsdestoweniger ist der Artinsche Beweis als eine Vereinfachung anzusehen, da er sich der klassischen Minkowskischen Schlussweise im Zusammenhang mit dem Einheitensatz bedient. Der Beweis wurde von Hasse in seine Marburger Vorlesungen (Sommersemester 1932) unter Bezugnahme auf Artin aufgenommen und ist auch heute noch im wesentlichen standard. Vgl. auch 14.1.

39.2 Die Klassenkörperbeweise

Im vorangegangenem Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931 haben wir gesehen, dass Artin die neue Entwicklung in der Klassenkörpertheorie faszinierte, und dass dabei nicht nur Herbrand und Chevalley, sondern auch er selbst einen Anteil hatte. Die Andeutungen, die er Hasse in dem vorangegangenen Brief dazu gegeben hatte, waren jedoch ziemlich kurz; er hat also jetzt seine damalige Skizze ausführlicher aufgeschrieben.

Artin hat aber diese seine „Klassenkörperbeweise“ niemals publiziert. Vielleicht deshalb, weil sie schließlich in die Thèse von Chevalley [Che33b] eingingen und dort noch weiter entwickelt wurden. Es wäre aus historischer Sicht sehr interessant, wenn das Original des Artinschen Manuskripts aufgefunden würde. Wie in diesem Brief angekündigt, hat er ein Exemplar wohl auch an Hasse geschickt. Im Hasse-Nachlass haben wir es aber nicht gefunden.

Es gibt jedoch andere Dokumente, aus denen sich der wesentliche Inhalt des erwähnten Artinschen Manuskripts rekonstruieren lässt. Das sind:

1. eine Ausarbeitung der Artinschen Klassenkörper-Vorlesung in Hamburg im Wintersemester 1931/32.[7] Wir haben eine Kopie dieser Ausarbeitung in der Bibliothek des Heidelberger Mathematischen Instituts gefunden. Wir konnten jedoch nicht feststellen, wer diese Ausarbeitung angefertigt hatte.[8] Im Wintersemester 1931/32 war Chevalley als

[7]Von dieser seiner Vorlesung spricht Artin in seinem Brief Nr. 40 vom November 1931.

[8]Bemerkenswert ist, dass es in dieser Ausarbeitung einen 8-seitigen Anhang gibt, in dem der Normensatz für zyklische Zahlkörper (also das Lokal-Global-Prinzip) auf arithmetischem Wege bewiesen wird, also ohne Benutzung der Analysis. Dieser Anhang trägt den

Rockefeller-Stipendiat in Hamburg bei Artin; es ist sicher, dass er diese Vorlesung gehört hat. In seiner Thèse [Che33b] hat Chevalley sicher Anregungen aus der Artinschen Vorlesung verarbeitet.

2. eine Ausarbeitung der berühmten drei Göttinger Vorträge Artins aus dem Jahre 1932. Diese Vorträge kamen zustande aufgrund einer Einladung von Emmy Noether, die offenbar von den neuen Vereinfachungen im Aufbau der Klassenkörpertheorie gehört hatte. Die Vorträge wurden von Olga Taussky ausgearbeitet und fanden so als „Lecture Notes" Verbreitung [Art32c]. Später wurden sie in englischer Übersetzung in einem Anhang zu dem Buch von Harvey Cohn [Coh78] publiziert.
3. eine Ausarbeitung der Hasseschen „Marburger Vorlesungen" über Klassenkörpertheorie im Sommersemester 1932. Wie zahlreiche andere auswärtige Mathematiker war auch Hasse zu den Artinschen Vorträgen nach Göttingen gekommen. Er hat die damals von Artin erhaltenen Anregungen in seinen Vorlesungen aufgenommen und darüberhinaus weitere Vereinfachungen erzielt.[9] Hasses „Marburger Vorlesungen" wurden von seinem Assistenten Wolfgang Franz ausgearbeitet und waren zunächst als „Lecture Notes" verfügbar[10]; später erschienen sie auch in Buchform [Has67].

Bemerkung: Ernst Witt wohnte Artins Vorträgen in Göttingen als junger, noch nicht promovierter Student bei. Er berichtet in [Wit83]: dass ihn die Vorträge „*tief beeindruckt*" haben, sodass er daraufhin beschloss, in den folgenden Semesterferien nach Hamburg zu Artin zu gehen, um dessen Klassenkörpertheorie genauer zu studieren. In den folgenden Jahren, so sagt er, „*war es mein Ziel, diese Klassenkörpertheorie auf Funktionenkörper zu übertragen*". Er begann damit im Juli 1933 mit seiner später berühmt gewordenen Göttinger Dissertation zum Riemann-Rochschen Satz für Algebren.[11]

Vermerk: „*Nach Chevalley, C. Rendus 632 1935, 14.Okt. und mündliche Mitteilung von H. Nehrkorn.*" Bedeutet das, dass die Ausarbeitung der Vorlesung, die im WS 1931/32 gehalten wurde, erst Ende 1935 fertiggestellt wurde? Der Beweis Chevalleys ohne Benutzung der Analysis hat schliesslich die L-Reihen für die Grundlegung der Klassenkörpertheorie entbehrlich gemacht. Weshalb wurde dann die Ausarbeitung, in der L-Reihen immer noch eine wichtige Rolle spielten, überhaupt noch verbreitet?

[9] Auf einige dieser Vereinfachungen hat schon Olga Taussky in ihrer Ausarbeitung der Artinschen Göttinger Vorträge hingewiesen.

[10] Eine englische übersetzung wurde 1934 von Mordell ins Auge gefasst, daraus ist jedoch nichts geworden.

[11] Die Anregung dazu ging noch auf Emmy Noether zurück, obwohl sie damals schon von der nationalsozialistischen Regierung „beurlaubt" war. Vgl. dazu auch [LR06], Brief Nr. 70 vom 21. 7. 1933.

39.3 Herbrand

Jacques Herbrand (geb. 1908) gehörte zu den jungen französischen Mathematikern, die in den 1920er und 1930er Jahren in Deutschland studierten. Wie Henri Cartan berichtet:[12]

> „*We were the first generation after the war.*[13] *Before us there was a vacuum, and it was necessary to make everything new. Some of my friends went abroad, notably to Germany, and observed what was being done there. This was the beginning of a mathematical renewal. It was due to such people as Weil, Chevalley, de Possel ... The same people, responding to André Weil's initiative, came together to form the Bourbaki group.*"

Sicherlich wäre auch Herbrand unter den Gründern von Bourbaki gewesen, wenn ihn nicht das Schicksal getroffen hätte, von dem Artin in seinem Brief berichtet.

Herbrand hatte sich in seiner Thèse (Paris 1929) mit mathematischer Logik beschäftigt; in der Tat ist sein Werk unter den Logikern heute noch von Bedeutung. Im akademischen Jahr 1930/31, mit 22 Jahren, ging Herbrand als Rockefeller-Stipendiat nach Berlin, um dort bei John von Neumann zu arbeiten. Diese Wahl war von seinen Interessen in der mathematischen Logik bestimmt; insbesondere wollte er die Arbeiten von Gödel studieren. Er hatte zu dem damaligen Zeitpunkt aber auch schon über algebraische Zahlentheorie, insbesondere Klassenkörpertheorie gearbeitet; davon schrieb ja Artin schon in seinem vorangegangenen Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931. Von Berlin aus fuhr Herbrand einmal nach Halle, um dort einen Kolloquiumsvortrag von Emmy Noether zu hören. Sie berichtet darüber in einem Brief vom 8. 2. 1931 an Hasse, in welchem sie Vorschläge für Einladungen zu dem Schiefkörper-Kongress macht, den Hasse nach Marburg für die Zeit vom 26. 2.-1. 3. 1931 einberufen hatte. Sie schreibt:

> „ *Dann möchte ich auch vorschlagen, auch meinen Rockefeller-Stipendiaten für den nächsten Sommer – der jetzt bei von Neumann in Berlin ist – aufzufordern: Dr. J. Herbrand ... Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden. Er hat bis jetzt außer Logik nur Zahlentheorie gearbeitet (die er aus Ihrem „Bericht" und Ihrer Normenresttheo-*

[12] Zitiert aus [Jac99].

[13] Gemeint ist der Erste Weltkrieg.

rie gelernt hat[14]*); ich dachte an ihn nur als Zuhörer. Eventuell könnte er aber über seine durch die Einheitengruppen vermittelten ganzzahligen Darstellungen der Galoisgruppe vortragen; das ist wahrscheinlich nahe mit meinen hyperkomplexen Sachen zusammenhängend*[15] *... Wir hatten in Halle alle einen ausgezeichneten Eindruck von ihm.*"

Auch Artin gewann offenbar einen ausgezeichneten Eindruck und er erwartete noch große Dinge von ihm, wie wir in dem vorliegenden Brief lesen. Der vorangehende Brief Artins, in dem er seiner Begeisterung über die durch Chevalley und Herbrand erzielten Fortschritte Ausdruck gibt, ist vom 16. Juni 1931 datiert; im Juni war Herbrand nach Hamburg gegangen und hatte offenbar dort über seine Arbeiten zur Klassenkörpertheorie berichtet.

Den Juli 1931 verbrachte Herbrand in Göttingen bei Emmy Noether. Auch sie zeigte sich erschüttert, als sie die Nachricht von dem plötzlichen Tod von Herbrand erhalten hatte; am 24. 8. 1931 schreibt sie an Hasse:

„*Mir geht der Tod von Herbrand nicht aus dem Sinn.*"

Während seines nur wenige Monate währenden Aufenthalts in Deutschland hatte Herbrand wegen seiner hohen Begabung und seines freundlichen und aufgeschlossenen Wesens viele Freunde gefunden. Auch zu Hasse scheint er ein näheres Verhältnis gefunden zu haben. André Weil hatte am 4. 8. 1931 an Hasse ein Schreiben mit der Nachricht über den Tod von Herbrand geschickt:

„ *Ich muss Ihnen leider eine sehr betrübende Nachricht mitteilen, die des Todes Jacques Herbrands, der vor wenigen Tagen bei einer Bergbesteigung im Dauphiné tödlich verunglückt ist. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, welchen Verlust dieser Tod für die Wissenschaft und besonders für die Zahlentheorie bedeutet. Noch kürzlich vor seinem Tode hatte er eine neue Idee gehabt, die eine*

---

[14] Gemeint sind wohl der Hassesche Klassenkörperbericht, Teile I und II, sowie die Arbeiten Hasses zur Normenresttheorie, die schliesslich in die lokale Klassenkörpertheorie mündeten.

[15] Siehe [Her31b]. (Dies ist die Arbeit, die Artin im „Henselheft" vereinfacht hatte; siehe 39.1.) – Im Programm des „Schiefkongresses" erscheint der Name Herbrand nicht, er hat also wohl nicht auf der Tagung vorgetragen (wahrscheinlich weil das Programm mit 5 Vortragsstunden täglich schon ziemlich voll war). Aus der Korrespondenz Hasse–Herbrand ist jedoch zu entnehmen, dass Herbrand an diesem „Schiefkongress" teilgenommen und dabei näheren Kontakt zu Hasse gewonnen hat.

> *weitere bedeutende Vereinfachung der Klassenkörpertheorie bringen sollte ...*“

Am selben Tag ging bei Hasse das Manuskript einer Arbeit ein, die Herbrand für das Crellesche Journal vorgesehen hatte. In einem Vorwort zur veröffentlichten Fassung dieser Arbeit [Her33] schrieb Hasse u.a.:

> „*Die letzten 6 Monate seines Lebens verbrachte er an deutschen Universitäten, in enger Berührung und lebhaftem Gedankenaustausch mit einer Reihe deutscher Mathematiker. Tief hat sich ihnen allen seine edle mit reichen wissenschaftlichen Gaben ausgestattete Persönlichkeit eingeprägt. Ein ungewöhnlich begabter Geist ist mit ihm in der Blüte seiner Jugend dahingegangen. Die schönen und wichtigen Resultate, die er auf dem Gebiete der Zahlentheorie und der mathematischen Logik gefunden, und die fruchtbaren Ideen, die er in mathematischen Gesprächen geäußert hat, berechtigten zu den größten Hoffnungen. Die mathematische Wissenschaft hat durch seinen frühzeitigen Tod einen schweren, unersetzlichen Verlust erfahren.*“

In der kurzen Zeit, in der Herbrand über Zahlentheorie arbeitete, hat er 10 Arbeiten publiziert. Chevalley hat posthum einen Überblick über die Ideen seines Freundes Herbrand publiziert [Her35][16]. Einige dieser Ideen hat Chevalley in seine Thèse aufgenommen [Che33b].

39.4 Der Satz über Schiefkörper

Wir haben im vorangegangenen Brief Nr. 38 gesehen, dass sich Artin auf Anregung von Hasse mit Diskriminantenabschätzungen von Schiefkörpern beschäftigt hatte (vgl. 38.2). Zwar ging es damals nur um den Siegelschen Beweis; Artin wusste offenbar noch nicht, wozu Hasse diese Abschätzung benutzen wollte. Denn er fragte ja in seinem damaligen Brief: „*Was können Sie denn aus diesem Satz folgern?*“ Offenbar hat Hasse ihm daraufhin in der Antwort erläutert, dass er daraus das Lokal-Global Prinzip für Schiefkörper folgern möchte. Aber der Siegelsche Beweis hatte sich als nicht durchführbar erwiesen (das erwähnten wir schon in 38.2). Hasse suchte jetzt nach anderen Wegen zum Beweis seines Satzes.

[16] In das Literaturverzeichnis dieser Publikation hat Chevalley auch die Ausarbeitung der Artinschen Göttinger Vorträge aus dem Jahre 1932 aufgenommen; siehe 39.2. Diese Vorträge hat Herbrand nicht mehr gehört, aber ihr wesentlicher Inhalt war ihm sicher durch die Diskussionen mit Artin im Juni 1931 bekannt geworden.

Wir wissen, dass Hasse am 27. Juli 1931 einen ausführlichen Brief an Richard Brauer schrieb, in welchem er seinen neuen Ansatz erläuterte und Richard Brauer um seine Meinung dazu bat.[17] Zur selben Zeit schrieb er auch an Emmy Noether einen entsprechenden Brief. Nach Hasses Gepflogenheiten ist es anzunehmen, dass er auch an Artin in dieser Sache geschrieben hatte. Dies ist der Hintergrund, wenn Artin jetzt schreibt, dass „*Sie sicher schon diesen Satz über Schiefkörper bewiesen haben*".

Das war aber nicht der Fall. Der Ansatz, den Hasse an Brauer geschickt hatte und auch an Noether und Artin, ließ sich nicht ohne weiteres durchführen. Es dauerte noch bis zum 9. November 1931, bis Hasse der Durchbruch gelang, mit Hilfe von Ideen von Emmy Noether und Richard Brauer. Diese Geschichte ist in [Roq05b] ausführlich dargestellt; sie spiegelt sich auch in dem Briefwechsel Hasse-Noether [LR06] wider. Artin hat an dieser letzten Entwicklungsphase des Beweises, wie es scheint, nicht aktiv teilgenommen, vielleicht deshalb, weil er mit den neuen „Klassenkörperbeweisen" beschäftigt war (siehe 39.2). Als er aber den Satz von Brauer-Hasse-Noether erfuhr, äußerte er sich ganz enthusiastisch zu Hasse; siehe den folgenden Brief Nr. 40 vom November 1931.

[17] Der Brief ist im Brauer-Nachlass enthalten.

40 November 1931, Brief von Artin an Hasse

November 1931 [1]

Lieber Herr Hasse!

Ich habe ein schrecklich schlechtes Gewissen. Auf keinen Ihrer Briefe eine Antwort.[2] Teils ist das verteufelte Dekanat dran schuld, teils aber die alte Schreibfaulheit. Ihr liebenswürdiges Anerbieten wegen der Korrekturen konnte ich nicht annehmen, Sie haben selbst viel zu viel zu tun. Anbei die Korrekturen.[3]

Sie können sich gar nicht vorstellen, wie ich mich über den endlich geglückten Beweis für die cyklischen Systeme gefreut habe.[4] Das ist der grösste Fortschritt in der Zahlentheorie der letzten Jahre. Meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Beweis. Ich lese jetzt Klassenkörpertheorie und will nächstes Semester anschliessend hyperkomplex werden. Wird man bis dahin Kenntnis von Ihrem Beweis bekommen? Sie werden ihn vermutlich bald publizieren. Ich bin gespannt wie es weiter geht und schon überzeugt dass Sie auf der richtigen Spur sind.

Ein bisschen habe ich auch in dem Gebiet gestümpert, aber viel ist nicht herausgekommen. Auf alle Fälle will ich es Ihnen schreiben aber wahrscheinlich ist Ihnen alles bekannt.[5]

1.) Sei K/k abelsch. Man ordne jedem $\mathfrak{p}$ aus k ein Element $\sigma(\mathfrak{p})$ der Gruppe von K/k zu, das nur für endlich viele $\mathfrak{p} \neq 1$ ist. Wann gibt es ein α aus k, so dass für alle $\mathfrak{p}$ aus k gilt

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma(\mathfrak{p}) \qquad ?$$

Notwendig und hinreichend ist:

[1] Dieser Brief ist von Artin nicht datiert. Aufgrund seines Inhalts können wir schließen, dass er Mitte November 1931 verfasst wurde.

[2] Offenbar handelt es sich hier wiederum um mehrere Briefe von Hasse, die Artin hier beantwortet. Vgl. Fußnote 2 zum Brief Nr. 36.

[3] Es handelt sich um die Korrekturen der beiden Artinschen Arbeiten zu dem Hensel-Festband, der Ende des Jahres erscheinen sollte. Vgl. dazu 39.1.

[4] Siehe 40.1.

[5] Siehe 40.2.



Abbildung 7: Hasse: 1930er Jahre

(Aus: Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. Bd. 10)

1.) $\sigma(\mathfrak{p})$ gehört zur Zerlegungsgruppe 2.) $\prod_{\mathfrak{p}} \sigma(\mathfrak{p}) = 1$.	Also Einzigkeit des R[eziprozitäts]g[esetzes]

2.) Es sei für ein hyperkomplexes System n und $\nu_{\mathfrak{p}}$ (ihre[6] Invarianten) vorgeschrieben. Aus der Produktformel folgt $\sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \equiv 0 \pmod{n}$. Ist das die einzige Bedingung?
Antwort ja. Es gibt also immer Systeme mit solchen $\nu_{\mathfrak{p}}$.

3.) $\mathfrak{S}$ sei ein einfaches hyperkompl[exes] System [mit] Zentrum k. Nach Ihrem Satz ist $\mathfrak{S}$ cyklisch erzeugbar. Frage: Ist $\mathfrak{S}$ sogar durch *Kreiskörper* erzeugbar?

Antwort: Nein nicht immer, es sei denn k ist absolut galois'sch. Dann und nur dann geht es immer. Wohl aber gibt es stets einen cykli[schen] Kreiskörper der minimaler Zerfällungskörper ist. Bei beliebigem k ist also $\mathfrak{S}$ stets einer cykli[schen] Kreiskörperalgebra ähnlich. Der Beweis stützt sich merkwürdiger Weise auf das Lemma des R[eziprozitäts]g[esetzes].

Aber das werden Sie ja alles schon wissen.

Das Schursche Theorem dass alle Darstellungen einer Gruppe n-ter Ordnung im n-ten Kreiskörper realisierbar sind ist doch wohl schon mit Ihren Methoden beweisbar?

Mit vielen Grüssen von meiner Frau und mir auch an Ihre Frau Gemahlin

Ihr Artin

[6] Artin schreibt „ihre“ so wie wir es hier wiedergeben. Sprachlich müsste es eigentlich „seine“ heißen, wenn Artin die Invarianten des hyperkomplexen Systems meint. Es könnte aber auch sein, dass Artin „Ihre“ meint, also die heute so genannten „Hasse-Invarianten“, die Hasse in seiner amerikanischen Arbeit [Has32b] definiert hatte. Diese Arbeit war zwar zum Zeitpunkt der Abfassung des Artinschen Briefes noch nicht erschienen, aber Artin kannte wohl ihren Inhalt.

Kommentare zum Brief Nr. 40:

40.1 Zyklizität der einfachen Algebren

Dies ist Artins Reaktion auf die Mitteilung von Hasse, dass nun endlich der Nachweis gelungen sei, dass jede einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. Schon vor einem Jahr hatte ja Artin geäußert, dass er das glaube (zumindest für Schiefkörper); siehe Brief Nr. 35 vom 27. 11. 1930. Hasse hatte diese Zyklizitätsvermutung in die Liste seiner Vermutungen zur Algebrentheorie aufgenommen; siehe 41.2. Jedoch erst am 9. 11. 1931 gelang ihm der letzte Schritt im Beweis, gestützt auf Mitteilungen von Richard Brauer und Emmy Noether. Die Geschichte dazu ist in [Roq05b] ausführlich geschildert.

War die enthusiastische Reaktion Artins wirklich angemessen? Der Satz über die Zyklizität ist wohl ein wichtiger Struktursatz über Algebren, doch konnte man ihn als den „*grössten Fortschritt in der Zahlentheorie der letzten Jahre*“ bezeichnen? Auf den ersten Blick scheint das etwas übertrieben. Wir entnehmen aber aus Artins weiteren Äußerungen in diesem Brief, dass er nicht nur den Zyklizitätssatz selbst im Auge hat, sondern auch das zum Beweis herangezogene Lokal-Global Prinzip für Algebren mit seinen weitreichenden Konsequenzen für die Klassenkörpertheorie. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint uns seine enthusiastische Reaktion nicht mehr übertrieben.

Artin berichtet, dass er seine Vorlesung über Klassenkörpertheorie, die er im laufenden Semester hält, im nächsten Semester unter hyperkomplexen Gesichtspunkten fortsetzen will, d.h. also er will den Zusammenhang mit der Algebrentheorie besprechen. In der Tat hielt Artin im Sommersemester 1932 in Hamburg eine Vorlesung über Algebra, wobei er hyperkomplexe Systeme und deren Struktur behandelte. Eine Ausarbeitung wurde von Ernst August Eichelbrenner angefertigt und ist erhalten. Jedoch ist Artin in dieser Vorlesung nicht über die allgemeinen Struktursätze für Algebren hinausgekommen. Ein Bezug zur Zahlentheorie und Klassenkörpertheorie ist in der Ausarbeitung nicht zu erkennen. Wurde diese Vorlesung von dem Schicksal ereilt, das wir alle aus Erfahrung kennen: nämlich dass die zur Verfügung stehende Zeit nicht ausreicht um alle anfänglich aufgestellten Pläne zu realisieren? Einige Indizien lassen vermuten, dass es noch eine etwas fortgeschrittenere Parallelvorlesung gab, in welcher Algebren über Zahlkörpern (lokal und global) und die Klassenkörpertheorie behandelt wurde.[7]

[7] Denn im nachfolgenden Brief Nr. 41 berichtet Artin, dass er in seinem Kolleg die $\mathfrak{p}$-adischen Körper bringt und anschließend Hasses „neue Arbeit“ behandeln will.

Artin gibt der Hoffnung Ausdruck, dass Hasse den Beweis schon bald publizieren werde, denn er möchte ihn ja noch vor dem Sommersemester, in dem er seine „hyperkomplexe“ Vorlesung plant, zur Kenntnis bekommen. In der Tat konnte Hasse diese Arbeit [BHN32] noch in letzter Minute in den Hensel-Festband (das „Henselheft“) hineinnehmen (obwohl der festgesetzte Ablieferungstermin dafür, der 1. 9. 1931, schon längst abgelaufen war). Hensel hatte ihm, wie Hasse einmal berichtete, das Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen „suggeriert“ [8], und Hasse hatte dies dann in seiner Dissertation und den darauffolgenden Arbeiten durchgeführt. Nunmehr war es gelungen, ein solches Lokal-Global-Prinzip auch für Algebren zu beweisen, und Hasse wollte die Arbeit seinem verehrten Lehrer Kurt Hensel, den er jetzt seinen „väterlichen Freund“ nennen durfte, als Zeichen seiner Dankbarkeit und Verbundenheit zum Geburtstag widmen. Das kann man u.a. den folgenden Zeilen entnehmen, die Hasse am 11. November 1931 an Richard Brauer richtete, als er ihm den Entwurf des Manuskripts zusandte:

> *Lieber Herr Brauer! Nachdem die Zyklizitätsfrage mit Ihrer und E. Noethers Hilfe zu einem glücklichen Abschluß gekommen ist, fiel mir die sehr harmonische Obliegenheit zu, unsere drei Beiträge in der Form von Reduktionen zu einem einheitlichen und würdigen Ganzen zusammenzuschweißen. Dies habe ich beifolgend getan. Ich bitte Sie, die beiliegenden Blätter einer liebevollen und wenn irgend möglich recht schnellen Durchsicht zu unterziehen. Denn wie Sie sehen, habe ich die Gelegenheit benutzt, um eine ehrfurchtsvolle Verbeugung zu Hensels 70. Geburtstag zu machen, und der ist bereits am 29. Dezember. Wir bringen ein Festheft bei Crelle heraus (fast 2 Bände stark) und da soll dies nach Möglichkeit noch hinein. Da tut dann Eile sehr not...*

Die „Verbeugung“ vor Hensel bestand aus einer Widmung, die jedoch dann gemeinsam für alle Arbeiten an den Anfang des Henselheftes gesetzt wurde, also in der Arbeit selbst nicht mehr zu sehen ist.

Artin schreibt in seinem Brief, er sei „*gespannt, wie es weiter geht*“. Er realisiert also, dass es sich hier nicht um ein abschließendes Ergebnis handelt, sondern um den Anfang einer neuen Entwicklung. Aus heutiger Sicht können wir sagen, dass das Lokal-Global-Prinzip für Algebren, zusammen mit den Indexrechnungen von Herbrand und Chevalley, schließlich zu der Chevalleyschen Form der Klassenkörpertheorie im Rahmen der Theorie der

[8] Vgl. [Has75b], Band 1, Geleitwort, S. VIII–IX.

Idele [Che40] führten. Diese Entwicklung hat Hasse mit Interesse verfolgt und aktiv mitgestaltet.

40.2 Artins Stümpereien

Natürlich sind die Überlegungen, die Artin mitteilt, nicht als „Stümpereien“ anzusehen, wie er sie nennt. Sondern es handelt sich um weiterführende Kommentare, die zeigen, dass er die Bedeutung der Resultate von Brauer, Hasse und Noether und ihre Relevanz für die Klassenkörpertheorie sofort erkannt hat.

Artin benutzt das Normsymbol $\left(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}}\right)$, das Hasse in seiner Arbeit [Has30e] in Beantwortung einer Frage von Artin eingeführt hatte. Artin kannte und schätzte diese Arbeit, die er „*eine wundervolle Entdeckung*“ genannt hatte.[9] In dieser Arbeit hatte Hasse die Produktformel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

bewiesen. Die Artinsche Behauptung unter 1.) ist nun, dass das Normsymbol durch diese Produktformel charakterisiert ist.

Artin sagt nichts über den Beweis, den er sich dazu ausgedacht hat. Was Hasse betrifft, so wissen wir nicht, ob er die Artinsche Behauptung schon kannte, wie Artin vermutet. Aber wir können es wohl annehmen. Denn Hasse hatte ja in seiner amerikanischen Arbeit [Has32b] gezeigt, dass und wie das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}}\right)$ mit den Invarianten $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ der zyklischen Algebren A zusammenhängt. Die amerikanische Arbeit erschien zwar erst 1932, aber wir wissen, dass sie schon im Mai 1931 fertiggestellt und den Transactions of the AMS vorgelegt worden war. Hasse hatte eine Zusammenfassung seiner Resultate an Emmy Noether geschickt, und es ist anzunehmen, dass er auch Artin informiert hatte. Jedenfalls kannte Artin die Resultate dieser Arbeit, da er ja von den Invarianten spricht.

Damit läßt sich die Artinsche Behauptung über das Normsymbol zurückführen auf die Summenformel

$$\sum_{\mathfrak{p}} \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

für zyklische Algebren, also auch für alle einfachen Algebren, die ja nunmehr als zyklisch erkannt sind. Die obige Behauptung von Artin für das Normsym-

[9] Siehe 26.1.

bol lässt sich nunmehr auch dahingehend interpretieren, dass das Symbol der Hasseschen Invarianten durch die Summenformel charakterisiert ist. Das ist die Artinsche Behauptung unter Punkt 2.). Das steht zwar noch nicht in der amerikanischen Arbeit von Hasse, sondern wird erst in Hasses nächster Arbeit [Has33a], die er Emmy Noether zum 50. Geburtstag widmete, ausgesprochen und bewiesen. Aber die Bestandteile des Beweises sind alle schon in Hasses amerikanischer Arbeit [Has32b] enthalten.

Die unter Punkt 3.) angegebene Behauptung Artins über die Darstellbarkeit einer Algebra durch Kreiskörper ist, soweit wir wissen, in der Literatur nicht behandelt. Dass aber die Algebra einer zyklischen Kreiskörperalgebra *ähnlich* ist, wie Artin schreibt, steht ebenfalls in der Hasseschen Arbeit [Has33a]. Und zwar auch, ebenfalls im Einklang mit Artin, als Folge des Artinschen Lemmas zum Reziprozitätsgesetz, für das jedoch in [Has33a] ein einfacherer Beweis geliefert wird, der später, in den Marburger Vorlesungen [Has33c], noch einmal vereinfacht wird.

Das von Artin erwähnte „Schursche Theorem“ war damals noch kein Theorem, sondern eine *Vermutung* von Schur [Sch06]. Hasse konnte in [BHN32] nur zeigen, dass jede Darstellung einer Gruppe der Ordnung n im Körper der n^h-ten Einheitswurzeln realisierbar ist, für hinreichend großes h. Er hatte Richard Brauer gefragt, ob dieser den Satz auch für $h = 1$ beweisen könne. Das war nicht der Fall. Erst viel später, im Jahre 1945, gelang Brauer der Beweis [Bra45]. Kurz danach konnte Brauer sein Ergebnis verbessern, indem er zeigte, dass sogar der Körper der e-ten Einheitswurzeln ausreicht, wenn e der Exponent der Gruppe ist [Bra47a].

41 1932, Brief von Artin an Hasse

(undatiert) 1932 [1]

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihre beiden Briefe. Meine späte Antwort erklärt sich daraus, dass ich nochmals, aber vergeblich versucht habe nur eine Fortsetzung ein bisschen über 1 auszunützen.[2]

Ja, damit habe ich Ihnen meine Antwort schon gegeben. Man braucht die Fortsetzbarkeit bis $R(s) > 0$. Wenn Ihnen sehr viel daran liegt, bis $R(s) \geq \frac{1}{2}$, aber das nützt nicht einmal bei quadr[atischen] Körpern etwas, da man dann nur $R(s) > \frac{1}{2}$ hat. Die Methode ist die von Ihnen angegebene:

$\prod_\chi L(s,\chi) = e^{\sum\limits_{\mathfrak{p}^\nu \in H} \frac{h}{\nu N\mathfrak{p}^{\nu s}}}$, wo h die Ordnung der Gruppe. Also

$\prod L(s,\chi) =$ Dir[ichlet] Reihe mit pos[itiven] Koeff[izienten] also, wenn ein $L(1,\chi) = 0$ ist, bis 0 fortsetzbar. Reihe im Exponenten kleiner als Reihe für $\prod L(s,\chi)$, also konvergiert sie auch für $R(s) > 0$. Setze $s = \frac{1}{h}$ und behalte nur durch h teilbare ν. Dann alle $\mathfrak{p}$ und es konvergiert alle $\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{1}{\nu N\mathfrak{p}^\nu}$ was nicht der Fall ist.

Wollen Sie nur $R(s) \geq \frac{1}{2}$ benutzen, so teilen Sie die Charaktere in komplexe und reelle ein. Komplexe werden wie gewöhnlich erledigt. Jeder einzelne reelle Charakter ist Char[akter] für eine Gruppe H vom Index $h = 2$. Hier der vorige Beweis mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{h}$.

Mehr kann ich Ihnen leider nicht sagen. Ich hatte den Satz im vorigen Semester aus der Kl[assen]k[örper]-Th[eorie] bewiesen. Für die Kl[assen]k[örper] braucht man ihn ja nie.

[1] Dieser Brief ist undatiert und wurde von uns nach derselben Reihenfolge eingeordnet, die Hasse in seinen Korrespondenzordnern eingerichtet hatte. Allem Anschein nach wurde der Brief im Januar 1932 geschrieben.

[2] Siehe 41.1.

Sonst ist nichts Neues zu berichten. Im Kolleg bringe ich gerade Ihre $\mathfrak{p}$-adischen Schiefkörper um anschliessend Ihre neue Arbeit vorzutragen.[3] Mir ist dabei nichts weiter eingefallen ausser vielleicht dem Folgenden.

Ihre amerikanische Arbeit[4] ist doch fast ganz ohne Korrektur in Ordnung. Denn ist $\mathfrak{S}$ einfach und e idempotent aus $\mathfrak{S}$, so ist beinahe trivial dass $\mathfrak{S}$ ähnlich zu $e\,\mathfrak{S}\,e$ ist ob nun vollst[ändige] Matrixeinheiten gefunden werden können oder nicht. Und darauf kommt es schliesslich an.

Was die expliziten Formeln betrifft, so möchte ich als Desideratum vorschlagen: $\mathfrak{S}$ sei einfach mit Zentrum k und $c^{\nu}_{i\kappa}$ die Multiplikationskonstanten (ohne Zerfällen in verschränktes Produkt also $c^{\nu}_{i\kappa}$ in k). Man berechne aus den $c^{\nu}_{i\kappa}$ durch einen übersichlichen in $k_{\mathfrak{p}}$ verlaufenden Algorithmus die $\mathfrak{p}$-adischen Invarianten. Aber das ist vielleicht schon zuviel verlangt.[5]

Mit vielen Grüssen auch an Ihre Gattin und von meiner Frau

Ihr

Artin

---

[3]Siehe 41.2.1.
[4]Siehe 41.2.2.
[5]Siehe 41.2.3.

Kommentare zum Brief Nr. 41:

41.1 Fortsetzung der L-Reihen

Der Brief ist offenbar die Antwort auf eine Anfrage Hasses nach einem einfachen Beweis der Fortsetzbarkeit der Weberschen L-Reihen. Wie es scheint, bereitet Hasse seine Vorlesung über Klassenkörpertheorie vor, die er im Sommersemester 1932 dann gehalten hat. Es geht um die Fortsetzbarkeit der L-Reihen $L(s,\chi)$ auf die gesamte rechte Halbebene. Dabei ist eine Kongruenzgruppe H in k gegeben, und χ ist ein Charakter der zugehörigen Faktorgruppe nach H. Die Situation ist also wie im Brief Nr. 38 vom 16. 6. 1931, vgl. 38.3.1. Nur ist jetzt kein Oberkörper K von k vorgegeben.

In der Ausarbeitung seiner Vorlesung [Has33c] diskutiert Hasse die Frage, ob $L(1,\chi) \neq 0$ ist für $\chi \neq 1$. Er stellt fest, dass es höchstens einen Charakter $\chi \neq 1$ geben kann, für welchen $L(1,\chi) = 0$ ist, und dieser müsste reell sein. Dies aber tritt nicht ein, sagt Hasse:

> „*Es gibt zwei wesentlich verschiedene Methoden zum Beweis. Der eine, kürzere, ist funktionentheoretisch und beruht auf einem Satz über Dirichletsche Reihen mit positiven Koeffizienten. Man braucht aber überdies die Fortsetzbarkeit aller L-Funktionen in die rechte Halbebene, die nur mit großem Aufwand zu gewinnen ist. Die andere Methode ist arithmetisch-körpertheoretisch und führt in die Klassenkörpertheorie. Diese letztere werden wir anwenden.*“

Wie es scheint, möchte Hasse wissen, ob man auch ohne Klassenkörpertheorie, aber auch ohne großen sonstigen Aufwand, einen Beweis für das Nichtverschwinden der L-Funktionen für $s = 1$ und $\chi \neq 1$ finden kann. Dann würde ja daraus nach der Dirichletschen Methode direkt abzulesen sein, dass die Primideale in H und auch die in jeder Nebenklasse nach H die Dichte $\frac{1}{h}$ besitzen. Das konnte ja Artin nach seiner im Brief Nr. 38 angegebenen Methode nur dann, wenn er den dort mit K bezeichneten Erweiterungskörper hat.

Artin hat, wie wir sehen, auch keinen Erfolg bei seinen Versuchen gehabt. Wenn er schreibt, dass man nur die Fortsetzbarkeit für Realteil $R(s) \geq \frac{1}{2}$ benötige, dann bezieht er sich auf die übliche Schlussweise, dass man ja nur quadratische, also reelle Charaktere χ in Betracht zu ziehen braucht. Für diese wäre es ausreichend, wenn man $s = \frac{1}{2}$ setzen könnte.

41.2 Algebren

41.2.1 Artins Kolleg

Der zweite Teil des vorliegenden Briefes bezieht sich auf Algebren. Beachte: Zwar ist dieser Brief nicht datiert, er wurde aber allem Anschein nach im Januar 1932 verfasst. Zu diesem Zeitpunkt war es schon bekannt, dass jede zentrale einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist. Das war nämlich im November 1931 von Hasse, gemeinsam mit Richard Brauer und Emmy Noether bewiesen worden, und Artin hatte davon Kenntnis. Siehe den vorangehenden Brief Nr. 40. Damals hatte Artin geäußert, er sei gespannt, wie es weiter geht.

Und er hoffte, dass Hasse seinen Satz „*vermutlich bald publizieren*“ werde. In der Tat: Es war Hasse gelungen, die Arbeit von Brauer, Hasse und E. Noether [BHN32] noch in dem Hensel-Festband des Crelleschen Journals unterzubringen, und dieser Band trägt das Erscheinungsdatum vom 6. Januar 1932. Dieser Band ist offensichtlich schon in Hamburg eingetroffen, sodass Artin den Text der Arbeit kennt und demnach sagen kann, er werde in seinem Kolleg „*Ihre neue Arbeit*“ vortragen.[6]

Zuvor aber, so berichtet Artin, bringt er in seinem Kolleg die Hassesche Arbeit über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper. Es handelt sich um die Arbeit [Has31b], die Artin schon früher in seinem Brief Nr. 35 vom 27. 11. 1930 angesprochen hatte; vgl. 35.2. Hasse hatte dort gezeigt, dass jeder $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper zyklisch ist. Gleichzeitig hatte sich ergeben, dass im Lokalen ein Zerfällungskörper K allein durch seinen Grad gekennzeichnet ist, genauer: K ist dann und nur dann ein Zerfällungskörper, wenn sein Grad ein Vielfaches des Schurschen Index des Schiefkörpers ist. Dieser Satz ist der Schlüssel für den Zyklizitätssatz von Brauer-Hasse-Noether, und daher ist es verständlich, dass Artin dieses Ergebnis in seinem Kolleg behandeln will, bevor er an die neue Arbeit von Hasse geht.

41.2.2 Die amerikanische Arbeit

Bei der „amerikanischen Arbeit“ handelt sich um Hasses Arbeit [Has32b], die 1932 in den Transactions of the American Mathematical Society erschien. Darin entwickelt Hasse die Theorie der zyklischen Algebren über Zahlkörpern. Hasse hatte die Arbeit schon im Mai 1931 eingesandt, jedoch erschien

[6]Einen Sonderdruck der Arbeit erhielt Artin wohl erst später, denn erst im nächsten Brief vom 9. 3. 1932 bedankt er sich für den Sonderdruck.

sie erst nach einiger Verzögerung im Jahre 1932. Zum Zeitpunkt der Einsendung stand es noch nicht fest, dass *jede* einfache Algebra über einem Zahlkörper zyklisch ist, wie es Hasse vermutete. Bei Erscheinen der amerikanischen Arbeit war der Beweis jedoch schon gelungen, sodass also die Arbeit nunmehr als eine Strukturtheorie *aller* einfachen Algebren über Zahlkörpern angesehen werden konnte.

Aufgrund eines Missverständnisses hatte man versäumt, die Korrekturbogen von [Has32b] an Hasse zu senden, sodass er keine Gelegenheit mehr hatte, die vielen Druckfehler zu verbessern, und er konnte auch keine Änderungen oder Zusätze mehr anbringen. Daher sah sich Hasse genötigt, eine gesonderte Note hinterher zu publizieren, in welcher er auf 4 Seiten alle Korrekturen und Änderungen auflistete [Has32a].

In einem gesonderten Kapitel von [Has32b] hatte Hasse die Noethersche Theorie der Faktorensysteme und der verschränkten Produkte dargestellt, denn es war nicht anzunehmen, dass diese Theorie bei den amerikanischen Lesern als bekannt vorausgesetzt werden konnte. Emmy Noether hatte darüber zwar 1929 in ihrer Göttinger Vorlesung vorgetragen und es gab eine (von Deuring angefertigte) Vorlesungsausarbeitung, aber eine Publikation war noch nicht erfolgt. Hasse hatte Emmy Noether gefragt, ob sie mit der Aufnahme ihrer Theorie in seine Arbeit einverstanden sei, und sie hatte zugestimmt. Sie hatte auch das Manuskript zur amerikanischen Arbeit Hasses gelesen und kommentiert; vgl. [LR06].

Im vorliegenden Brief von Artin geht es um eine Ungenauigkeit in einem Beweis, von der Hasse meinte, dass sie ihm unterlaufen sei. Es handelt sich um die Frage, wie sich ein verschränktes Produkt bei Grundkörpererweiterung verhält. Gegeben sei eine Galois-Erweiterung $K|k$ mit Galoisgruppe G, sowie eine zentrale Algebra A über k, die sich als verschränktes Produkt von K mit einem Faktorensystem $a = \{a_{\sigma,\tau}\}$ aus $H^2(G, K^\times)$ darstellen lässt: $A = (K, a)$. Es sei nun k' ein Oberkörper von k und Kk' das Kompositum. Die Galoisgruppe von $Kk'|k'$ ist eine Untergruppe der Galoisgruppe von $K|k$; es bedeute a' die *Restriktion* von a auf diese Untergruppe. Dann gilt

$$(K, a) \otimes_k k' \sim (Kk', a')$$

wobei $\sim$ die Äquivalenz (im Sinne der Brauergruppe) von Algebren bedeutet.

Heute gehört dieser Satz zu den funktionalen Grundtatsachen über die Brauergruppe und deren Darstellung im Rahmen der Kohomologie. Damals musste das explizit vorgerechnet werden, wobei die entsprechenden Begriffsbildungen noch nicht zum Fundus der bekannten Grundkenntnisse gerechnet werden konnten. Hierbei war Hasse offenbar eine Lücke in seiner Beweiskette

aufgefallen. Er hat diese dann in der Korrektur-Note [Has32a] korrigiert.[7] Offenbar hatte Hasse dies an Artin geschrieben, und Artin antwortet nun, dass es darauf gar nicht ankomme, sondern dass die entsprechende Behauptung in [Has32b] auch ohne weitere Erklärung „beinahe trivial" ist.

41.2.3 Explizite Formeln

Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, dass Hasse mit einem abstrakten Existenzbeweis in der Zahlentheorie niemals ganz zufrieden war, sondern er wünschte sich einen solchen ergänzt durch explizite Algorithmen, wenn irgend möglich. So auch hier, in der Theorie der einfachen Algebren.

Da nun feststand, dass jede einfache Algebra über einem Zahlkörper eine Darstellung als zyklisches verschränktes Produkt besitzt, so entstand die Aufgabe, eine solche Darstellung explizit herzustellen, wobei die Algebra gegeben wird z.Bsp. durch eine Basis über ihrem Zentrum, zusammen mit den zugehörigen Multiplikationskonstanten.

Es ist anzunehmen, dass Hasse dieses Problem in seinem vorangegangenen Brief an Artin erwähnt hatte, und dass Artins „*Desideratum*" eine Antwort darauf ist.

Bemerkenswert ist dabei *erstens*, dass Artin direkt auf die lokalen $\mathfrak{p}$-adischen Invarianten der Algebra zusteuert. Diese Invarianten waren von Hasse in seiner amerikanischen Arbeit [Has32b] definiert worden und er hatte gezeigt, dass diese ein vollständiges Invariantensystem für die Algebra liefern (bis auf Äquivalenz von Algebren im Sinne der Brauergruppe). Artin kannte also die amerikanische Arbeit oder zumindest ihren Inhalt.

Zweitens aber finden wir es bemerkenswert, dass Artin unmissverständlich sagt, dass die $\mathfrak{p}$-adische Invariante der Algebra mit Hilfe eines $\mathfrak{p}$-*adischen Algorithmus* berechnet werden soll, der also im $\mathfrak{p}$-adischen Grundkörper $k_\mathfrak{p}$ verläuft. Das war deshalb von Bedeutung, weil ja zu dem damaligen Zeitpunkt die Hassesche Definition der lokalen Invarianten noch nicht durch lokale Überlegungen zustande kam, jedenfalls nicht für die verzweigten Stellen. Denn Hasse hatte seine Definition der Invariante auf die vorangegangene Definition des lokalen Normsymbols $\left(\frac{\alpha,K}{\mathfrak{p}}\right)$ gegründet, und diese konnte damals noch nicht rein lokal gegeben werden, sondern sie beruhte auf dem globalen Artinschen Reziprozitätsgesetz (siehe 26.1). Wenn also Artin jetzt einen „*in $k_\mathfrak{p}$ verlaufenden*" Algorithmus anvisiert, so sagt er damit gleichzeitig, dass es einen solchen Algorithmus geben müsse, d.h. dass die Definition der lokalen

[7] Siehe [Has32a], S.729, Eintragung zu „Page 197".

Invarianten der Algebra rein lokal gegeben werden könne.

Das war allerdings die allgemeine Meinung schon vorher gewesen, und auch Hasse selbst hatte dies als wünschenswert bezeichnet; vgl. 26.1 und 26.2. Es ist nun bemerkenswert, dass es Hasse schon wenige Wochen nach diesem Brief von Artin glückte, eine rein lokale Definition des Normsymbols zu geben. Dies übernahm er in die Arbeit [Has33a], die er Emmy Noether widmete und deren Manuskript er zum 23. März 1932, also ihrem 50. Geburtstag, an Emmy Noether schickte. Die entscheidende Anregung für die lokale Definition des Normsymbols scheint jedoch nicht von Artin, sondern von Emmy Noether gekommen zu sein, die schon seit etwa einem Jahr Hasse bedrängt hatte, danach zu suchen.[8]

Aber die Möglichkeit einer lokalen Definition des Normsymbols und damit der Hasseschen Invariante führt nicht automatisch zu einem expliziten und „*übersichtlichen*" $\mathfrak{p}$-adischen Algorithmus zur Berechung der Invariante, wie sich ihn Artin wünscht. Die Situation stellt sich wie folgt dar:

Es sei $k = k_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Körper und $\mathfrak{S}$ eine zentrale einfache Algebra über k. Nach der Hasseschen Definition in [Has32b] hat man zunächst denjenigen maximalen Teilkörper Z von $\mathfrak{S}$ aufzusuchen, der unverzweigt ist. Dieser ist eindeutig bestimmt (bis auf innere Automorphismen von $\mathfrak{S}$). Danach hat man $\mathfrak{S}$ als verschränktes Produkt von Z mit seiner Galoisgruppe darzustellen; letztere ist zyklisch und wird durch den zugehörigen Frobenius-Automorphismus erzeugt. Dieses verschränkte Produkt wird somit gegeben durch ein Element $a \in k$, das modulo Normen aus Z bestimmt ist, sodass es nur auf seinen Wert $v(a)$ in der kanonischen Bewertung von k ankommt. Die lokale Invariante von $\mathfrak{S}$ ist dann der Quotient von $v(a)$ und dem Grad n von Z.

Was also Artin möchte, ist ein Algorithmus, der aus den gegebenen Multiplikationskonstanten c_{ik}^{ν} von A ein solches Element a und seinen Wert $v(a)$ modulo n zu berechnen gestattet.

Aus dem letzten Satz in Artins Brief können wir entnehmen, dass sich Artin bewusst war, dass es sich um eine schwierige Aufgabe handelt. Auch Hasse wird das gewusst haben. Immerhin hat Hasse dieses Desideratum im Auge behalten. Viele Jahre später hat er seinem Schüler Herbert Benz empfohlen, dieser Sache nachzugehen. Benz hat das getan und im Jahre 1967 in seiner Hamburger Habilitationsschrift erste Ergebnisse in dieser Richtung publiziert [Ben67]. Benz geht dabei davon aus, dass die Algebra bereits als

[8] Dies geht aus dem Briefwechsel Hasse-Noether hervor; siehe [LR06]. Hasse hat das später in mündlicher Unterhaltung auch so geschildert.

verschränktes Produkt eines galoisschen Körpers K mit seiner Galoisgruppe gegeben ist. Aber K braucht nicht unverzweigt zu sein, und somit entsteht die Aufgabe, das zu K gehörige Faktorensystem $c_{\sigma,\tau}$ umzurechnen auf das zu Z gehörige, also die oben definierte Zahl a des Zentrums k zu berechnen.

Die Methoden, die Benz dazu vorschlägt, sind durchaus neuartig und bilden eine wichtige Ergänzung zur Arithmetik der (lokalen) Algebren. Bisher hatte man nur *maximale* Ordnungen in Betracht gezogen. Nunmehr aber zeigt sich durch die Resultate von Benz, dass es für gewisse Aufgaben zweckmäßig sein kann, auch nichtmaximale Ordnungen in Betracht zu ziehen, nämlich die von ihm so genannten „Hauptordnungen", die heute unter dem Namen „hereditäre Ordnungen" bekannt sind. Jedem maximalen Teilkörper K von $\mathfrak{S}$ lässt sich nämlich eine eindeutig bestimmte Hauptordnung von $\mathfrak{S}$ zuordnen, aus deren Arithmetik sich die Struktur des zugehörigen Faktorensystems weitgehend ablesen läßt. Wenn $K = Z$ der unverzweigte Körper ist, dann handelt es sich um eine Maximalordnung, aber das gilt nicht allgemein. Wir können hier nicht auf die Details der Benzschen Arbeit eingehen, sondern wollen nur darauf hinweisen, dass es Benz damit gelingt, im Falle eines zahm verzweigten Körpers K die ihm von Hasse gestellte Aufgabe zu lösen, nämlich die zu K gehörige Darstellung von $\mathfrak{S}$ als verschränktes Produkt zu transformieren in die Hassesche Normalform, aus der die Invariante von $\mathfrak{S}$ abgelesen werden kann. Allerdings wird dies in [Ben67] nur skizziert. Benz kündigte an, er werde die Arbeit fortsetzen und insbesondere auch den wild verzweigten Fall erledigen. Aber der zweite Teil der Arbeit ist nie erschienen. Es würde sich lohnen, diese Sache weiter zu verfolgen.[9]

[9]Siehe dazu auch [Ben66], sowie die gemeinsame Arbeit [BZ85] von Benz und Zassenhaus.

42 09.03.1932, Brief von Artin an Hasse

9. März 1932

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für den Sonderabdruck und Ihren Brief. Ich habe inzwischen auch über die Dinge nachgedacht, formuliere sie aber noch anders. Ich möchte Ihnen darüber berichten bemerke aber dass Sie die Formeln noch in Ihre Schreibweise umschreiben müssen, da ich die Reihenfolge verkehrt nehme, mich aber daran gewöhnt habe.

1.) K Körper, $\mathfrak{G}$ Gruppe, $c_{\sigma,\tau}$ Faktorsystem zu u_σ mit Relationen

$$u_\sigma \alpha = \alpha^\sigma u_\sigma \,; \quad u_\sigma u_\tau = c_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}\,.$$

Assoziativitätsrelation

$$c_{\sigma,\tau} c_{\sigma\tau,\varrho} = c^\sigma_{\tau,\varrho} c_{\sigma,\tau\varrho}\,.$$

Übergang von u_σ zu $v_\sigma = \delta_\sigma u_\sigma$ führt auf das Faktorsystem

$$c'_{\sigma,\tau} = \frac{\delta_\sigma \delta^\sigma_\tau}{\delta_{\sigma\tau}} c_{\sigma,\tau}\ .$$

Ich schreibe kurz für das Faktorsystem

$$\frac{\delta_\sigma \delta^\sigma_\tau}{\delta_{\sigma\tau}} = F(\delta_\sigma)\ .$$

Die Elemente können Zahlen oder Ideale sein.

2.) Setzen Sie $\prod\limits_\tau c_{\sigma,\tau} = a_\sigma$; $\prod\limits_\sigma c_{\sigma,\tau} = b_\tau$, so ergibt die Assoziativitätsrelation, wenn man die Produkte über σ oder über τ oder über ϱ durch die ganze Gruppe bildet, die drei folgenden Relationen (N = Norm K/k):

(1) $\quad b_\tau b_\varrho = N(c_{\tau,\varrho}) b_{\tau\varrho} \quad$ oder $\quad N(c_{\tau,\varrho}) = \dfrac{b_\tau b_\varrho}{b_{\tau\varrho}}$

(2) $\quad a_\sigma b_\varrho = b^\sigma_\varrho a_\sigma \quad$ oder $\quad b^{\sigma-1}_\varrho = 1\,,$ also ist b_ϱ ambig.

(3) $\quad c^n_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau} = a^\sigma_\tau a_\sigma \quad$ oder $\quad \boxed{c^n_{\sigma,\tau} = \dfrac{a_\sigma a^\sigma_\tau}{a_{\sigma\tau}}}$

Die dritte Relation ist die wichtigste. Sie zeigt wohl am schnellsten und leichtesten sowohl für Zahlen wie für *Ideale* den Satz, dass die n-te Potenz jedes Faktorensystems $\sim$ (1) ist.

3.) $F(\delta_\sigma) = 1 \iff \delta_\sigma = a^{1-\sigma}$ wo $a = \sum_\sigma \Gamma^\sigma \delta_\sigma \neq 0$.

Sowohl für Zahlen wie für Ideale.[1]

4.) Unter dem $\mathfrak{p}$-Beitrag eines idealen F[aktor]s[ystems] verstehe ich den Beitrag, den die *Teiler* von $\mathfrak{p}$ zu $c_{\sigma,\tau}$ liefern. Ein Faktorsystem das nur aus $\mathfrak{p}$-Teilern besteht nenne ich ein primäres. Dann ist jedes Faktorsystem eindeutig Produkt von zu verschiedenen $\mathfrak{p}$ gehörigen primären.[2]

5.) Ich bestimme die Gruppe aller $\mathfrak{p}$-primären Faktorensysteme modulo den $\sim$ (1):

Wegen (3) ist $c^n_{\sigma,\tau} = \dfrac{a_\sigma a^\sigma_\tau}{a_{\sigma\tau}}$ für jedes Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$. Ist darin a_σ beliebiges Ideal aber so, dass eine n-te Idealpotenz herauskommt, so ist das so bestimmte $c_{\sigma,\tau}$ ein ideales Faktorsystem. Man setze:

$$a_\sigma = \mathfrak{P}^{\sum\limits_\varrho m^\varrho_\sigma \cdot \varrho}, \qquad m^\varrho_\sigma \quad \text{ganze Zahlen.}$$

ϱ durchlaufe ein Vertretersystem von $\mathfrak{G}$ mod $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$, also

$$\mathfrak{G} = \sum \varrho \mathfrak{Z}_\mathfrak{p} \qquad \text{(ich potenziere } (\mathfrak{P}^\sigma)^\tau = \mathfrak{P}^{\tau\sigma})$$

das genügt. Ich verabrede noch, dass m^ϱ_σ von ϱ nur gemäss der Restkl[asse] abhängen soll. Ist also z beliebiges Element von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ = Zerlegungsgruppe, so soll gelten

$$(4) \qquad m^{\varrho z}_\sigma \equiv m^\varrho_\sigma \pmod n$$

Damit eine n-te Potenz herauskommt muss gelten:

$$\sum m^\varrho_\sigma \varrho + \sum m^\varrho_\tau \sigma\varrho - \sum m^\varrho_{\sigma\tau}\varrho \equiv 0 \pmod n$$

Dabei sind die ϱ nur mod $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ zu verstehen. Ersetzt man im mittleren Glied ϱ durch $\sigma^{-1}\varrho$, so erhält man:

$$(5) \qquad m^\varrho_\sigma + m^{\sigma^{-1}\varrho}_\tau - m^\varrho_{\sigma\tau} \equiv 0 \pmod n$$

und man hat die Kongruenzen (4), (5) aufzulösen.

[1] Artin erklärt nicht, was dabei Γ sein soll. Offenbar ist Γ ein Element (Zahl oder Ideal), welches so zu wählen ist, dass das dadurch definierte Element $a \neq 0$ ist.

[2] Hier bedeutet $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Grundkörpers k. Mit „Teiler“ meint Artin die Primteiler von $\mathfrak{p}$ im Oberkörper K. Weiter unten in 5.) wählt Artin einen dieser Teiler $\mathfrak{P}$ aus. Die zugehörige Zerlegungsgruppe bezeichnet er aber mit $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$.

Man setze in (5) $\varrho = 1$ und erhält[3], wenn man kurz m_σ statt m^1_σ schreibt:

$$m_\tau^{\sigma^{-1}} \equiv m_{\sigma\tau} - m_\sigma \qquad (\mathrm{mod}\ n) \qquad \text{also}$$

(6) $$m_\tau^\sigma \equiv m_{\sigma^{-1}\tau} - m_{\sigma^{-1}} \qquad (\mathrm{mod}\ n).$$

Setzt man (6) in (5) ein, so ist (5) identisch befriedigt. Man braucht also nur noch (4). Setzt man (6) in (4) ein, und berücksichtigt, dass $\sigma^{-1}\tau$ und σ^{-1} beliebige Paare sind, so folgt:

(7) $$m_{z\sigma} - m_{z\tau} \equiv m_\sigma - m_\tau \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

für jedes $z \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$. Wenn

(8) $$h_\sigma = m_\sigma - m_1$$

gesetzt wird, so folgt

(7′) $$h_{z\sigma} - h_{z\tau} \equiv h_\sigma - h_\tau \ .$$

Setzt man $\tau = 1$, so folgt

(9) $$h_{z\sigma} \equiv h_z + h_\sigma \quad (\mathrm{mod}\ n) \quad z \text{ aus } \mathfrak{Z}_\mathfrak{p}\ , \sigma \ \text{ beliebig.}$$

Aus (9) folgt (7′) wieder identisch. Aus (8) folgt

(10) $$h_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

Jetzt ist im Ganzen:

(11) $$m_\tau^\sigma \equiv h_{\sigma^{-1}\tau} - h_{\sigma^{-1}} \quad (\mathrm{mod}\ n)\ ,$$

wobei (4) und 5 gelten wenn 9 gilt.

(9) kann, wenn die Werte h_z bekannt sind, als Definition der Werte für die Restklasse $\mathfrak{Z}\sigma$ gelten wenn h_σ bekannt ist. Dann braucht also (9) nur noch für den Spezialfall $\sigma \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ zu gelten. Also muss h_z *eine isomorphe Abbildung* von $\mathfrak{Z}$ auf[4] die additive Gruppe der Restklassen mod n bedeuten. Das ist alles was bleibt.

Setzen wir jetzt (11) ein in a_σ so kommt, wenn wir n-te Potenzen zu einer n-ten Idealpotenz b_σ^n vereinigen: (Wir rechnen ja mod n.)

$$a_\sigma = b_\sigma^n\, \mathfrak{P}^{\sum h_{\varrho^{-1}\sigma} \cdot \varrho \ - \sum h_{\varrho^{-1}} \cdot \varrho}$$

[3] Artin schreibt $\sigma = 1$; das ist offensichtlich ein Schreibfehler.
[4] Artin meint eine homomorphe Abbildung *in* die Gruppe der Restklassen modulo n.

Wobei ϱ im Index ein *ganz bestimmtes* Vertretersystem durchläuft, sonst aber nur mod $\mathfrak{Z}$ zu gehen braucht. Wir addieren im Exponenten die Summe

$$\sum h_{\varrho^{-1}\sigma}\varrho = \sum h_{\overline{(\sigma^{-1}\varrho)^{-1}}}\,\varrho\,,$$

wo $\bar{\tau}$ der ausgezeichnete Vertreter der Klasse von τ ist:

$$a_\sigma = b_\sigma^n \mathfrak{P}^{(\sigma-1)\sum h_{\varrho^{-1}}\varrho + \sum(h_{\varrho^{-1}\sigma} - h_{\overline{(\sigma^{-1}\varrho)^{-1}}})\,\varrho},$$

nun ist $\sigma^{-1}\rho = \overline{(\sigma^{-1}\rho)} \cdot z^{-1}$ mit einem bestimmten z aus $\mathfrak{Z}$, also ist

(12) $$\boxed{\begin{aligned} a_\sigma &= b_\sigma^n c^{1-\sigma} \cdot \mathfrak{P}^{\sum h_z \cdot \varrho} \\ z &= \varrho^{-1}\sigma\overline{(\sigma^{-1}\varrho)} \end{aligned}}$$

Geht man die z, die auftreten können durch, so kommt nach Reidemeister (es sind seine Erzeugenden) sicher Erzeugende von $\mathfrak{Z}$ darunter vor. Ist also h_z nicht die identische Darstellung in den Restklassen, so ist der Exponent nicht immer $\equiv 0 \pmod{n}$. Ein a_σ der Form $b_\sigma^n c^{1-\sigma}$ mit beliebigem b_σ und c liefert aber, wie Sie sofort sehen, lauter $h_z \equiv 0 \pmod{n}$.

Also ist a_σ modulo $b_\sigma^n c^{1-\sigma}$ genau durch die Darstellung h_z von $\mathfrak{Z}$ in den Restklassen mod n gegeben, und dem Produkt von zwei a_σ-Vektoren ist die Summe der h_z zugeordnet.

Ein a_σ der Form $b_\sigma^n c^{1-\sigma}$ liefert nun gemäss (3) ein $c_{\sigma,\tau} = \dfrac{b_\sigma b_\tau^\sigma}{b_{\sigma,\tau}} \sim 1$. Also ist die Gruppe der $\mathfrak{p}$-primären $c_{\sigma,\tau}$ mod den ~ 1 isomorph mit der Gruppe aller Darstellungen von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$ durch Restklassen modulo n. Diese Gruppe aber ist isomorph mit der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$. Also:

Die gesuchte Gruppe der $\mathfrak{p}$-primären $c_{\sigma,\tau}$ ist isomorph mit der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}_\mathfrak{p}$.

Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ kein Diskriminantenteiler, so ist die Gruppe *cyklisch* von der Ordnung f. Dann ist also f die kleinste Zahl so dass die f-te Potenz jedes $\mathfrak{p}$-primären Faktorsystems ~ 1 ist.

Nun ist es wohl klar wie das Zerlegungsgesetz lautet:

Es sei $\mathfrak{f}$ ein passender Modul. $\mathfrak{p}$ zerfällt dann und nur dann in Primideale f-ten Grades, wenn f die Ordnung der $\mathfrak{p}$-primären Faktorensysteme modulo der Gruppe

$$\equiv F(a_\sigma) \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist. $\mathfrak{p}$ zerfällt vollständig, wenn jedes $\mathfrak{p}$-primäre Faktorsystem $\equiv F(a_\sigma) \pmod{\mathfrak{f}}$ ist.

Ich habe noch keine Zeit gehabt über den Beweis nachzudenken der nicht schwer sein kann. Ich habe nur den abelschen Spezialfall Gruppe (2,2) und die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 geprüft also den Fall des kubischen Körpers. Es ist alles in Ordnung und stimmt in diesen Fällen. Im abelschen Fall lässt sich alles im Grundkörper normieren und führt auf die alte K[lassen]körpert[heorie.]

Im nicht abelschen Fall kommt einfach die alte Methode heraus die Klassenkörpertheorie anzuwenden auf Unterkörper in bezug auf die der ganze Körper cyklisch ist. So muss auch der Beweis mühelos herauskommen. Es ergibt sich also nur das eine Neue am Zerlegungsgesetz, dass es invariant formuliert und die verschiedenen Gruppen in den verschiedenen Körpern in einheitlichen und übersichtlichen Zusammenhang gebracht sind.

Dagegen kann natürlich keine Rede von einer Isomorphie sein. Im symm[etrischen] Fall 6 kommen für die Faktorensysteme modulo $F(a_\sigma)$ (mod $\mathfrak{f}$) 6 Klassen heraus (natürlich cyklisch):

$$1, K, K^2, K^3, K^4, K^5.$$

Dabei sind 1 die vollst[ändig] zerfallenen, K^3 die mit $f = 2$ und K^2 und K^4 die mit $f = 3$. Interessanterweise bleiben K und K^5 *frei* von primären $c_{\sigma,\tau}$, wie aus dem Zerl[egungs]ges[etz] folgt, da es keine unzerlegt bleibenden $\mathfrak{p}$ gibt. Wohl aber gibt es in K und K^5 Faktorensysteme. Etwa das Produkt eines primären der Ordnung 2 mit einem der Ordnung 3. In diesem Fall ist wie gesagt alles bewiesen.

Bei einer endgültigen Darstellung werden natürlich die Rechnungen dann zu vermeiden sein, wenn auf die abstrakte Bedeutung des verschränkten Produkts mit Idealen eingegangen wird. Die Bedeutung ist diese:

Sei $\mathfrak{N}$ die Gruppe aller Ideale, $\mathfrak{S}$ die Gruppe aller au_σ. Dann ist $\mathfrak{S}$ gekennzeichnet als Erweiterung von $\mathfrak{N}$ die

1.) $\mathfrak{N}$ als Normalteiler enhält,

2.) $\mathfrak{S}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{G}$,

3.) Die Nebengruppen liefern in $\mathfrak{N}$ die Isomorphismen von $\mathfrak{G}$.

Die Komposition der Faktorensysteme lässt sich zwar invariant in naheliegender Weise deuten, aber nicht schön.

Selbst werden Sie sich wohl überlegt haben, wie die Faktorensysteme abzuändern sind wenn man Erzeugende und Relationen einführt. Das übliche Faktorsystem ist nur der Fall der Cayleyschen Gruppentafel.

Ich habe den Eindruck, dass noch etwas *ganz Neues* hinzukommen muss um zu Isomorphie und zu Existenzsätzen zu kommen. Dieses Zerlegungsgesetz ist nur eine etwas verschönte Zusammenfassung der Anwendung der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie .

Mit vielen herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr. 42:

42.1 Der erste Brief über Faktorensysteme.

Dieser Brief ist der Beginn einer Serie von 5 Briefen, in denen Artin die Grundregeln des Rechnens mit Faktorensystemen entwickelt. Faktorensysteme waren aufgetaucht in der Theorie der Algebren, oder „hyperkomplexen Systeme“ wie Emmy Noether sie nannte. In ihrer Göttinger Vorlesung 1929 hatte Noether diese Faktorensysteme eingeführt und gezeigt, dass sich jede einfache zentrale Algebra A als verschränktes Produkt mit einem geeigneten Faktorensystem darstellen läßt.[5] Ist k der Grundkörper und $K|k$ ein galoisscher Zerfällungskörper mit Galoisgruppe $\mathfrak{G}$, so ist A eindeutig (bis auf Äquivalenz) charakterisiert durch das zugehörige Element in der Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{G}, K^\times)$. Zur damaligen Zeit gab es jedoch noch keine algebraische Kohomologietheorie, und daher rechnete man explizit mit Faktorensystemen modulo zerfallenden Faktorensystemen. Emmy Noether hat ihre Theorie der Faktorensysteme niemals publiziert. Sie hatte jedoch Hasse die Erlaubnis gegeben, diese Theorie in seiner amerikanischen Arbeit über zyklische Algebren darzustellen. Diese Arbeit ist 1932 in den Transactions of the American Mathematical Society erschienen [Has32b]. Später ging die Theorie der Faktorensysteme in den Ergebnisbericht von Deuring über Algebren ein [Deu35a].

Wir können annehmen, dass Artin über die Noethersche Theorie informiert war.

Seit seiner Studienzeit war es für Artin ein zentrales Problem, an das Zerlegungsgesetz für nicht-abelsche galoissche Erweiterungen zu gelangen. Damals hegte man die Hoffnung, dass die Faktorensysteme einen Zugang zu dieser Frage öffnen können. Das war sicherlich eine Motivation Artins bei seinen Rechnungen mit Faktorensystemen. Wenn sich Artin in seinem Brief bei Hasse für „den Sonderabdruck“ bedankt, dann handelt es sich wahrscheinlich um den Sonderabdruck der Arbeit von Brauer-Hasse-Noether über das Lokal-Global-Prinzip für Algebren; die Arbeit war in dem Hensel-Festband des Crelleschen Journals Anfang Januar 1931 erschienen. Am Schluss dieser Arbeit werden Folgerungen für galoissche, nicht notwendig abelsche Erweiterungen von Zahlkörpern diskutiert, und es heißt:

> *„Man kommt so zu Sätzen, die als Verallgemeinerung von Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie... auf allgemeine relativ-galoissche*

[5] Bis auf Äquivalenz im Sinne der Brauerschen Gruppe.

Zahlkörper anzusehen sind.“

Wahrscheinlich hatte Hasse in seinem Brief an Artin hierauf hingewiesen und auch noch ein paar weitergehende Überlegungen mitgeteilt. So ist es zu verstehen, wenn Artin sagt, er habe „inzwischen auch über die Dinge nachgedacht“.

Der von Hasse in der genannten Crelle-Arbeit aufgestellte Zerlegungssatz für eine galoissche Zahlkörpererweiterung $K|k$ mit Gruppe $\mathfrak{G}$ bezieht sich auf die Brauer-Gruppe $Br(K|k)$ der von K zerfällten einfachen zentralen k-Algebren. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, das in K nicht verzweigt ist, und f der Relativgrad der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K. Dann gilt:

> **Zerlegungssatz**: *f ist der kleinste Exponent, für den $A_{\mathfrak{p}}^f \sim 1$ für alle Algebren $A \in Br(K|k)$.*

Allerdings entspricht dieser Satz nicht recht den Erwartungen, die man an die Klassenkörpertheorie galoisscher Erweiterungen stellte. Die Brauergruppe $Br(K|k)$ ist eine unendliche Gruppe (falls nicht der triviale Fall $K = k$ vorliegt), und man kann daher $Br(K|k)$ nicht als äquivalent für die Strahlklassengruppen aus der abelschen Klassenkörpertheorie ansehen. Man suchte daher, ausgehend von dem obigen Zerlegungssatz, nach anderen Beschreibungen der Zerlegung von Primidealen $\mathfrak{p}$, d. h. nach einer Beschreibung des Relativgrades f von $\mathfrak{p}$. Das ist der Ausgangspunkt der Artinschen Rechnungen.

Diese Rechnungen zeichnen sich aus durch ihren abstrakten Ansatz. Artin abstrahiert von der Deutung der Faktorensysteme als Bestimmungsstücke für Algebren, und er benutzt lediglich die formalen Rechenregeln.Das kommt besonders deutlich zum Ausdruck in dem Beweis der Formel (3) in Abschnitt 2.), welche besagt, dass die Gruppenordnung die 2-Kohomologie annulliert. Diese Rechnung ist nichts anderes als eine Übung im Rechnen mit 2-Kohomologie in einem (multiplikativ geschriebenen) $\mathfrak{G}$-Modul. Und mehrere andere Passagen haben denselben Charakter, so z. Bsp. in Abschnitt 5.), wo das heute so genannte „Lemma von Shapiro“ für die 2-Kohomologie bewiesen wird; dadurch wird die Berechnung der $\mathfrak{p}$-adischen 2-Kohomologie zurückgeführt auf die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$ zu einem Primidealteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$, auf dessen Wahl es nicht ankommt.

Heute würden wir die Artinschen Rechnungen wie folgt beschreiben: Es bedeute $D_{\mathfrak{p}}$ die Gruppe derjenigen Ideale von K, die nur Primteiler $\mathfrak{P}$ von

$\mathfrak{p}$ enthalten. Es ist dann $D_\mathfrak{p}$ die direkte Summe

$$D_\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} D_\mathfrak{P}$$

wobei $D_\mathfrak{P}$ die von $\mathfrak{P}$ erzeugte zyklische Gruppe bedeutet; sie ist zu $\mathbb{Z}$ isomorph. Nach dem „Lemma von Shapiro“ ist dann

$$H^2(\mathfrak{G}, D_\mathfrak{p}) \approx H^2(\mathfrak{Z}_\mathfrak{P}, D_\mathfrak{P}) \approx H^2(\mathfrak{Z}_\mathfrak{P}, \mathbb{Z})$$

wobei der zweite und dritte Term sich auf ein festgewähltes $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ beziehen. Artin schreibt für die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_\mathfrak{P}$ auch einfach $\mathfrak{Z}$. Sei n die Ordnung von $\mathfrak{G}$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ n\ } \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

lesen wir ab, dass

$$H^1(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^2(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\ n\ } 0$$

und somit

$$H^2(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}) \approx H^1(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}/n) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{Z}, \mathbb{Z}/n)$$

wobei rechts die Charaktergruppe von $\mathfrak{Z}$ steht, die isomorph ist zur Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}$. Die obige Rechnung gilt für alle $\mathfrak{p}$, ob verzweigt oder nicht. Wenn nun $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, dann ist die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ zyklisch, und dasselbe gilt dann für ihre Charaktergruppe.

All diese Isomorphismen werden von Artin explizit ausgerechnet. Er kann somit einem Faktorensystem $c_{\sigma,\tau}$ von $\mathfrak{G}$ in $K^\times$ für jedes Ideal $\mathfrak{p}$ einen Charakter h der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_\mathfrak{P}$ zuordnen. Im unverzweigten Fall ist der Frobenius-Automorphismus definiert, den Artin als $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]$ bezeichnet. Die Anwendung von h liefert dann eine bestimmte Restklasse modulo n, und nach Division mit n eine bestimmte Restklasse modulo 1. Artin stellt fest (im Brief Nr. 45), dass dies genau die $\mathfrak{p}$-adische Hasse-Invariante der durch $c_{\sigma,\tau}$ definierten einfachen Algebra ist.

In Richtung einer nicht-abelschen Klassenkörpertheorie ist das Ergebnis der Rechnungen jedoch für Artin enttäuschend. Er stellt fest, dass im nichtabelschen Fall einfach die

> „*alte Methode herauskommt, die Klassenkörpertheorie anzuwenden auf Unterkörper in Bezug auf die der ganze Körper zyklisch ist*“.

Und er sagt:

> „*Ich habe den Eindruck, dass noch etwas* ganz Neues *hinzukommen muss. . .*“

Die weitere Entwicklung hat dies bestätigt. Bemerkenswert ist, dass Artin dies schon so früh erkannt hat, schon im März 1932. Allerdings hatte man damals noch keine Vorstellung davon, wie diese ganz neuen Ideen aussehen könnten. Die Klassenkörpertheorie für galoissche Erweiterungen hat erst viel später durch die Ideen von Langlands einen neuen Impetus erfahren.

Die Artinschen Versuche in diesen Briefen, ein „Zerlegungsgesetz“ als Kongruenzbedingung für die Faktorensysteme nach einem geeigneten Modul zu formulieren, sind also im nichtabelschen Fall nicht gelungen. Immerhin sind die Artinschen Rechnungen als ein erster Schritt anzusehen, die gesamte Klassenkörpertheorie auf der Kohomologietheorie aufzubauen. Nachdem der Formalismus der Kohomologie der Gruppen hinreichend weit entwickelt worden war, stellte sich heraus, dass dies ein sehr starkes Hilfsmittel zur Behandlung der Klassenkörpertheorie wurde. Sie gipfelte schließlich in dem bekannten Werk von Artin-Tate [AT68].

Wir können feststellen, dass diese Entwicklung mit den hier vorliegenden Artin-Briefen ihren Anfang genommen hat.

Hasse jedoch hat die Durchdringung der Klassenkörpertheorie mit Begriffen und Methoden der Kohomologietheorie nicht mehr in demselben Maße mitgetragen. In seinem Vortrag über die Geschichte der Klassenkörpertheorie [Has66] äußert er seine Meinung, dass dadurch „*die scharf profilierten Linien und individuellen Züge*“ der Klassenkörpertheorie „*an Leuchtkraft und Plastizität etwas eingebüßt haben.*“ Damit meinte er, dass in den Algebren noch viel mehr arithmetische Informationen enthalten seien, die nicht allein durch die Kohomologie erfasst werden; so etwa hat er sich zu uns bei mehreren Gelegenheiten geäußert.

43 10.03.1932, Brief von Artin an Hasse

10. März 1932

Lieber Herr Hasse! [1]

Noch einige Kleinigkeiten zum gestrigen Brief. Bezeichnungen wie gestern:

$$(1) \quad \prod_{\tau} c_{\sigma,\tau} = a_\sigma \; ; \qquad (2) \quad c^n_{\sigma,\tau} = \frac{a_\sigma a^\sigma_\tau}{a_{\sigma\tau}} \; ;$$

$$(3) \quad c_{\sigma,\tau} c_{\sigma\tau,\varrho} = c^\sigma_{\tau,\varrho} c_{\sigma,\tau\varrho} \; ; \qquad (4) \quad u_\sigma u_\tau = c_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} \; ;$$

$$(5) \quad u_\sigma a = a^\sigma u_\sigma \; .$$

Ist $a'_\sigma = b^n_\sigma c^{1-\sigma} a_\sigma$, so liefert a'_σ „dasselbe" Faktorensystem wie a_σ. Ich schreibe dann $a'_\sigma \sim a_\sigma$ auch dann wenn die a_σ überhaupt kein Faktorensystem liefern, d.h. sich keine n-te Idealpotenz ergibt.

Liefern die a_σ ein Faktorensystem, so folgt aus (2): Bei *festem* τ ist $a_{\sigma\tau} \sim a_\sigma a^\sigma_\tau$; ebenso bei *festem* σ und variablem τ.

Behauptet wird nicht, dass die $a_{\sigma\tau}$ ein Faktorsystem ergeben. Nun folgt bei festem λ aus $\mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned} a_{\lambda^{-1}\sigma\lambda} &\sim a_{\lambda^{-1}\sigma} a_\lambda^{\lambda^{-1}\sigma} \sim a_{\lambda^{-1}} a_\sigma^{\lambda^{-1}} a_\lambda^{\lambda^{-1}\sigma} \quad \text{also} \\ a^\lambda_{\lambda^{-1}\sigma\lambda} &\sim a_{\lambda^{-1}} a^\sigma_\lambda a_\sigma = a^\lambda_{\lambda^{-1}} a_\lambda a_\lambda^{\sigma-1} a_\sigma \sim a_\lambda a^\lambda_{\lambda^{-1}} a_\sigma \\ &\sim a_1 a_\sigma \sim a_\sigma, \end{aligned}$$

da aus (2) folgt $a_1 = c^n_{1,1} \sim 1$.

Also liefert $a^\lambda_{\lambda^{-1}\sigma\lambda}$ bei festem λ ein zu $c_{\sigma,\tau}$ äquivalentes Faktorensystem

$$d_{\sigma,\tau} = c^\lambda_{\lambda^{-1}\sigma\lambda,\lambda^{-1}\tau\lambda} \; .$$

Dass bei beliebigem $c_{\sigma,\tau}$ auch $d_{\sigma,\tau}$ ein Faktorensystem ist, folgt unmittelbar aus (3). Aber nur für Ideale ergibt sich seine Äquivalenz mit $c_{\sigma,\tau}$. Es ist dies zu bezeichnen als das durch Anwendung von λ aus $c_{\sigma,\tau}$ entstehende Faktorensystem. Seine unsymmetrische Bauart rührt daher, dass in der Definition (4) eine Seite ausgezeichnet ist. Daher darf nicht ohne weiteres $c^\lambda_{\sigma,\tau}$ genommen werden. Wir haben also:

[1] Zu diesem Brief vgl.42.1.

Jedes ideale Faktorensystem ist invariant gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Nun zur gestrigen Berechnung der $\mathfrak{p}$-primären Faktorensysteme. Wenn Sie eine Abbildung h_ζ der Zerlegungsgruppe hernehmen, so gehört dazu ein $\mathfrak{p}$-primäres Faktorsystem $a_\sigma(\mathfrak{P})$. Ersetzen Sie $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{P}^\tau$, und in der gruppentheoretischen Rechnung überall die Isomorphie $\varrho \to \tau\varrho\tau^{-1}$, ferner sei statt h_ζ genommen $h_{\tau^{-1}\zeta\tau}$, ζ aus $\tau\mathfrak{Z}\tau^{-1}$, als Abbildung, so rechnen Sie leicht nach, dass in diesem Sinn

$$a_\sigma(\tau\mathfrak{P}) = (a_{\tau^{-1}\sigma\tau}(\mathfrak{P}))^\tau \qquad \text{ist.}$$

Daher liefert $\tau\mathfrak{P}$ bei gegebener Abbildung „dasselbe" Faktorsystem wie $\mathfrak{P}$. Ebenso leicht ist zu sehen, dass $a_\sigma(\mathfrak{P})$ nicht davon abhängt (im Sinn der Äquivalenz) welches Vertretersystem ϱ mod $\mathfrak{Z}$ gewählt wird.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ kein Diskr[iminanten]teiler . Dann kann eine ausgezeichnete Abbildung h_ζ der Zerlegungsgruppe auf die Restklassen modulo n gegeben werden. Nämlich $h_{\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]} \equiv \frac{n}{f} \pmod{n}$, wo $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]$ das Frobenius'sche Symbol ist. Dann ist also jedem Primideal $\mathfrak{p}$ ein ganz bestimmtes Faktorsystem $c_{ik}(\mathfrak{p})$ zugeordnet.

Frage: Darf man es wagen, das Reziprozitätsgesetz im Anschluss an das gestrige Zerlegungsgesetz zu formulieren? Wie ist klar.

Mit besten Grüssen

Ihr Artin

Die Invarianz bei λ der $c_{\sigma,\tau}$ kann auch für Zahlen aber auf anderem Wege gezeigt werden. Innerer Automorphismus mit u_λ der Algebra.

44 11.03.1932, Postkarte von Artin an Hasse

(Postkarte)

11. März 1932 [1]

Lieber Herr Hasse!

Aus meinen erneuten Rechnungen geht mit Deutlichkeit hervor, dass nur die *primären* idealen Faktorsysteme von Bedeutung sind. Die anderen sind relativ belanglos. [2]

Heute habe ich den Fall eines abelschen Körpers behandelt. Ergebnis:

Jedes ideale Faktorsystem (primär oder nicht) lässt sich in ein symmetrisches ambiges transformieren:

$$c_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma} \ ; \ c^{\lambda}_{\sigma,\tau} = c_{\sigma,\tau}$$

Das heisst: die u_σ lassen sich so wählen, dass ohne Faktoren $u_\sigma u_\tau = u_\tau u_\sigma$ gilt. Also ist das ganze Faktorsystem *im Wesentlichen*, d.h. bis auf die noch im *Oberkörper* tatsächlich möglichen Transformationen die seine Form festlassen gekennzeichnet durch ambige Ideale. Nimmt man Faktorensysteme, die prim zur Diskr[iminante] sind, so handelt es sich um Ideale des Grundkörpers. Damit ist die Frage geklärt, warum sich im abelschen Fall die Idealtheorie im Grundkörper behandeln lässt, die Theorie der Zahlen dagegen nicht. Denn Zahlfaktorensysteme lassen sich nicht in den Grundkörper transformieren.

Mit besten Grüssen

Ihr Artin

P.S. Die im gestrigen Nachsatz angedeutete Methode ist auch für Ideale besser und einfacher.

[1] Poststempel

[2] Im nächsten Brief vom 16. 3. 32 sagt Artin, dass er hier einem Rechenfehler aufgesessen sei.

45 ca.16.03.1932, Brief von Artin an Hasse

März 1932 [1]

Lieber Herr Hasse!

Die letzten Tage habe ich ganz angestrengt nach den Formulierungen gesucht und dabei lag alles so nahe! Der Irrtum lag in der Ihnen geschriebenen Formulierung des Reziprozitätsgesetzes, die abwegig war und in der durch Rechenfehler zustandegekommenen Meinung dass im Fall der Vierergruppe Isomorphie besteht. Sie machen sich keine Vorstellung von der Mühe die mir alles gemacht hat. Doch nun berichte ich nochmals von vorne zusammenhängend.

(3) $\prod_\tau c_{\sigma,\tau} = a_\sigma\, ;\; c^n_{\sigma,\tau} = \dfrac{a_\sigma a^\sigma_\tau}{a_{\sigma\tau}}\,.$ Potenzieren so: $(a^\sigma)^\tau = a^{\tau\sigma}\,.$

Ich habe mich sehr gefreut dass Sie so stark nichtkommutativ rechnen, dass Sie in Ihrem Brief auch Ideale nicht vertauschen.

Aus $c_{\sigma,\tau} c_{\sigma\tau,\varrho} = c^\sigma_{\tau,\varrho} c_{\sigma,\tau\rho}$ folgt durch Produkt über τ:

$$a_\sigma b_\rho = b^\sigma_\rho a_\sigma.$$

Nun kann doch a_σ gekürzt werden, da alles kommutativ ist. Also $b_\varrho = b^\sigma_\varrho$. Aber das sei nur eingeschoben.

Durch

(4) $c^n_{\sigma,\tau} = \dfrac{a_\sigma a^\sigma_\tau}{a_{\sigma\tau}}$ erhält man, wenn a_σ ein beliebiges Idealsystem ist für das nach Einsetzen in (4) eine n-te Potenz herauskommt, ein zulässiges $c_{\sigma,\tau}$ und somit alle. a'_σ liefert ein mit $c_{\sigma,\tau}$ äquivalentes Faktorsystem, wenn $a'_\sigma = \delta^n_\sigma c^{1-\sigma} a_\sigma$, wo δ_σ beliebig, c von σ unabhängig. Wir schreiben dann $a'_\sigma \sim a_\sigma$.

Nun die $\mathfrak{p}$-primären Systeme:

$a_\sigma = \mathfrak{P}^{\sum\limits_\varrho m^\varrho_\sigma \varrho}$, ϱ modulo Zerl.gruppe $\mathfrak{Z}$ mit Elementen z
$m^{\varrho z}_\sigma \equiv m^\varrho_\sigma \pmod n$ als Verabredung.

Damit eine n-te Idealpotenz herauskommt ist notwendig und hinreichend:

(5) $$m^\varrho_\sigma + m^{\sigma^{-1}\varrho}_\tau \equiv m^\varrho_{\sigma\tau} \pmod n\,.$$

[1] ca. 16. März 1932

Setzt man $\varrho = 1$ so erhält man nach Einführung neuer Zeichen:

$$m_\sigma^\varrho \equiv m^1_{\varrho^{-1}\sigma} - m^1_{\varrho^{-1}} \pmod{n} . \tag{6}$$

Wählt man m_σ^1 als beliebige ganze Zahlen, so ist durch (6) schon (5) identisch befriedigt. Es ist noch Sorge dafür zu tragen, dass $m_\sigma^{\varrho z} \equiv m_\sigma^\varrho$ wird. Dann muss, da $\varrho^{-1}\sigma$ und ϱ^{-1} beliebige Gruppenelemente sein können:

$$m^1_{z\sigma} - m^1_{z\tau} \equiv m^1_\sigma - m^1_\tau \pmod{n} .$$

Für $\tau = 1$ gibt das

$$m^1_{z\sigma} - m^1_z \equiv m^1_\sigma - m^1_1 \pmod{n} .$$

Setzt man:

$$\boxed{h(\sigma) \equiv m^1_\sigma - m^1_1 \pmod{n}} \tag{7}$$

so heisst das:

$$\boxed{h(z\sigma) \equiv h(z) + h(\sigma) \pmod{n}} \tag{8}$$

und die zu befriedigende Kongruenz lautet

$$h(z\sigma) - h(z\tau) \equiv h(\sigma) - h(\tau) ,$$

die durch (8) identisch befriedigt ist.

Sind z_1, z_2 zwei Elemente aus $\mathfrak{Z}$, so gilt

$$\boxed{h(z_1 z_2) \equiv h(z_1) + h(z_2) \pmod{n} .} \tag{9}$$

Ist (9) befriedigt, so kann (8) als Definition für $h(z\sigma)$ angesehen werden, wenn $h(\sigma)$ willkürlich gegeben ist.

Ist nun in

$$a_\sigma = \mathfrak{P}^{\sum m_\sigma^\varrho \varrho} \tag{10}$$

das Vertretersystem der einzigen Bedingung unterworfen dass aus der Nebengruppe $\mathfrak{Z}$ der Vertreter $\varrho = 1$ gewählt ist, so ist jetzt die Gleichung $m_\sigma^{z\varrho} \equiv m_\sigma^\varrho$ entbehrlich. Es ist nämlich m_σ^1 definiert also auch durch (7) das $h(\sigma)$ für alle σ. Dieses muss (8) genügen.

Aus (6) folgt

$$m_\sigma^\varrho \equiv h(\varrho^{-1}\sigma) - h(\varrho^{-1}) \pmod{n} , \tag{11}$$

und genügt als solches für alle ϱ jetzt $m_\sigma^{z\varrho} \equiv m_\sigma^\varrho$. Die Erweiterung der Erklärung von m_σ^ϱ auf alle ϱ kann also durch (11) geschehen. Aus (11) folgt:

$$\sum_\varrho m_\sigma^\varrho \varrho \equiv \sum_\varrho h(\varrho^{-1}\sigma)\varrho - \sum_\varrho h(\varrho^{-1})\varrho .$$

Es sei nun $\bar{\sigma}$ der ϱ Vertreter der Restklasse $\sigma\mathfrak{Z}$. Also

$$\sigma^{-1}\varrho = \overline{\sigma^{-1}\varrho}\,\zeta_\varrho \quad \text{also} \quad \varrho^{-1}\sigma = \zeta_\varrho^{-1}\overline{(\sigma^{-1}\varrho)}^{-1} .$$

Also wegen (8)

$$h(\varrho^{-1}\sigma) \equiv h(\zeta_\varrho^{-1}) + h\left(\overline{\sigma^{-1}\varrho}^{-1}\right) ,$$

daher:

$$\sum_\varrho m_\sigma^\varrho \varrho \equiv \sum_\varrho h(\overline{\sigma^{-1}\varrho}^{-1})\varrho - \sum_\varrho h(\varrho^{-1})\varrho + \sum_\varrho h(\zeta_\varrho^{-1})\varrho .$$

Also

$$\mathfrak{P}^{\sum_\varrho m_\sigma^\varrho \varrho} = \delta_\sigma^n \cdot \mathfrak{P}^{\sigma \sum_\varrho h(\overline{\sigma^{-1}\varrho}^{-1})\sigma^{-1}\varrho - \sum_\varrho h(\varrho^{-1})\varrho} \cdot \mathfrak{P}^{\sum_\varrho h(\zeta_\varrho^{-1})\varrho} .$$

Nun durchläuft $\overline{\sigma^{-1}\varrho}$ genau alle ϱ und $\sigma^{-1}\varrho$ alle $\varrho\zeta_\varrho$.

Da $\mathfrak{P}^{\zeta_\varrho} = \mathfrak{P}$ ist, folgt:

$$a_\sigma = \delta_\sigma^n \cdot \mathfrak{P}^{(\sigma-1)\sum_\varrho h(\varrho^{-1})\varrho} \cdot \mathfrak{P}^{\sum_\varrho h(\zeta_\varrho^{-1})\varrho} .$$

Im Sinn der Äquivalenz kann der erste Faktor weggelassen werden. Also: (wegen $\zeta_\varrho^{-1} = \varrho^{-1}\sigma\overline{\sigma^{-1}\varrho}$)

$$a_\sigma \sim \mathfrak{P}^{\sum_\varrho h(\varrho^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\varrho})} \tag{12}$$

Hier treten nur Werte $h(z)$ auf, so dass also nur noch (9) zu befriedigen ist. $h(z)$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{Z}$ durch Restklassen modulo n. Dem Produkt zweier a_σ-Systeme entspricht die Summe der Darstellungen. Ist die Darstellung die 0 Darstellung, so ist $a_\sigma \sim 1$.

Ist umgekehrt $a_\sigma \sim 1$ also $a_\sigma = \delta_\sigma^n c^{\sigma-1}$, wo c von σ unabhängig ist, so sei

$$c = \mathfrak{P}^{\sum_\varrho \ell^\varrho \varrho} , \quad \text{wo} \quad \ell^{\varrho z} = \ell^\varrho \quad \text{verabredet werde.}$$

Dann ist

$$c^{1-\sigma} = \mathfrak{P}^{\sum (\ell^\sigma - \ell^{\sigma^{-1}\varrho})\varrho} .$$

Setzt man also $a_\sigma = \mathfrak{P}^{\sum m_\sigma^\varrho \varrho}$, so ist $m_\sigma^\varrho \equiv \ell^\varrho - \ell^{\sigma^{-1}\varrho} \pmod{n}$. Aus (7) folgt $h(\sigma) \equiv (\ell^1 - \ell^{\sigma^{-1}}) \pmod{n}$. Für $\sigma = z$ folgt $h(\sigma) \equiv 0 \pmod{n}$, da $\ell^{z^{-1}} = \ell^1$ nach Verabredung.

Also ist $a_\sigma \sim 1$ dann und nur dann, wenn $h(\sigma)$ die Nulldarstellung ist. Also ist die Gruppe der $\mathfrak{p}$-primären Faktorensysteme isomorph mit der Gruppe der Darstellungen der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}$, durch Restklassen mod n. Da diese als Exponenten der n-ten Einheitswurzel eines Charakters aufgefasst werden können, ist sie isomorph mit der Gruppe der Charaktere und daher isomorph mit der Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}$ selbst.

Bis hierher hatte ich Ihnen schon berichtet.

Abelscher Spezialfall:

Wir definieren $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}^{\sum\limits_\varrho \varrho}$ (also das „kleinste“ ambige Ideal von $\mathfrak{P}$) und versuchen den Ansatz $a_\sigma = \mathfrak{Q}^{A_\sigma}$, wo A_σ eine Zahl ist. Damit eine n-te Potenz herauskommt muss, da a_σ ambig ist:

$$\frac{a_\sigma a_\tau}{a_{\sigma\tau}}$$

eine n-te Potenz sein, also $A_{\sigma\tau} \equiv A_\sigma + A_\tau \pmod{n}$ sein. Also muss A_σ eine Darstellung der *ganzen* Gruppe durch Restklassen modulo n sein. Welches $h(z)$ von $\mathfrak{Z}$ gehört zu A_σ ?

$$a_\sigma = \mathfrak{P}^{\sum\limits_\varrho A_\sigma \varrho}, \qquad \text{also} \;\; m_\sigma^\varrho = A_\sigma \;, \qquad \text{also} \;\; h(\sigma) \equiv A_\sigma \;,$$

da ja $A_1 \equiv 0 \pmod{n}$ sein muss (Darstellung!). Aus $h(\sigma) \equiv A_\sigma \pmod{n}$ folgt also dass $h(z)$ die durch A_σ vermittelte Darstellung von $\mathfrak{Z}$ selbst ist.

Da nun jeder Charakter von $\mathfrak{Z}$ zu einem Charakter der ganzen Gruppe erweitert werden kann, so folgt, dass bei A_σ alle Darstellungen vorkommen.

Daher kann a_σ ambig realisiert werden.

Dann ist $c_{\sigma,\tau}^n = \dfrac{a_\sigma a_\tau}{a_{\sigma\tau}} = c_{\tau,\sigma}^n$ (wegen $\sigma\tau = \tau\sigma$) , also ist $c_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma}$ *ambig*. Ist übrigens $c_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma}$, so ist $a_\sigma = b_\sigma$ also a_σ ambig also schon $c_{\sigma,\tau}$ ambig. Natürlich gilt für jedes ambige $c_{\sigma,\tau}$ auch schon die Symmetrie.

$$(c_{\sigma,\tau}^n = \frac{a_\sigma a_\tau}{a_{\sigma\tau}} = c_{\tau,\sigma}^n \;, \quad \text{da } a_\sigma \text{ ambig}).$$

Da es für primäre $c_{\sigma,\tau}$ geht, geht es für alle.

Allgemein: Nur solche primäre Systeme lassen sich ambig realisieren (wenn $c_{\sigma,\tau}$ ambig, dann a_σ auch) für die die Darstellung $h(z)$ zu einer Darstellung der ganzen Faktorkommutatorgruppe erweitert werden kann.

Gegenstück $\mathfrak{G} =$ Kommutator $\mathfrak{G}$. Dann ist nur die 0-Darstellung ambig realisierbar also *jedes* ambige Faktorsystem $\sim (1)$. Ikosaeder!

Nun zurück zum Allgemeinen. $\mathfrak{p}$ kein Diskr[iminanten-]Teiler. Jedem $\mathfrak{p}$-primären Faktorsystem ordnen wir zu das Symbol

$$(13) \qquad \boxed{\left(\frac{K}{c_{\sigma,\tau}}\right) \equiv h\left(\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]\right) \pmod{n}}\ ,$$

wo $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]$ die Frobeniussubstitution ist.

Beweis dass das (13) nicht von $\mathfrak{P}$ abhängt. Wählt man statt $\mathfrak{P}$ das Ideal $\mathfrak{P}^\lambda$ zur Darstellung, so folgt aus (12)

$$a_\sigma \sim (\mathfrak{P}^\lambda)^{\sum_\varrho h(\varrho^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\varrho})\varrho\lambda^{-1}} = (\mathfrak{P}^\lambda)^{\sum_\varrho h(\overline{\lambda\varrho}^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\lambda\varrho})\lambda\varrho\lambda^{-1}} ,$$

wenn ϱ durch $\lambda\varrho$ ersetzt wird. Also, da $\lambda\varrho\lambda^{-1} = \varrho_1$ ein Vertretersystem mod $\mathfrak{Z}_\lambda$ durchläuft:

$$a_\sigma \sim (\mathfrak{P}^\lambda)^{\sum_{\varrho_1} h(\overline{\varrho_1\lambda}^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\varrho_1\lambda})\varrho_1} = (\mathfrak{P}^\lambda)^{\sum_{\varrho_1} m_\sigma^{\varrho_1}\varrho_1} \qquad \text{oder}$$

$$m_\sigma^{\varrho_1} = h(\overline{\varrho_1\lambda}^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\varrho_1\lambda})$$

Bezeichnet man mit $h^\lambda(\sigma)$ das zu $\mathfrak{P}^\lambda$ gehörige, so folgt aus (7) dass: ($\varrho_1 = 1$ setzen)

$$h^\lambda(\sigma) = h(\bar{\lambda}^{-1}\sigma\,\overline{\sigma^{-1}\lambda})\,, \text{ also wegen } \left[\frac{K}{\mathfrak{P}^\lambda}\right] = \lambda\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]\lambda^{-1}\,,$$

$$h^\lambda\left(\left[\frac{K}{\mathfrak{P}^\lambda}\right]\right) = h\left(\bar{\lambda}^{-1}\lambda\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]\lambda^{-1}\overline{\lambda\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]}\right) .$$ Da $\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right] \in \mathfrak{Z}$, ist $\overline{\lambda\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]} = \bar{\lambda}$,

also

$$h^\lambda\left(\left[\frac{K}{\mathfrak{P}^\lambda}\right]\right) = h\left(\bar{\lambda}^{-1}\lambda\left[\frac{K}{\mathfrak{P}}\right]\lambda^{-1}\bar{\lambda}\right) .$$

Nun liegt $\lambda^{-1}\bar{\lambda}$ in $\mathfrak{Z}$. Da $h(z)$ eine Darstellung ist, folgt die Invarianz.

Beweis, dass es nicht von dem Vertretersystem ϱ abhängt (auch $h(z)$ nicht) beinahe trivial.

Für beliebige nicht primäre $\mathfrak{p}$ [2] werde $\left(\frac{K}{c_{\sigma,\tau}}\right)$ durch zusammensetzen erklärt. (natürlich $c_{\sigma,\tau}$ prim zur Diskr[iminanten])

[2] Dies scheint ein Schreibfehler zu sein. Artin meint offenbar „nicht primäre Faktorsysteme“.

Nun lautet das Reziprozitätsgesetz:

$$\boxed{\left(\frac{K}{c_{\sigma,\tau}}\right) \equiv 0 \pmod{n} \Longleftrightarrow c_{\sigma\tau} \equiv \frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}} \pmod{\mathfrak{f}}}$$

Die fragliche Gruppe der $c_{\sigma,\tau} \equiv \frac{\delta_\sigma \delta_\tau^\sigma}{\delta_{\sigma\tau}} \pmod{\mathfrak{f}}$ ist also cyklisch und isomorph der Gruppe der $\left(\frac{K}{c_{\sigma,\tau}}\right) \bmod n$. Ist daher m das kleinste gemeinsame Vielfache aller Ordnungen aller Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist es eine cyklische Gruppe der Ordnung m. Das ist der traurige Überrest eines Isomorphiesatzes.

Nun kann das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha_{\sigma,\tau}, K}{\mathfrak{p}}\right)$ in Analogie zu Ihrer alten Definition für Zahlfaktorensysteme erklärt werden und es gilt die Summenformel ect! Bildet man $\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_{\sigma,\tau}, K}{\mathfrak{p}}\right)$, so sind es Ihre Invarianten des verschränkten Produkts.

Die Beweisführung geschieht besser umgekehrt von Ihren Invarianten aus zum „Normenrestsymbol“, von dort zu $\left(\frac{K}{c_{\sigma,\tau}}\right)$. Das kann nicht sehr schwer sein aber ich habe es noch nicht überlegt. Wahrscheinlich sehen Sie alles in zwei Zeilen.

Noch eine Bemerkung. Die Faktorensysteme sind *daher* sicher *nicht* das Wahre. Denn etwa bei einer abelschen Gruppe vom Typus (2,2) kommt eine Gruppe der Ordnung 2 heraus und es geht das ganze alte Reziprozitätsgesetz flöten. Die Theorie hat eben nur den Sinn, *alles* fürs *cyklische* gültige zu übertragen.

Ich will jetzt über den Ausbau nachdenken. Die Beweise der erwähnten Dinge erscheinen mir unproblematisch.

Man könnte auch trachten die Beweise nach der alten Klassenkörpertheorie zu führen und so zu einer Theorie der verschränkten Produkte für beliebige nicht cyklische Körper kommen.

Ich vergass noch die leicht zu bestätigende Übergangsregel:

$\left(\frac{K/\Omega}{c_{\sigma,\tau}}\right) \equiv \left(\frac{K/k}{c_{\sigma,\tau}}\right) \pmod{m}$, wenn σ, τ nur Elemente der zu Ω gehörigen Untergruppe durchlaufen und m der Grad von K/Ω ist.

Mit vielen herzlichen Grüssen

Ihr

Artin

46 02.05.1932, Brief von Artin an Hasse

2. Mai 1932

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief und das Manuskript. Ich schreibe erst jetzt, da ich Ihre Arbeiten bis jetzt studiert habe.

In der Tat kann man Ihre Arbeit gleich so lesen, dass der allgemeine galois'sche Fall herauskommt. Gestatten Sie mir dazu einige Bemerkungen, die sich aber doch nur auf Trivialitäten beziehen. Für mich waren es keine, da ich die Theorie gerade gelernt habe.

1.) Ist Z_0 cykl[ischer] Unterkörper des cyklischen Körpers Z und s der Relativgrad, so ist $(Z_0, \sigma, \alpha) \sim (Z, \sigma, \alpha^s)$. Dieser Satz lässt sich allgemein für galois'sche Körper aussprechen. Dann ist die Formulierung netter und der Beweis formal etwas einfacher. Beweis nach Ihrem Muster:

Ist Z_0 galois'scher Unterk[örper] des galois'schen Körpers Z und $\mathfrak{g}$ der Normalt[eiler], zu dem Z_0 gehört, so ist die Gruppe von Z_0 die Faktorgruppe mit den Elementen $\sigma\mathfrak{g}$. Die Indizes eines Faktorsystems von Z_0 können also $c_{\sigma\mathfrak{g},\tau\mathfrak{g}}$ geschrieben werden. Es ist dann: [1]

$$(Z_0 \divideontimes c_{\sigma\mathfrak{g},\tau\mathfrak{g}}) \sim (Z \divideontimes c_{\sigma,\tau}) \quad \text{wo } c_{\sigma,\tau} = c_{\sigma\mathfrak{g},\tau\mathfrak{g}} \,.$$

Daraus folgt sofort der zyklische Spezialfall.

2.) Sowohl im Emmy-Noetherschen Hauptgeschlechtssatz wie auch bei meinem Zerlegungsgesetz treten Kongruenzen zwischen idealen Faktorensystemen auf. Hier ist nun aber eine sehr *sorgfältige* Definition der Kongruenz zugrunde zu legen:

Sei $\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}$ ein ideales Faktorsystem. Dann heisst

$$\mathfrak{c}_{\sigma,\tau} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}},$$

wenn es ein *„reales Faktorsystem* $c_{\sigma,\tau}$" gibt, so dass $\mathfrak{c}_{\sigma,\tau} = (c_{\sigma,\tau})$ mit $c_{\sigma,\tau} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ im gewöhnlichen Sinn ist.

Es genügt also *keineswegs*, dass $\mathfrak{c}_{\sigma,\tau} = (c_{\sigma,\tau})$ mit $c_{\sigma,\tau} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ ist, die $c_{\sigma,\tau}$ müssen auch noch den Assoziativitätsbedingungen genügen. Als Hauptideal $= \mathfrak{c}_{\sigma,\tau}$ genügen sie ihnen natürlich, da $\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}$ ein ideales F[aktor]s[ystem] ist. Aber die Zahlen $c_{\sigma,\tau}$ erfüllen sie nur bis auf Einheitsfaktoren.

[1] Artin benutzt das von Noether bevorzugte Zeichen $\divideontimes$ für ein verschränktes Produkt.

Sowohl beim Hauptgeschlechtssatz wie beim Zerlegungssatz muss nun *diese* Kongruenzdefinition zugrunde gelegt werden, sonst ist alles falsch.

Beispiel: Grundkörper $k = R(\sqrt{-14})$, $Z = k(\sqrt{2})$ ist unverzweigt über k, also ist $\mathfrak{f} = 1$. Klassenzahl von k ist 4. $\mathfrak{p} = (3, 1 + \sqrt{-14})$ hat Ordnung 4 und $\mathfrak{p}^2$ ist äquivalent mit $\mathfrak{q} = (2, \sqrt{-14})$.

Zum Hauptgeschlechtssatz: Im cyklischen muss der alte Hauptgeschlechtssatz erscheinen:

$$N\mathfrak{p} \equiv (NA) \pmod{1} \text{ folgt } \mathfrak{p} = BA^{1-\sigma}.$$

Die Kongruenz heisst „$N\mathfrak{p}$ ist Hauptideal“. Und nun kommt der Unterschied:

$$N\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 \sim \mathfrak{q} = (2, \sqrt{-14}) = (\sqrt{2})$$

ist Hauptideal in Z. Wenn man also in Z rechnet, ist $N\mathfrak{p}$ Hauptideal (A). Also (A) ein ideales Faktorsystem. Aber das ist kein reales, da sonst A im Grundkörper liegen müsste, und in k ist $\mathfrak{q}$ nicht Hauptideal. In der Tat kann auch nicht $\mathfrak{p} = BA^{1-\sigma}$ sein, da sonst $N\mathfrak{p} = (NB)$, also Hauptideal in k wäre. Die vorige Kongruenzbedingung ersetzt also im cyklischen Fall das „im Grundkörper Liegen“.

Zum Zerlegungssatz: $k = R(\sqrt{-5})$, $Z = k(i)$, $\mathfrak{p} = (2, 1+\sqrt{-5})$, $u_\sigma^2 = \mathfrak{p}$ ist ideales F[aktor]s[ystem], da $\mathfrak{p}$ in k liegt. $\mathfrak{p}$ zerfiele in 2 Faktoren wenn $\mathfrak{p} \equiv NA \pmod{1}$. Da NA Hauptideal ist, müsste $\mathfrak{p}$ Hauptideal sein. Wird die Kongruenz in Z verstanden, so ist das der Fall, da $\mathfrak{p} = (1 + i)$. In k ist das nicht der Fall.

Die realen F[aktor]s[ysteme] ersetzen die Zahlen des Grundkörpers. Aber das ist alles sehr bedauerlich, da die eben eingeführte Kongruenz im Allgemeinen sehr unhandlich ist. Die Assoziativitätsbedingungen sind ja für Ideale leicht, für Zahlen schwer zu lösen.

Es kommt also nicht mehr heraus als in Ihrer Crelle-Arbeit steht, wo Sie die Algebrengruppe einführen. Das ist der abstrakte Kern von allem.

Der einzige Sinn des Reziprozitätsgesetzes:

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{c}_{\sigma,\tau}}\right) \equiv 0 \pmod{1} \iff \mathfrak{c}_{\sigma,\tau} \equiv \frac{\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{a}_\tau^\sigma}{\mathfrak{a}_{\sigma\tau}} \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist also der, dass die Bedingung für ideale F[aktor]s[ysteme] formuliert wird unter der sie durch reale $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ realisiert werden können. Also nur eine Bedingung zur Aufstellung realer F[aktor]s[ysteme] und nicht ein Zerlegungssatz im eigentlichen Sinn.

3.) Sei Z über k abelsch vom Typus 2,2. Für nicht-Diskriminantenteiler $\mathfrak{p}$ haben Ihre Invarianten den Nenner 1 oder 2, da der $\mathfrak{p}$-Grad von Z 1 oder 2 ist. Für Diskr[iminanten]t[eiler] kann 4 herauskommen, wenn die Zerl[egungs]gruppe von $\mathfrak{p}$ die ganze Gruppe ist. Auf Grund Ihres Rez[iprozitäts]ges[etzes] kann das aber dann und nur dann eintreten, wenn es mindestens 2 solche Diskr[iminanten]teiler gibt, da sich erst zwei Brüche $\frac{1}{4}$ kompensieren können.

Kein verschränktes Produkt von $R(\sqrt{2}, i)$ kann also Schiefkörper sein, da der Index nur 1 oder 2 sein kann.

Das ist aber möglich bei $R(\sqrt{3}, i)$. Beispiel: $u_\sigma^2 = 1 + i$, $u_\tau^2 = \sqrt{-3}$; $(u_\sigma u_\tau)^2 = 3 + \sqrt{+3}$. Dies ist Schiefkörper. Invarianten: für $p \neq 2, 3$ ist $\nu_p \equiv 0 \pmod 1$ auch für p_∞. Das ist ganz leicht zu sehen. Also ist $\nu_2 = \pm\frac{1}{4}$, $\nu_3 = \mp\frac{1}{4}$. Aber welches Vorzeichen gilt nun? Im cyklischen Fall reicht das Rez[iprozitäts]theorem aus, die Berechnung für Diskr[iminanten]teiler auf die für Nicht-Diskr[iminanten]t[eiler] zurückzuführen. Das geht hier bestimmt nicht, da mit Brüchen 0 oder $\frac{1}{2}$ nicht $\frac{1}{4}$ dargestellt werden kann. Wieder ein nachteiliger Unterschied gegen den cykl[ischen] Fall. Ich habe mit enormer Mühe die Indexvorzeichen doch bestimmt.

Aber gibt es hier eine einfachere Methode? Der Nachweis, dass es Schiefkörper sind, ist nicht so schwer.

4.) Ein Beispiel: $k = R(\sqrt{2})$. Über k die gewöhnlichen Quaternionen. Der Schiefkörper ist nur im unendlichen verzweigt also im gewöhnlichen Sinn unverzweigt. Die Siegelsche Methode kann also bei $k \neq R$ nicht das Haupttheorem liefern.

5.) Ich glaube nicht recht, dass allein mit den bisherigen Methoden die restlichen Probleme herauskommen. Die Theorie zerfällt in zwei Teile: Alte Klassenkörpertheorie und Sondersätze für das cyklische. Im cyklischen Fall fallen sie zusammen und es ist gelungen diese Sondersätze zu verallgemeinern. Natürlich ist das sehr schön und wichtig, aber noch nicht das letzte Wort.

6.) Ihre Herleitung des Normensatzes ist sehr schön und einheitlich; der Index am Schluss ist leicht zu bestimmen, da Sie nicht einmal eine neue Gruppe brauchen. Nehmen Sie die alte Herbrandsche Einheitengruppe und geben Sie hinzu die h-ten Potenzen der Diskriminantenteiler und die Konjugierten. Dabei setze sich h aus Klassenzahl und e zusammen. Sie sind Hauptideale im Zerlegungskörper und die gesuchte einfache Untergruppe von endlichem

Index. Sie bleiben fest bei der Zerlegungsgruppe und vertauschen sich sonst. Es ist doch wohl klar welche Gruppe ich meine?

Zum Schluss muss ich noch um Entschuldigung bitten. Erstens über dieses Sammelsurium belangloser Trivialitäten, zweitens weil Sie meinen könnten, dass ich damit Ihre wunderbare Schöpfung angreifen will. Dass das nicht *so* gemeint ist, geht daraus hervor, dass ich in diesem ganzen Semester darüber lesen will. Ich will nur zeigen, dass sie noch nicht das liefert was wir suchen.

Was machen Sie zu Pfingsten und wann kommen Sie nach Hamburg?

Mit vielen Grüssen an Alle

Ihr Artin

Kommentare zum Brief Nr.46:

46.1 Der letzte Brief über Faktorensysteme

Dies ist der letzte Brief der Serie, die am 9.3.1932 begonnen hatte, und die sich mit dem Rechnen mit Faktorensystemen befasst.

Zunächst bedankt sich Artin für „das Manuskript“. Es handelt sich dabei um das Manuskript der Arbeit über die Struktur der Brauerschen Gruppe, das 1933 in den Mathematischen Annalen erschien [Has33a]. Hasse hatte dieses Manuskript kürzlich fertiggestellt und an Emmy Noether zu ihrem 50. Geburtstag am 23. 3. 1932 mit einer Widmung geschickt. Aus dem vorliegenden Brief entnehmen wir, dass Hasse ein Exemplar des Manuskripts gleichzeitig an Artin geschickt hatte.

Wie bereits in 42.1 gesagt, geht es bei diesen Rechnungen um die Frage der Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie auf den galoisschen, nicht notwendig abelschen Fall. Offenbar hatte Hasse angefragt, ob Artin Ideen hätte, um die Methoden seines Manuskripts für galoissche Körpererweiterungen zu verallgemeinern. Darauf antwortet nun Artin, dass man Hasses Arbeit „*gleich so lesen kann, dass der allgemeine galoissche Fall herauskommt*“.

Die Bemerkung 1.) bezieht sich auf das Lemma (2.5) der Hasseschen Arbeit. Es handelt sich um den Satz (in der heutigen Terminologie), dass die Brauer-Gruppe von $Z_0|k$ vermöge Inflation *injektiv* in die Brauer-Gruppe von $Z|k$ eingebettet wird. Bei Hasse wird das im zyklischen Fall nachgerechnet. Artin erwähnt, wie der Satz im allgemeinen Fall mit Hilfe von Faktorsystemen zu formulieren ist. Allerdings erwähnt bereits Hasse in seinem Manuskript, dass diese allgemeine Tatsache „bereits von R. Brauer in §3 seiner Arbeit hergeleitet“ wurde, wobei er sich auf die 1928 in der Mathematischen Zeitschrift erschienene Arbeit von Brauer bezieht [Bra28]. Übrigens war derselbe Satz (im zyklischen Fall) kurz vor diesem Brief auch von Albert im American Journ. of Math. 1932 gezeigt worden [Alb32]; Hasse zitiert auch die Albertsche Arbeit.

Die Bemerkung 2.) im Artinschen Brief bezieht sich auf das Rechnen mit Kongruenzen bei Faktorensystemen . Aus heutiger Sicht wäre das eine Selbstverständlichkeit, da es sich ja um Abbildungen von Kohomologiegruppen auf gewisse Faktorgruppen handelt.

Der Artinsche Brief enthält zur Illustration wieder einige numerische Beispiele. Insgesamt jedoch war die Ausbeute der abstrakten Rechnungen für Artin ziemlich enttäuschend, wenn wir seine Bemerkung richtig deuten:

> „*Es kommt also nicht mehr heraus als in ihrer Crelle-Arbeit steht, wo Sie die Algebrengruppe einführen. Das ist der abstrakte Kern von allem.*“

Wenn sich Artin dabei auf Hasses „Crelle-Arbeit“ bezieht, so meint er offenbar die von Hasse gemeinsam mit R. Brauer und E. Noether publizierte Arbeit mit dem Beweis der Zyklizität der einfachen Algebren über Zahlkörpern [BHN32]. Dort hatte Hasse zwar nicht die Algebrengruppe eingeführt (das war schon vorher von Richard Brauer in [Bra28] getan worden), aber Hasse hatte in [BHN32] einen „Zerlegungssatz“ für Primstellen eines Zahlkörpers in einem galoisschen Erweiterungskörper formuliert. In diesem Sinne hatte also Hasse die Brauersche Gruppe in die Zahlentheorie eingeführt, mit dem Ziel einer Erweiterung der Klassenkörpertheorie vom abelschen auf den allgemein galoisschen Fall.[2] Das ist es offenbar, was Artin meint.

Auch die Artinsche Bemerkung in Punkt 5.) seines Briefes deutet auf das Ziel einer Verallgemeinerung de Klassenkörpertheorie auf den galoisschen Fall, wenn er sagt, dass dies „noch nicht das letzte Wort“ sei.

Am Schluss seines Briefes sagt Artin, dass er im Sommersemester 1932 über die Hassesche Arbeit eine Vorlesung halten will. Das ist um so bemerkenswerter, als Artin ja gerade selbst bedeutende Vereinfachungen in der Klassenkörpertheorie erzielt hatte, worüber er Ende Februar in Göttingen drei Vorträge gehalten hatte.[3] Es scheint also, dass Artin in Hasses Arbeit noch weitere Vereinfachungen entdeckt hat, die er in seiner Vorlesung behandeln will. Allerdings konnten wir nicht feststellen, ob Artin in seiner Vorlesung im Sommersemester dazu gekommen war; siehe 40.1.

[2] Wir haben den Hasseschen Zerlegungssatz schon in 42.1 diskutiert; siehe insbesondere Seite 427.

[3] Diese Vorlesungen sind von Olga Taussky ausgearbeitet worden; die Ausarbeitung wurde vervielfältigt und verteilt. Siehe dazu 40.1.

47 02.12.1932, Brief von Artin an Hasse

2.12.32

Lieber Herr Hasse!

Eine unangenehme Nachricht. In der Arbeit von Herrn Schäfer und auch in der Ihren findet sich eine Unrichtigkeit, so dass der Hauptidealsatz im Rahmen der kompl[exen] Multipl[ikation] noch immer nicht bewiesen ist.[1] Es handelt sich um folgendes:

Nehmen Sie etwa den Körper $R(\sqrt{-5})$. Die Normen $x^2 + 5y^2$ der ungeraden Zahlen sind $\equiv 1 \pmod 4$. Das Nichthauptideal $\mathfrak{p} = (3, 1 + \sqrt{-5})$ hat die Norm $3 \equiv -1 \pmod 4$, also sind die Normen aller ungeraden Ideale der Nichthauptklasse $\equiv -1 \pmod 4$. Erst recht findet man also in dieser Klasse kein Ideal mit einer Norm $\equiv 1 \pmod{12}$.

Folglich versagt der Schäfersche Beweis und ebenso Ihr Beweis in diesem Fall.

Ich habe versucht die Lücke auszufüllen, es ist mir aber nicht gelungen. Nur Folgendes habe ich zu Stande gebracht:

Bewiesen ist: Ist $N\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod{12}$, so gilt der Satz. Da nun das Quadrat jedes zu 12 primen Ideals die Bedingung erfüllt, ist jedenfalls das Quadrat jedes Ideals Hauptideal.

Führt man den Beweis für $\sqrt[4]{\Delta}$ statt für $\sqrt[12]{\Delta}$, so findet man: Ist $N\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod 4$, so ist die dritte Potenz von $\mathfrak{a}$ Hauptideal also wegen des vorigen auch $\mathfrak{a}$ selbst. Es gilt also schärfer:

Aus $N\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod 4$ folgt dass $\mathfrak{a}$ Hauptideal. Der Hauptidealsatz ist also *nicht* bewiesen für solche imaginär-quadratische k über denen $k(i)$ unverzweigt ist, denn dann gibt es nur eine Idealgruppe vom Index 2 mit $N\mathfrak{a} \equiv 1 \pmod 4$ und dem Führer 1. Das sind die Körper $R(\sqrt{m})$ mit $m \neq -1$ und $m \equiv 3 \pmod 4$.

Ein ganz kleines Stück kommt man noch weiter. Es genügt ein einziges Ideal $\mathfrak{a}$ anzugeben, das Hauptideal wird und für das $N\mathfrak{a} \equiv -1 \pmod 4$ ist. Ist nun $p > 0$ ein Primteiler von m der $\equiv -1 \pmod 4$ ist, $p = \mathfrak{p}^2$ in k, so ist $\mathfrak{p}$ ein solches Ideal. Es wird nämlich in $k(\sqrt{-p})$ ersichtlich das Hauptideal $(\sqrt{-p})$ und dieser Körper ist im Klassenkörper enthalten. Es bleiben noch

[1] Siehe 47.1.

diejenigen m, bei denen alle Primteiler $\equiv 1 \pmod 4$ sind (z.B. $m = -5$). Das Ideal $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{m})$ ist in $k(i)$ das Hauptideal $(1 + i)$. Bildet man $\mathfrak{a} = \dfrac{1+\sqrt{m}}{\mathfrak{p}}$, so ist $N\mathfrak{a} = \dfrac{1-m}{2}$. Ist also $m \equiv 3 \pmod 8$, so ist $\mathfrak{a}$ ein solches Ideal.

Es sind also unerledigt die Körper $R(\sqrt{m})$ mit $m \equiv -1 \pmod 8$ (etwa $R(\sqrt{-17})$), bei denen alle Primteiler von m die Form $4n + 1$ haben.

Weiter bin ich nicht gekommen und ich sehe auch keinen Weg dazu.

Darf ich bei dieser Gelegenheit noch auf eine kleine Unrichtigkeit in Ihrer Arbeit hinweisen, die sich aber in Ordnung bringen lässt. Die Transfomationsklasse $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$ lässt sich nicht so normieren wie auf Seite 316 unten angegeben ist. Erreichen kann man nur

$$M_\nu \equiv \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ 0 & d_\nu \end{pmatrix}$$

mit $b_\nu \equiv 0 \pmod{12}$, $a_\nu \equiv d_\nu \pmod{12}$ und $\boxed{a_\nu \equiv d_\nu \equiv 1 \pmod 4.}$

Aber damit kommt man glücklicher Weise beim Beweis aus. Allerdings genügt es nicht von $\chi_{12}(S)$ zu wissen, dass für $S \equiv E \pmod{12}$ $\chi_{12}(S) = 1$ ist (Seite 120), sondern es muss für $S \equiv \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \pmod{12}$ mit $c \equiv 1 \pmod 4$ $\chi_{12}(S) = 1$ gezeigt werden. Das folgt etwa aus der Formel.

Vielleicht fällt Ihnen ein, wie man den Beweis zu Ende führen kann.

Wir haben uns sehr über Ihren Aufenthalt bei uns gefreut[2]. Meine Frau liest andauernd in dem Buch.

Mit vielen Grüssen Ihr

Artin

Beste Grüße

N. Artin[3]

---

[2]Siehe 47.2.

[3]N. Artin steht für Artins Ehefrau, Natascha Artin.

Kommentare zum Brief Nr.47:

47.1 Der Fehler beim Hauptidealsatz

Es handelt sich um die Hassesche Arbeit „Zum Hauptidealsatz in der komplexen Multiplikation“ in den Monatsheften der Mathematik und Physik 1931 [Has31c]. Es geht um einen Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper der imaginär-quadratischen Körper. Ein solcher Beweis war im Jahre 1929 in der Dissertation von W. Schäfer gegeben worden, einem Doktoranden Hasses. Zwar war 1929 schon ein allgemeiner Beweis des Hauptidealsatzes im Rahmen der Klassenkörpertheorie bekannt, und zwar nach Furtwängler (vgl. 13.1.3). Jedoch strebte Hasse einen auf analytischen Grundlagen fußenden Beweis im Rahmen der komplexen Multiplikation an (vgl. 6.1).

Schäfers Beweis war jedoch noch mit einigen Zusatzbedingungen belastet; er konnte nur solche Primideale $\mathfrak{p}$ behandeln, die nicht in der Diskriminante des imaginär-quadratischen Körpers k aufgehen und deren Norm $N\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod 12$ ist. In einem zweiten Beweis konnte er zwar alle Primideale behandeln, musste aber voraussetzen, dass die Diskriminante d prim ist zu 2 und 3. Die Schäfersche Dissertation [Sch29a] ist niemals in einer mathematischen Zeitschrift publiziert worden. Sie war jedoch als gedruckte Dissertation erhältlich und es ist anzunehmen, dass Artin ein Exemplar davon erhalten hatte.

Ausgehend von der Schäferschen Dissertation hatte Hasse im Jahre 1931 einen Beweis publiziert, der die von Schäfer ausgelassenen Fälle mit behandelt [Has31c]. Wie wir aus diesem Brief entnehmen, hatte Artin nun einen Fehler bemerkt, der sowohl die Schäfersche als auch die Hassesche Arbeit betrifft.

Wie es scheint, konnte dieser Fehler nicht sofort beseitigt werden. Hasse ist auf diese Frage später noch einmal zurückgekommen, in der Arbeit „Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern“ 1951 im Journal of the Mathematical Society of Japan [Has51b]. Dort heißt es:

> *Anlass zu dieser Note ist eine von Artin bemerkte Unrichtigkeit in einer früheren Arbeit von mir.*

Dabei bezieht sich Hasse auf die oben genannte Arbeit [Has31c].

Wie Artin in seinem Brief erläutert, geht es darum, ob in jeder Idealklasse des gegebenen imaginär-quadratischen Zahlkörpers $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ Ideale $\mathfrak{a}$ mit Norm $N\mathfrak{a} \equiv 1 \bmod 12$ vorkommen. Das ist jedoch nicht immer der Fall. Has-

se zeigt nun in [Has51b], dass dies dann und nur dann der Fall ist, wenn der absolute Klassenkörper linear disjunkt ist zum Körper $k(\sqrt{-3}, \sqrt{-4})$, d.h. wenn die Primdiskriminanten $-3, -4$ nicht als Diskriminantenprimteiler von k vorkommen. Für die hierdurch nicht erfassten imaginär-quadratischen Körper ist daher die Hasse-Schäfersche Methode nicht anwendbar. Kurz darauf hat Terada [Ter54] gezeigt, dass durch eine Modifikation des Hasseschen Beweises auch die Klassen von Idealen mit $N(\mathfrak{a}) \equiv 5 \bmod 12$ erfasst werden können. Schliesslich hat dann Reichardt [Rei59] einen ausnahmslos gültigen Beweis gegeben.

47.2 Hasses Besuch in Hamburg.

Im November 1932 hielt Hasse auf Einladung von A. Fraenkel einen Kolloquiumsvortrag in Kiel mit dem Titel:

> *Über das asymptotische Verhalten der Lösungsanzahlen von Kongruenzen modulo p.*

Anschließend plante er einen Besuch in Hamburg „*with the only purpose to be together with the Artins*“, wie er in einem Brief an Davenport schrieb. Artin jedoch überredete ihn, auch im Hamburger Kolloquium vorzutragen, und Hasse tat das, mit demselben Thema wie in Kiel.

Aus dem vorliegenden Brief können wir lediglich entnehmen, dass Hasse seinen Besuch bei Artin in Hamburg realisiert hat. Aus seinem Bericht, den er über diesen Besuch an Davenport geschickt hat, können wir mehr entnehmen, nämlich: Artin hat ihn im Gespräch darauf hingewiesen, dass die angestrebten asymptotischen Resultate über Lösungsanzahlen von Kongruenzen gleichbedeutend sind mit der sogenannten „Riemannschen Vermutung“ für die Zetafunktionen der in Rede stehenden Funktionenkörper der Charakteristik p.

In seiner Dissertation (Leipzig 1921) hatte Artin für quadratische Funktionenkörper über $\mathbb{F}_p$ eine Zetafunktion eingeführt und an einer Reihe von Beispielen die Riemannsche Vermutung dafür numerisch verifiziert [Art24a, Art24b]. Später hatte er in Briefen an seinen akademischen Lehrer Herglotz seine Überlegungen in Richtung auf einen allgemeinen Beweis weiter geführt, dies jedoch nie publiziert.[4] Nunmehr, angeregt durch Hasses Hamburger Vortrag, hat sich Artin offenbar an seine damaligen Resultate erinnert und war

[4] Siehe [Ull00], [Roq02b].

dadurch in der Lage, Hasse den Zusammenhang zwischen dem Problem der Kongruenz-Lösungsanzahlen und der Riemannschen Vermutung aufzuzeigen.

Dies gab den Anstoß für Hasse, einen Beweis dieser Riemannschen Vermutung zu suchen.

Wir wissen, dass er drei Monate später einen Beweis für den Fall elliptischer Funktionenkörper gefunden hat. Diese Geschichte ist in [Roq04] ausführlich dargestellt.

Somit hat der Besuch Hasses in Hamburg, der im vorliegenden Brief nur durch einen einzigen Satz dokumentiert wird, weitreichende Folgen gezeitigt.

48 17.01.1934, Brief von Artin an Hasse

Hamburg, den 17. Jan. 1934

Lieber Herr Hasse!

Hätten Sie Lust in diesem Semester zu uns zu Gastvorträgen zu kommen? Sie könnten sprechen worüber Sie Lust haben. Vielleicht die schönen Ergebnisse über die Riemannsche Vermutung? Sie sind doch das schönste, was seit Jahrzehnten gemacht worden ist. Meine Hörer würde das sehr interessieren. Wenn Sie schreiben ob und auch wann Sie kommen wollen, werde ich bei der Behörde alles beantragen und Sie bekommen die offizielle Einladung. Es wäre nett wenn Sie sich auf eine Woche frei machen könnten aber zur Not sind wir mit weniger auch zufrieden.[1]

Bitte lassen Sie mich meine Entschuldigungen auf die mündliche Unterhaltung verschieben. Es ist sonst zu kompliziert.

In Erwartung Ihrer Zustimmung mit vielen herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

Ihr Artin

[1] Siehe 48.1.

Kommentare zum Brief Nr. 47:

48.1 Hasses Arbeiten zur R.V. in Funktionenkörpern

Seit dem vorausgegangenen Brief ist mehr als ein Jahr vergangen. Es ist uns nicht bekannt, weshalb der vorher sehr intensive Briefwechsel in diesem Jahr aussetzte. Vielleicht lag das daran, dass die mathematischen Interessen der beiden Briefpartner in diesem Jahr etwas auseinander gingen: Hasse arbeitete intensiv an der Ausarbeitung seines Beweises der Riemannschen Vermutung (=R.V.) für elliptische Funktionenkörper in Charakteristik p, während sich Artin auf die weitere Entwicklung der Klassenkörpertheorie konzentrierte, die er ja von abelschen auf galoissche Körper erweitern wollte. Vielleicht gab es auch andere Gründe, z.Bsp. die politische Entwicklung in Deutschland durch die Machtübernahme der Nationalsozialisten im Januar 1933. Die berüchtigten Beamtengesetze wirkten sich ja gerade an den Universitäten und auch in der Mathematik katastrophal aus. Artin sagt in seinem Brief, dass er die Erklärungen für sein briefliches Schweigen mündlich geben möchte.

Es geht aber in dem vorliegenden Brief um mehr als nur die Wiederaufnahme des Kontakts. Artin ist beeindruckt von den neuerlichen Resultaten Hasses zur Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper in Charakteristik p. Wir haben schon in 47.2 erwähnt, dass Artin in seiner Dissertation als Erster die Riemannsche Vermutung formuliert und in Einzelfällen numerisch verifiziert hatte. Und dass er sich vor etwa einem Jahr, also Anfang Dezember 1932, mit Hasse über diesen Problemkreis unterhalten und wesentliche Anregungen gegeben hatte. Jetzt war er interessiert, nähere Einzelheiten zu erfahren.

Es geht dabei um die *neue* Fassung des Hasseschen Beweises. Wie in [Roq04] berichtet, war Hasses erster Beweis nur durch Rückgriff auf die klassische Theorie der Komplexen Multiplikation, die auf analytischen Grundlagen beruhte, gelungen. Noch im September, auf der DMV-Tagung in Würzburg, hatte er über diesen seinen ersten Beweis berichtet. Im Laufe des Jahres 1933 jedoch, bei der Ausarbeitung seines Beweises, hatte Hasse entdeckt, dass er die wesentlichen Tatsachen aus der Komplexen Multiplikation, die er beim Beweis benötigte, auch direkt für Funktionenkörper in beliebiger Charakteristik entwickeln könne. Mit anderen Worten: Hasse entwickelte die algebraische Theorie der Endomorphismen von elliptischen Kurven, und der Struktur ihrer Endomorphismenringe.

Das war zum Zeitpunkt der Abfassung dieses Briefes noch nicht publiziert. Offenbar hatte Artin davon gehört und wollte nun einzelne Details

wissen. Wir werden im folgenden Brief lesen, dass Artin auch angeboten hat, den Hasseschen Beweis in den „Hamburger Abhandlungen" zu publizieren. Das Angebot hat Hasse angenommen, jedoch nur im Sinne einer etwas ausführlicheren Ausarbeitung seines Vortragsmanuskripts [Has34a]. Die Darstellung der Einzelheiten sollte einer gesonderten Arbeit vorbehalten bleiben. Es dauerte dann noch mehr als zwei Jahre bis diese Arbeit in drei Teilen publiziert werden konnte. Schuld an dieser Verzögerung waren nicht zuletzt die durch die nationalsozialistische Politik bedingten turbulenten Verhältnisse, in die Hasse durch seine Berufung nach Göttingen hineingeraten war, und die ihn in seiner wissenschaftlichen Arbeit stark behinderten (vgl. [Fre77]).

Wir verweisen auf den Bericht [Roq06].

49 1934, Brief von Artin an Hasse

1934 [1]

Lieber Herr Hasse!

Wir sind mit Ihrem Vorschlag einverstanden und bitten Sie, diesen Brief als die offizielle Einladung anzusehen.[2] Als Honorar können wir Ihnen 200 M anbieten. Mit der genauen Festlegung der Zeiten müssen wir noch warten, da ich das mit den Kollegen verabreden muss. Sind Sie mit dem Titel des Vortrages „Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern“ einverstanden?

Ich bin ganz begeistert von Ihren neuen Ergebnissen und ungeheuer gespannt.

Nun noch einen anderen Vorschlag: Wollen Sie davon nicht einiges in unseren Abhandlungen veröffentlichen? Etwa Ihren Vortrag bei uns? Wir würden uns ausserordentlich darüber freuen.[3]

Ich muss nun schliessen, damit der Brief noch rechtzeitig wegkommt und bleibe mit allseitigen Grüssen

Ihr Artin

[1] Undatiert.

[2] Es handelt sich um die Einladung zu einem Vortrag im Mathematischen Kolloquium der Universität Hamburg. Vgl. 48.1.

[3] Die Hassesche Vortragsausarbeitung erschien dann in der Tat in den Hamburger Abhandlungen [Has34a].

Teil III

Anhang

Namenverzeichnis

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AH25] E. Artin and H. Hasse. Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der l–ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ. *J. Reine Angew. Math.*, 154:143–148, 1925. 82, 83, 84, 117, 168

[AH28] E. Artin and H. Hasse. Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 6:146–162, 1928. 119, 168, 176, 233, 235, 236, 242, 253, 310

[Alb32] A. A. Albert. On the construction of cyclic algebras with a given exponent. *Am. J. Math.*, 54:1–13, 1932. 443

[Alb34] A. A. Albert. Cyclic fields of degree p^n over F of characteristic p. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40:625–631, 1934. 211

[ANT44] E. Artin, C. Nesbitt, and R. Thrall. *Rings with minimum condition.*, volume 1 of *University of Michigan Publications in Math.* University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1944. x, 123 p. 365

[Ara30] H. Aramata. Über die Teilbarkeit der Dedekindschen Zetafunktionen. *Proceedings Acad. Tokyo*, 9:31–34, 1930. 359

[Arf39] C. Arf. Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper. *J. Reine Angew. Math.*, 181:1–44, 1939. 346, 354

[Arr98] M. Arrigoni. On Schur σ-groups. *Math. Nachrichten*, 192:71–89, 1998. 278

[Art23a] E. Artin. Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper. *Math. Ann.*, 89:147–156, 1923. 63

[Art23b] E. Artin. Über eine neue Art von L-Reihen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 3:89–108, 1923. 42, 63, 86, 87, 89, 92, 106, 113, 130, 137, 192, 231, 260, 317, 319, 320, 321

[Art24a] E. Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen I. (Arithmetischer Teil.). *Math. Z.*, 19:153–206, 1924. 448

[Art24b] E. Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen II. (Analytischer Teil.). *Math. Z.*, 19:207–246, 1924. 448

[Art25a] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 4:47–72, 1925. 105

[Art25b] E. Artin. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 4:174–177, 1925. 105

[Art27a] E. Artin. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:353–363, 1927. 42, 130, 145, 151, 155, 159, 171, 192, 194, 202, 230, 317

[Art27b] E. Artin. Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:100–115, 1927. 11

[Art28a] E. Artin. Über einen Satz von Herrn J.H. Maclagan Wedderburn. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:301–306, 1928. 364

[Art28b] E. Artin. Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:251–260, 1928. 230, 360, 364, 365

[Art28c] E. Artin. Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:261–289, 1928. 230, 364, 385

[Art29] E. Artin. Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz. 1929. 196, 197, 262, 270, 274, 277

[Art30] E. Artin. Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 8:292–306, 1930. Collected Papers, 1965, pp. 165–179. 319, 320, 347, 357, 359, 363

[Art31] E. Artin. Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 164:1–11, 1931. 320, 323, 324, 335, 341, 349, 350, 358, 359, 362, 363, 370

[Art32a] E. Artin. Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 167:157–159, 1932. 398

[Art32b] E. Artin. Über die Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 167:153–156, 1932. 206, 207, 399

[Art32c] E. Artin. *Vorträge über Klassenkörpertheorie. Ausgearbeitet von Olga Taussky.* Selbstverlag, Göttingen, 1932. 23 p. 400

[Art47] E. Artin. Theory of Braids. *Ann. Math. (2)*, 48:101–126, 1947. 106

[Art07] E. Artin. *Exposition by Emil Artin; A Selection. Edited by Michael Rosen.*, volume 30 of *History of Mathematics Sources.* American Math. Soc., London Math. Soc., 2007. X+346 p.

[AS27] E. Artin and O. Schreier. Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:225–231, 1927. 209

[AT68] E. Artin and J. Tate. *Class field theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968. XXVI, 259 p. Nachdruck der Ausarbeitung eines Seminars im Jahre 1951 an der Universität Princeton. 91, 187, 223, 429

[AW46] E. Artin and G. Whaples. A note on Axiomatic Characterization of Fields. *Bull. Am. Math. Soc.*, 52:245–247, 1946. 301

[Ben66] H. Benz. Zur Invariantenbestimmung in lokalen einfachen Algebren. In H. Hasse and P. Roquette, editors, *Algebraische Zahlentheorie*, pages 9–16, 1966. Tagungsbericht 1964, Math. Forschungsinstitut Oberwolfach. 419

[Ben67] H. Benz. Untersuchungen zur Arithmetik in lokalen einfachen Algebren, insbesondere über maximalen Teilkörpern. I. *J. Reine Angew. Math*, 225:30–75, 1967. 418, 419

[Ber04] F. Bernstein. Über unverzweigte Abelsche Körper (Klassenkörper) in einem imaginären Grundbereich. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 13:116–119, 1904. 152

[BH65] L. Bernstein and H. Hasse. Einheitenberechnung mittels des Jacobi-Perronschen Algorithmus. *J. Reine Angew. Math.*, 218:51–69, 1965. 35

[BH75] L. Bernstein and H. Hasse. Ein formales Verfahren zur Herstellung parameter-abhängiger Scharen quadratischer Grundeinheiten. *J. Reine Angew. Math.*, 275:206–212, 1975. 35

[BHN32] R. Brauer, H. Hasse, and E. Noether. Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. Reine Angew. Math.*, 167:399–404, 1932. 409, 411, 415, 444

[Bil37] H. Bilharz. Primdivisoren mit vorgegebener Primitivwurzel. *Math. Ann.*, 114:476–492, 1937. 247

[Bli04] H. F. Blichfeldt. On the order of linear homogeneous groups (second paper). *Trans. Am. Math. Soc.*, 5:310–325, 1904. 345

[Bra28] R. Brauer. Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. *Math. Z.*, 28:677–696, 1928. 443, 444

[Bra45] R. Brauer. On the representations of a group of order g in the field of g-th roots of unity. *Amer. J. Math.*, 67:461–471, 1945. 411

[Bra47a] R. Brauer. Applications of induced characters. *Amer. J. Math.*, 69:709–716, 1947. 316, 322, 345, 411

[Bra47b] R. Brauer. On Artins L-series with general group characters. *Ann. of Math. (2)*, 48:502–514, 1947. 359

[Bra67] R. Brauer. Emil Artin. *Bull. American Math. Soc.*, 73:27–43, 1967. 107

[Brü66] H. Brückner. Eine explizite Formel zum Reziprozitätsgesetz für Primzahlexponenten p. In H. Hasse and P. Roquette, editors, *Algebraische Zahlentheorie*, pages 31–39, 1966. Tagungsbericht 1964, Math. Forschungsinstitut Oberwolfach.

[Brü79] H. Brückner. Explizites Reziprozitätsgesetz und Anwendungen. Technical Report Heft 2, Fachbereich Mathematik, Universität Essen, 1979. Vorlesungsausarbeitung von Jutta Klingen, 83 S.

[BZ85] H. Benz and H. Zassenhaus. Über verschränkte Produktordnungen. *J. Number Theory*, 20:282–298, 1985. 419

[CE56] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra.* Princeton Univ. Press, 2 edition, 1956. XII + 390 p. 201

[CH31] C. Chevalley and J. Herbrand. Nouvelle démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:814–815, 1931. 389

[Che26] N. (Tschebotareff) Chebotarev. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören. *Math. Ann.*, 95:191–228, 1926. 110, 145, 179, 192, 260

[Che31] C. Chevalley. Relation entre le nombre de classes d'un sous-corps et celui d'un sur-corps. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:257–258, 1931. 181

[Che33a] C. Chevalley. La théorie du symbole de restes normiques. *J. Reine Angew. Math.*, 169:140–157, 1933. 292

[Che33b] C. Chevalley. Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I 2:365–476, 1933. 148, 353, 399, 400, 403

[Che34] C. Chevalley. Sur certains idéaux d'une algèbre simple. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:83–105, 1934. 386

[Che36] C. Chevalley. Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies. *J. Math. pur. appl. (9)*, 15:359–371, 1936. 51, 185, 368

[Che40] C. Chevalley. La théorie du corps de classes. *Ann. Math. (2)*, 41:394–418, 1940. 410

[Coh78] H. Cohn. *A classical invitation to algebraic numbers and class fields. With two appendices by Olga Taussky: "Artin's 1932 Göttingen lectures on class field theory" and "Connections between algebraic number theory and integral matrices."*. Universitext. Springer–Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1978. XIII, 328 p. 400

[Ded32] R. Dedekind. *Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. v. Robert Fricke, Emmy Noether u. Öystein Ore. Bd.1-3.* Friedr. Vieweg & Sohn A.–G., Braunschweig, 1930-1932. 397/442/508 S. 37

[Del73] P. Deligne. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. In *Lecture Notes Math.*, volume 349, pages 501–597, Berlin, 1973. Springer. Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972). 322

[Deu35a] M. Deuring. *Algebren.* Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete. Julius Springer, Berlin, 1935. 143 S. 426

[Deu35b] M. Deuring. Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz. *Math. Ann.*, 110:414–415, 1935. 114

[Dic23] L. E. Dickson. *Algebras and Their Arithmetics.* Univ. of Chicago Press., Chicago, 1923. XII, 241p. 360

[Die57] J. Dieudonné. On the Artin-Hasse exponential series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8:210–214, 1957. 244

[Dwo56] B. Dwork. On the Artin root number. *Amer. J. Math.*, 78:444–472, 1956. 322

[Eis50a] G. Eisenstein. Beweis der allgemeinsten Reciprocitätsgesetze zwischen reellen und complexen Zahlen. *Ber. Königl. Akademie d. Wiss. Berlin*, 1850:189–198, 1850. Nachdruck in Mathematische Werke, Band II, [39], pp. 712–721. 117

[Eis50b] G. Eisenstein. Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze. *J. Reine Angew. Math.*, 39:351–364, 1850. Nachdruck in Mathematische Werke, Band II, [36], pp. 623–636. 82, 117, 118, 167

[Fei79] W. Feit. Richard Brauer. *Bull. Am. Math. Soc. New Ser.*, 1:1–20, 1979. 371

[Fes95] I. Fesenko. Hasse-Arf property and Abelian extensions. *Math. Nachr.*, 174:81–87, 1995. 345

[FJ86] M.D. Fried and M. Jarden. *Field arithmetic.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1986. xvi+458 p. 114

[Fra67] A. Fraenkel. *Lebenskreise.* Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1967. 38

[Fre77] G. Frei. *Leben und Werk von Helmut Hasse 1. Teil: Der Lebensgang.*, volume 37 of *Collection Mathématique, Série: Mathématiques pures et appliquées.* Université Laval, Québec, 1977. 59 S. 22, 34, 37, 40, 41, 90, 297, 336, 370, 452

[Fre79] G. Frei. On the development of the genus of quadratic forms. *Ann. Sci. Math. du Québec*, 3:5–62, 1979. 277, 286

[Fre81a] G. Frei. *Die Briefe von E. Artin an H. Hasse (1923–1953)*, volume 37 of *Collection Mathématique.* Dept. Math., Univ. Laval, Québec, 1981. 166 S. 23, 37, 41

[Fre81b] G. Frei. *Felix Klein (1849-1925).*, volume 40 of *Collection Mathématique*. Dept. Math., Univ. Laval, Québec, 1981. 36

[Fre81c] G. Frei. *Helmut Hasse (1898-1979).*, volume 38 of *Collection Mathématique*. Dept. Math., Univ. Laval, Québec, 1981. 37

[Fre84] G. Frei. Felix Klein (1849-1925) - A biographical sketch. *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, pages 229–254, 1984. Math. Surv. 17. 36

[Fre85a] G. Frei. *Der Briefwechsel David Hilbert - Felix Klein (1886 - 1918). Mit Anmerkungen herausgegeben von Günther Frei.*, volume 19 of *Arbeiten aus der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1985. XI, 153 S. 36

[Fre85b] G. Frei. Helmut Hasse (1898-1979). *Expositiones Math.*, 3:55–69, 1985. 37

[Fre89] G. Frei. Heinrich Weber and the Emergence of Class Field Theory. In D. Rowe and J. McCleary, editors, *The History of Modern Mathematics*, volume 1, pages 425–450. Academic Press, Boston, 1989. 14, 41, 44, 49

[Fre94] G. Frei. The Reciprocity Law from Euler to Eisenstein. In Ch. Sasaki, M. Sugiura, and J.W. Dauben, editors, *The Intersection of History and Mathematics*, pages 67–88. Birkhäuser, Basel, 1994. 42

[Fre98a] G. Frei. Helmut Hasse und seine Arbeiten im Crelleschen Journal. *J. Reine Angew. Math.*, 500:16–21, 1998. 19

[Fre98b] G. Frei. Zum Gedenken an Bartel Leendert van der Waerden (2.2.1903-12.1.1996). *Elem. Math.*, 53(4):133–138, 1998. 39

[Fre01a] G. Frei. How Hasse was led to the Theory of Quadratic Forms, the Local-Global-Principle, the Theory of the Norm Residue Symbol, the Reciprocity Laws, and to Class Field Theory. In Katsuya Miyake, editor, *Class field theory – its centenary and prospect. Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, June 3–12, 1998*, volume 30 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–62, Tokyo, 2001. Mathematical Society of Japan. 12, 41

[Fre01b] G. Frei. On the development of the theory of function fields over a finite field from Gauss to Dedekind and Artin. Preprint, 2001. 14, 41

[Fre04] G. Frei. On the History of the Artin Reciprocity Law in Abelian Extensions of Algebraic Number Fields: How Artin was led to his Reciprocity Law. In O.A. Laudal and R. Piene, editors, *The Legacy of Niels Henrik Abel. The Abel Bicentennial, Oslo 2002.* Springer, Berlin Heidelberg, 2004. 41, 176, 230, 300, 301

[Fre06] G. Frei. *Gauss' unpublished Section Eight of the Disquisitiones arithmeticæ: The Beginning of the Theory of Function Fields over a Finite Field.* Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, II. Mathematisch-Physikalische Klasse. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2006. 71 S. 41

[Fre07] G. Frei. Developments in the theory of algebras over number fields: A new foundation for the Hasse norm residue symbol and new approaches to both the Artin reciprocity law and class field theory. In Jeremy J. Gray and Karen Hunger Parshall., editors, *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1850).*, pages 117–151. Amer. Math. Soc. and London Math. Soc., 2007. 41, 385

[Fro96] G. Frobenius. Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1896:689–703, 1896. 110, 112

[Frö83] A. Fröhlich. *Galois module structure of algebraic integers.* Springer, Berlin und Heidelberg, 1983. X u. 262 S. 326

[FS06a] G. Frobenius and I. Schur. Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1906:209–217, 1906. 342

[FS06b] G. Frobenius and I. Schur. Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1906:186–208, 1906. 342

[FS92] G. Frei and U. Stammbach. *Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich, 1913-1930.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1992. 181 S. 11

[FS07] D. Fenster and J. Schwermer. Beyond class field theory: Helmut Hasse's arithmetic in the theory of algebras in early 1931. *Arch. History Exact Sci.*, 61:425–456, 2007. 145, 371

[Fue24] R. Fueter. *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.*, volume 1. Teubner, Berlin, 1924. 142 S. 335

[Fur04] Ph. Furtwängler. Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l-ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. *Math. Ann.*, 58:1–50, 1904. Leicht gekürzte und vereinfachte Form des Artikels mit fast gleichem Titel in den Göttinger Abhandlungen 2, (1902) pp. 3-82.

[Fur08] Ph. Furtwängler. Über die Klassenzahlen Abelscher Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 134:91–94, 1908. 182

[Fur09] Ph. Furtwängler. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern, I. *Math. Ann.*, 67:1–31, 1909. 152

[Fur12] Ph. Furtwängler. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern, II. *Math. Ann.*, 72:346–386, 1912.

[Fur13] Ph. Furtwängler. Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern, III. *Math. Ann.*, 74:413–429, 1913.

[Fur16] Ph. Furtwängler. Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, 27:1–15, 1916. 193, 222, 264

[Fur26] Ph. Furtwängler. Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten. *J. Reine Angew. Math.*, 157:15–25, 1926. 149

[Fur29] Ph. Furtwängler. Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 7:14–36, 1929. 104, 197, 198, 259, 262

[Fur32] Ph. Furtwängler. Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 167:379–387, 1932. 271, 338

[Gau89] C.F. Gauss. Theorie der biquadratischen Reste. Zweite Abhandlung. In H. Maser, editor, *Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik*, pages 534–586. Julius Springer, Berlin, 1889. Deutsche Übersetzung. 176

[Gil42] D. Gilbarg. The structure of the group of $\mathfrak{P}$-adic 1-units. *Duke Math. J.*, 9:262–271, 1942. 301

[GS64] E. Golod and I. Shafarevich. On class field towers. *Am. Math. Soc. Translations (2).*, 48:91–102, 1964. 222

[Has23] H. Hasse. Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 152:205–224, 1923. 286

[Has24a] H. Hasse. Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 153:113–130, 1924. 12, 364

[Has24b] H. Hasse. Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 153:192–207, 1924. 77, 78, 79, 80, 82

[Has24c] H. Hasse. Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern. Zweiter Teil: Fall eines ungeraden ℓ. *J. Reine Angew. Math.*, 153:184–191, 1924. 77, 164

[Has24d] H. Hasse. Zur Theorie des quadratischen Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 153:76–93, 1924. 164

[Has25a] H. Hasse. Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste für beliebige, zu l prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der l-ten Einheitswurzeln. *J. Reine Angew. Math.*, 154:199–214, 1925. 85

[Has25b] H. Hasse. Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste für beliebige, zu l prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der l-ten Einheitswurzeln. *J. Reine Angew. Math.*, 154:215–218, 1925. 84

[Has25c] H. Hasse. Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das Hilbertsche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades l. *J. Reine Angew. Math.*, 154:20–35, 1925. 77, 164, 228

[Has25d] H. Hasse. Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ. *J. Reine Angew. Math.*, 154:96–109, 1925. 85, 167, 256

[Has25e] H. Hasse. Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz in algebraischen Zahlkörpern. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 33, 2.Abteilung:97–101, 1925. 85

[Has25f] H. Hasse. Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern. Dritter Teil: Normierung. *J. Reine Angew. Math.*, 154:174–177, 1925. 77, 164

[Has26a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I: Klassenkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 35:1–55, 1926. 15, 49, 50, 132, 170, 185, 188, 218, 219, 279, 335, 341, 358, 388, 390

[Has26b] H. Hasse. Besprechung des Buches: R. Fueter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Erster Teil. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 35:55–62, 1926. 2. Abteilung. 335

[Has27a] H. Hasse. Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu I. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 36:233–311, 1927. 49, 50, 135, 170, 188, 206, 364

[Has27b] H. Hasse. Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der n-ten Potenzreste. *Math. Ann.*, 97:599–623, 1927. 107, 150

[Has27c] H. Hasse. *Höhere Algebra. Bd. II: Gleichungen höheren Grades.*, volume 932 of *Sammlung Göschen.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1927. 160 S. 91

[Has27d] H. Hasse. Neue Begründung der komplexen Multiplikation I: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 157:115–139, 1927. 102, 279, 335

[Has27e] H. Hasse. Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste. *J. Reine Angew. Math.*, 158:228–259, 1927. 155, 159, 160, 161, 163, 164, 165, 171, 194, 208, 209, 210, 290

[Has29] H. Hasse. Zum expliziten Reziprozitätsgesetz. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 7:52–63, 1929. 82, 167, 249, 256, 258, 310

[Has30a] H. Hasse. *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II: Reziprozitätsgesetz.*, volume 6 of *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., Ergänzungsband.* B. G. Teubner, 1930. IV + 204 S. 51, 52, 128, 135, 146, 148, 153, 158, 163, 175, 185, 196, 198, 226, 231, 260, 262, 277, 278, 308, 309, 318, 367

[Has30b] H. Hasse. Die moderne algebraische Methode. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 31:22–34, 1930. Reprinted in English translation in the *Mathematical Intelligencer*, vol. 8, 1986. 91

[Has30c] H. Hasse. Die Normenresttheorie relativ–Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:145–154, 1930. 269, 287, 289, 291, 301, 334, 394

[Has30d] H. Hasse. Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 162:169–184, 1930. 334, 344, 345, 350, 352, 353, 358

[Has30e] H. Hasse. Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols. *J. Reine Angew. Math.*, 162:134–144, 1930. 289, 291, 334, 410

[Has31a] H. Hasse. Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.–Phys. Kl. I*, pages 70–79, 1931. 366

[Has31b] H. Hasse. Über $\wp$–adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. *Math. Ann.*, 104:495–534, 1931. 354, 364, 365, 366, 385, 415

[Has31c] H. Hasse. Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation. *Monatsh. Math. Phys.*, 38:315–322, 1931. 447

[Has32a] H. Hasse. Additional note to the author's "Theory of cyclic algebras over an algebraic number field". *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:727–730, 1932. 416, 417

[Has32b] H. Hasse. Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. *Trans. Am. Math. Soc.*, 34:171–214, 1932. 366, 372, 407, 410, 411, 415, 416, 417, 418, 426

[Has33a] H. Hasse. Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Insbesondere Begründung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitätsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln. *Math. Ann.*, 107:731–760, 1933. 146, 148, 166, 229, 292, 309, 349, 365, 411, 418, 443

[Has33b] H. Hasse. Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper. *Math. Ann.*, 109:191–195, 1933. 186

[Has33c] H. Hasse. Vorlesungen über Klassenkörpertheorie. Preprint, Marburg. [Later published in book form by Physica Verlag Würzburg (1967)], 1933. 148, 393, 411, 414

[Has34a] H. Hasse. Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:325–348, 1934. 452, 453

[Has34b] H. Hasse. Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I vol. 2, Part 10:477–498, 1934. 352, 353, 355

[Has34c] H. Hasse. Theorie der relativ–zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 172:37–54, 1934. 225

[Has34d] H. Hasse. Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra (Exposés mathématiques I.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(109):12–16, 1934. 354, 386

[Has37] H. Hasse. Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p. *J. Reine Angew. Math.*, 176:174–183, 1937. 211

[Has49] H. Hasse. *Zahlentheorie.* Akademie–Verlag, Berlin, 1949. XII, 468 S. 250, 336, 370, 398

[Has50] H. Hasse. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Springer–Verlag, Berlin, 1950. XII+474 p. 109, 370

[Has51a] H. Hasse. Zur Arbeit von I. R. Šafarevič über das allgemeine Reziprozitätsgesetz. *Math. Nachrichten*, 5:301–327, 1951. 212

[Has51b] H. Hasse. Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern. *J. Math. Soc. Japan*, 3:45–51, 1951. 447, 448

[Has52] H. Hasse. *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper.* Akademie–Verlag, Berlin, 1952. Reprint 1985 with an introduction of J. Martinet. 34, 158

[Has54] H. Hasse. Artinsche Führer, Artinsche L-Funktion, und Gaußsche Summen über endlich-algebraischen Zahlkörpern. *Acta Salamanticiensa Ciencias Seccion Matematicas*, 4:1–113, 1954. 322

[Has58] H. Hasse. Der 2^n-te Potenzcharakter von 2 im Körper der 2^n-ten Einheitswurzeln. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.*, 7:185–244, 1958. 177

[Has66] H. Hasse. Geschichte der Klassenkörpertheorie. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 68:166–181, 1966. 49, 429

[Has67] H. Hasse. *Vorlesungen über Klassenkörpertheorie.* Physica–Verlag, Würzburg, 1967. 275 S. 400

[Has73] H. Hasse. *Class Field Theory. Ed. Günther Frei.*, volume 11 of *Collection mathématique.* Québec: Université Laval, 1973. 34

[Has75a] H. Hasse. An algorithm for determining the structure of the 2-Sylow subgroup of the divisor class group of a quadratiq number field. In *Symp. math. 15, Inf. teor., Strutt. Corpi algebr., Convegni 1973.*, 1975. 341–352. 32

[Has75b] H. Hasse. *Mathematische Abhandlungen. Band 1, 2, 3. Herausgegeben von Heinrich Wolfgang Leopoldt und Peter Roquette.* Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1975. Band 1: XV, 535 S.; Band 2: XV, 525 S.; Band 3: X, 532 S., 1 Bild. 409

[Hau29] O. Haupt. *Einführung in die Algebra I, II.* B. G. Teubner, 1929. 336

[HB86] D.R. Heath-Brown. Artin's conjecture for primitive roots. *Quart. J. Math. Ser.(2)*, 37(145):27–38, 1986. 248

[HBP79] D.R. Heath-Brown and S. J. Patterson. The distribution of Kummer sums at prime arguments. *J. Reine Angew. Math.*, 310:111–130, 1979. 110

[Hec17] E. Hecke. Über eine neue Anwendung der Zetafunktion auf die Arithmetik der Zahlkörper. *Gött. Nachr.*, 1917:90–95, 1917. Werke 8, pp. 172–177. 86, 318

[Hec18] E. Hecke. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Erste Mitteilung. *Math. Z.*, 1:357–376, 1918. Werke, 12, pp. 215–234. 86

[Hec20] E. Hecke. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Zweite Mitteilung. *Math. Z.*, 6:11–51, 1920. Werke, 14, pp. 249–289. 86

[Hec23] E. Hecke. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.* Akad. Verlagsges., Leipzig, 1923. VIII u. 265 S. 212

[Hec87] E. Hecke. *Analysis und Zahlentheorie. Vorlesung Hamburg 1920. Bearbeitet von Peter Roquette.* Dokumente zur Geschichte der Mathematik. Vieweg, Braunschweig, 1987. XXV u. 234 S. 103

[Hen13] K. Hensel. *Zahlentheorie.* Göschen, Leipzig, 1913. XII 356p. 364

[Hen16] K. Hensel. Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. *J. Reine Angew. Math.*, 146:189–215, 1916. 77, 234

[Her30] J. Herbrand. Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Minkowski. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 191:1282, 1930. 207

[Her31a] J. Herbrand. Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification. *Journ. de Math. (9)*, 10:481–491, 1931. 353

[Her31b] J. Herbrand. Sur les unités d'un corps algébrique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192:24–27, 1931. 207, 398, 402

[Her32] J. Herbrand. Sur les classes des corps circulaires. *Journ. de Math. (9)*, 11:417–441, 1932. 181, 182

[Her33] J. Herbrand. Sur la non-contradiction de l'arithmétique. *J. Reine Angew. Math.*, 166:1–8, 1933. 403

[Her35] J. Herbrand. *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques; corps de classes et lois de réciprocité.* Mem. Sci. Math. 75. Gauthier–Villars, Paris, 1935. 72 p. 403

[Hey29] K. Hey. *Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen.* Dissertation, Hamburg, 1929. 49 p. 128

[Hil97] D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, 4:I–XVIII u. 175–546, 1897. Englische Übersetzung: The Theory of Algebraic Number Fields. Springer, Heidelberg, 1998. 12, 62, 108, 206, 226

[Hil99] D. Hilbert. Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. *Math. Ann.*, 51:1–127, 1899. 12

[Hil02] D. Hilbert. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. *Acta Math.*, 26:99–132, 1902. Mit geringen Änderungen abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten. 12

[HL20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A new solution of Waring's problem. *Quart. J. Math*, 48:272–293, 1920. 96

[Höl89] O. Hölder. Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. *Math. Ann.*, 34:26–56, 1889. 255

[Hon76] K. Honda. Teiji Takagi: A biography. On the 100th anniversary of his birth. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 24:141–167, 1976. 13

[Hoo67] C. Hooley. On Artin's conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 225:209–220, 1967. 248

[Hop39] C. Hopkins. Rings with minimum condition for left ideals. *Annals of Math. II.ser.*, 40:712–730, 1939. 365

[HS28] H. Hasse and A. Scholz. Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage. *Math. Z.*, 29:60–69, 1928. 188

[HS31] H. Hasse and Z. Suetuna. Ein allgemeines Teilerproblem der Idealtheorie. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Section I, vol.II, Part 5:133–154, 1931. 300, 370

[HS82] F. P. Heider and B. Schmithals. Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen. *J. Reine Angew. Math.*, 336:1–25, 1982. 339

[Hur96] A. Hurwitz. Über die Zahlentheorie der Quaternionen. *Göttinger Nachr.*, 7:314–340, 1896. 385

[Iwa56] K. Iwasawa. A note on the group of units of an algebraic number field. *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.*, 35:189–192, 1956. 266

[Iwa89a] K. Iwasawa. A note on capitulation problem for number fields. *Proc. Japan Acad.*, 65A:59–61, 1989. 265

[Iwa89b] K. Iwasawa. A note on capitulation problem for number fields II. *Proc. Japan Acad.*, 65A:183–186, 1989. 265

[Iya31] S. Iyanaga. Über den allgemeinen Hauptidealsatz. *Japanese Journ. of Math.*, 7:315–333, 1931. 201

[Iya33] S. Iyanaga. Sur un lemme d´arithmétique élémentaire dans la démonstration de la loi générale de réciprocité. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 197:728–730, 1933. 148

[Iya34] S. Iyanaga. Zum Beweise des Hauptidealsatzes. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:349–357, 1934. 196, 200, 262

[Jac99] A. Jackson. Interview with Henri Cartan. *Notices Amer. Math. Soc.*, 46:782–788, 1999. 401

[Jau88] J.-F. Jaulent. L'état actuel du problème de la capitulation. In *Sémin. Théor. Nombres*, chapter 17. Univ. Bordeaux I, 1988. 33 S. 271

[Jun51] H. Jung. *Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher.* Akademie-Verlag, Berlin, 1951. XII, 462 p. 295

[Kis97] H. Kisilevsky. Olga Taussky-Todd's work in class field theory. *Pacific J. of Math.*, 181:219–224, 1997. 264, 271, 338, 339

[Kne51] M. Kneser. Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von I. R. Šafarevič. *Math. Nachr.*, 6:89–96, 1951. 212

[Koc70] H. Koch. *Galoissche Theorie der p-Erweiterungen.*, volume 10 of *Mathematische Monographien*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970. V, 161 S. 224

[Kra37] M. Krasner. Sur la primitivité des corps p-adiques. *Mathematica, Cluj*, 13:72–191, 1937. 354

[Kru32] W. Krull. Allgemeine Bewertungstheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 167:160–196, 1932. 294

[Kum50] E. Kummer. Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen für die aus λ-ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und die idealen Factoren derselben. *J. Reine Angew. Math.*, 40:93–116, 1850. 178

[KV75] H. Koch and B. B. Venkov. Über den p-Klassenkörperturm eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers. *Astérisque*, 24-25:57–67, 1975. 223

[Lan98] G. Landsberg. Über das Analogon des Riemann-Rochschen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen. *Mathematische Annalen*, 50:577–582, 1898. 62

[Lan04] R. Langlands. Benim tanidigim Cahit Arf (Recollections of a year in Turkey with Cahit Arf) (turkish). *Matematik Dünyasi*, 2004(winter number), 2004. 322

[Lau91] G. Laumon. La transformation de Fourier géométrique et ses applications. In *Proc. Int. Congr. Math. Kyoto.*, volume 1, pages 437–445, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan. 324

[Lem00] F. Lemmermeyer. *Reciprocity Laws. From Euler to Eisenstein.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000. XIX, 487 p. 42, 176

[Len77] H.W. Lenstra. On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields. *Inventiones math.*, 42:201–224, 1977. 248

[Leo53] H.-W. Leopoldt. Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. *Math. Nachr.*, 9:351–362, 1953. 32

[LR06] F. Lemmermeyer and P. Roquette, editors. *Helmut Hasse and Emmy Noether. Their correspondence 1925-1935. With an introduction in English.* Universitäts–Verlag, Göttingen, 2006. 303 p. 41, 91, 188, 229, 292, 325, 349, 371, 386, 398, 400, 404, 416, 418

[Mag34] W. Magnus. Über den Beweis des Hauptidealsatzes. *J. Reine Angew. Math.*, 170:235–240, 1934. 199

[Mag35] W. Magnus. Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring. *Math. Ann.*, 111:259–280, 1935. 222

[Met07] T. Metsänkylä. On the history of the study of ideal class groups. *Expositiones Math.*, 25:325–340, 2007. 179

[Min90] H. Minkowski. Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coeffizienten ineinander transformirt werden können. *J. Reine Angew. Math.*, 106:5–26, 1890. 286

[Min00] H. Minkowski. Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern. *Göttinger Nachrichten*, 1900:90–93, 1900. 207

[Miy89] K. Miyake. Algebraic investigations of Hilbert's Theorem 94, the principal ideal theorem and the capitulation problem. *Expositiones Math.*, 7:289–346, 1989. 271

[Mur88] R Murty. Artin's conjecture for primitive roots. *Math. Intelligencer*, 10:59–67, 1988. 248

[Nak88] J. Nakagawa. On the Galois group of a number field with square free discriminant. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 37:95–98, 1988. 376

[Nic01] F. Nicolae. On Artin's L-functions. I. *J. Reine Angew. Math.*, 539:179–184, 2001. 342

[Noe26] E. Noether. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. *Math. Ann.*, 96:26–61, 1926. 187, 293

[Noe27] E. Noether. Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers. *J. Reine Angew. Math.*, 157:82–104, 1927. 325

[Noe29] E. Noether. Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.*, 30:641–692, 1929. 198, 365

[Noe32] E. Noether. Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. *J. Reine Angew. Math.*, 167:147–152, 1932. 325, 351, 352, 354, 398

[Noe34] E. Noether. Zerfallende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen. (Exposés mathématiques IV.). *Actual. Sci. Ind.*, 1934(148):15 p., 1934. 354, 386

[Noe50] E. Noether. Idealdifferentiation und Differente. *J. Reine Angew. Math.*, 188:1–21, 1950. 325

[Ode07] A. Odefey. Zur Musikalität Artins und seiner Familie. In K. Reich and A. Kreuzer, editors, *Emil Artin (1898-1962). Beiträge zu Leben, Werk und Persönlichkeit.*, pages 187–215. Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg, 2007. 96

[O'M63] T. O'Meara. *Introduction to Quadratic Forms.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 117. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1963. X, 342 p. 287

[Ost18] A. Ostrowski. Über einige Löungen der Funktionalgleichung $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. *Acta Math.*, 41:271–284, 1918. 398

[Pol29] F Pollaczek. Über die Einheiten relativ-Abelscher Zahlkörper. *Math. Z.*, 30:520–551, 1929. 265

[Rei26] K. Reidemeister. Knoten und Gruppen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg*, 5:7–23, 1926. 200

[Rei59] H. Reichardt. Ein Beweis des Hauptidealsatzes für imaginärquadratische Zahlkörper. *Math. Nachr.*, 17:318–329, 1959. 448

[Rei06] K. Reich. *Zum Gedenken an Emil Artin (1898-1962).* Hamburg University Press, Hamburg, 2006. 22

[Rei07] K. Reich. Artin in Hamburg 1922–1937. In Karin Reich and Alexander Kreuzer, editors, *Emil Artin (1898–1962). Beiträge zu Leben, Werk und Persönlichkeit.*, pages 41–98. Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg, 2007. 10, 22

[Roh64] H. Rohrbach. Helmut Hasse und das Crellesche Journal. *J. Reine Angew. Math.*, 214-215:443–444, 1964. 358

[Roh98] H. Rohrbach. Helmut Hasse and Crelle's Journal. *J. Reine Angew. Math.*, 500:5–13, 1998. 19

[Roq67] P. Roquette. On class field towers. In J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory. Proceedings of an international conference organized by the London Mathematical Society. Brighton, September 1–17, 1965.*, pages 231–249, London, 1967. London Mathematical Society. 223

[Roq98] P. Roquette. Zur Geschichte der Zahlentheorie in den dreißiger Jahren. Die Entstehung der Riemannschen Vermutung für Kurven, und ihres Beweises im elliptischen Fall. *Math. Semesterberichte*, 45:1–38, 1998. Nachdruck eines Artikels aus dem Jahrbuch 1996 der Braunschweigischen Mathematischen Gesellschaft. 41

[Roq00] P. Roquette. On the history of Artin's L-functions and conductors. Seven letters from Artin to Hasse in the year 1930. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19*:5–50, 2000. 41, 320, 325, 355, 386

[Roq01] P. Roquette. Class field theory in characteristic p, its origin and development. In Katsuya Miyake, editor, *Class field theory – its centenary and prospect. Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, June 3–12, 1998*, volume 30 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 549–631, Tokyo, 2001. Mathematical Society of Japan. 41, 187, 225

[Roq02a] P. Roquette. History of valuation theory. Part 1. In F. V. Kuhlmann et al., editor, *Valuation theory and its applications, vol.I.*, volume 32 of *Fields Institute Communications*, pages 291–355, Providence, RI, 2002. American Mathematical Society. 41

[Roq02b] P. Roquette. The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development. Part 1. The formation of the zeta-functions of Artin and F. K. Schmidt. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 21/2:79–157, 2002. 20, 41, 217, 448

[Roq04] P. Roquette. The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development. Part 2. The first steps by Davenport and Hasse. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 22:1–69, 2004. 20, 41, 449, 451

[Roq05a] P. Roquette. From FLT to finite groups. The remarkable career of Otto Grün. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 107, 2005. 41, 182

[Roq05b] P. Roquette. *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in historical perspective.*, volume 15 of *Schriftenreihe der Heidelberger Akademie der Wissenschaften.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005. I, 77 S. 36, 41, 229, 292, 371, 384, 388, 404, 408

[Roq06] P. Roquette. The Riemann hypothesis in characteristic p, its origin and development. Part 3. The elliptic case. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 25:103–176, 2006. 20, 41, 452

[RZ69] P. Roquette and H. Zassenhaus. A class rank estimate for algebraic number fields. *Journ. London Math. Soc.*, 44:31–38, 1969. 223

[RZ73] L. Rüdenberg and H. Zassenhaus. *Hermann Minkowski: Briefe an David Hilbert.* Springer, Berlin, 1973. 35

[Sch02] I. Schur. Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1902:1013–1019, 1902. 195, 198

[Sch06] I. Schur. Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1906:164–184, 1906. 411

[Sch26a] O. Schreier. Über die Erweiterung von Gruppen II. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 4:321–346, 1926. 196, 200

[Sch26b] O. Schreier. Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:1–6, 1926. 111, 148, 260

[Sch28] O. Schreier. Über den Jordan-Hölderschen Satz. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 6:300–302, 1928. 255

[Sch29a] W. Schäfer. Beweis des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie für den Fall der komplexen Multiplikation. *Dissertation Halle*, 1929. 447

[Sch29b] A. Scholz. Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm. *J. Reine Angew. Math.*, 161:201–207, 1929. 264, 265

[Sch30] F. K. Schmidt. Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen. *J. Reine Angew. Math.*, 162:155–168, 1930. 291

[Sch34] A. Scholz. Lösung der Aufgabe 171. Vierte Lösung. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 45(2.Teil):42, 1934. 376

[Sch36] H. L. Schmid. Zyklische algebraische Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p. *J. reine angew. Math.*, 175:108–123, 1936. 211

[Sch63] B. Schoeneberg. Emil Artin zum Gedächtnis (1898-1962). *Math.-Phys. Semesterber., N. F.*, 10:1–10, 1963. 31

[Sch87] N. Schappacher. Das mathematische Institut der Universität Göttingen 1929–1950. In Heinrich Becker and andere, editors, *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus.*, pages 345–373. K. G. Saur, 1987. 22

[Seg03] S. L. Segal. *Mathematicians under the Nazis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xxii, 530 p. 22

[Ser60] J. P. Serre. Sur la rationalité des représentations d'artin. *Ann. Math.*, 72:405–420, 1960. 324

[Ser61] J. P. Serre. Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. *Bull. Soc. Math. France*, 89:105–154, 1961. 355

[Ser62] J. P. Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1962. 243 p. 353, 355

[Ser70] J. P. Serre. Sur une question d'Olga Taussky. *J. Number Theory*, 2:234–236, 1970. 222

[Sha51] I. Shafarevic. Das allgemeine Reziprozitätsgesetz. *Mat. Sbornik, n.S.*, 26(68):113–146, 1951. Russisch. 212

[Sha56] I. Shafarevic. A general reciprocity law. *American Math. Soc. Translations, Series 2*, 4:73–106, 1956. Translated by Emma Lehmer. 212

[SL96] P. Stevenhagen and H. W. Lenstra. Chebotarëv and his density theorem. *Math. Intelligencer*, 18(2):26–37, 1996. 146

[Spe16] A. Speiser. Gruppendeterminante und Körperdiskriminante. *Math. Ann.*, 77:546–562, 1916. 351

[Spe19] A. Speiser. Die Zerlegungsgruppe. *J. Reine Angew. Math.*, 149:174–188, 1919. 346, 349, 350

[Spe27] A. Speiser. *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf*

die Kristallographie. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungsgebiete Bd. 5. J. Springer, Berlin, second edition, 1927. IX + 251 S. mit 38 Abb. 364

[SS31] O. Schreier and E. Sperner. *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra. Bd. I.*, volume 10 of *Hamburger mathematatische Einzelschriften.* Teubner, Leipzig, 1931. 238 p. 373

[ST34] A. Scholz and O. Taussky. Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär quadratischer Zahlkörper. *J. Reine Angew. Math.*, 171:19–41, 1934. 224, 266

[Ste03] P. Stevenhagen. The correction factor in Artin's primitive root conjecture. *J. Théor. Nombres Bordeaux.*, 15(1):283–391, 2003. 248

[Sug33] M. Sugawara. On the so-called Kronecker's dream in young days. *Proc. Phys.-Math. Japan (3)*, 15:99–107, 1933. 105

[Sug36a] M. Sugawara. Zur Theorie der komplexen Multiplikation. I. *J. Reine Angew. Math.*, 174:189–191, 1936. 105

[Sug36b] M. Sugawara. Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II. *J. Reine Angew. Math.*, 175:65–68, 1936. 105

[Suz91] H. Suzuki. A generalization of Hilbert's Theorem 94. *Nagoya Math. J.*, 121:161–169, 1991. 270

[Tak20] T. Takagi. Über eine Theorie des relativ abelschen Zahlkörpers. *J. College of Science, Imp. Univ. of Tokyo.*, 41:1–133, 1920. In Collected Papers, 13., pp. 73–167. 13, 50, 131

[Tak22] T. Takagi. Über das Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. *J. College of Science, Imp. Univ. of Tokyo.*, 44:1–50, 1922. In Collected Papers, 17., pp. 179–216. 12, 14, 89, 129, 131, 136, 163

[Tat67] J. Tate. Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions. In J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory.*, chapter XV, pages 305–347. Academic Press, New York, 1967. Nachdruck der Dissertation 1949. 300, 301, 322

[Tau31] O. Taussky. Eine Verschärfung des Hauptidealsatzes. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 40:29–30, 1931. (2.Abteilung). 338

[Tau32] O. Taussky. Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes. *J. Reine Angew. Math.*, 168:193–210, 1932. 271, 337, 338

[Tau37] O. Taussky. A remark on the class field tower. *J. London Math. Soc.*, 12:82–85, 1937. 222

[Tau58] O. Taussky. Research problem 9. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:124, 1958. 222

[Tau81] O. Taussky. My personal recollections of Emmy Noether. In J. W. Brewer and M. K. Smith, editors, *Emmy Noether. A tribute to her life and work.*, pages 79–92. M. Dekker, New York, 1981. 199, 337

[Ter54] F. Terada. Complex multiplication and principal ideal theorem. *Tôhoku Math. J. II.Ser.*, 6:21–25, 1954. 448

[Tsc24] N. Tschebotareff. Eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Satzes mit Anwendung auf die Betrachtung der Körperidealklassen. *Ber. wiss. Forsch. Inst. Odessa*, 1(4):17–20, 1924. 179, 180

[Tsc29] N. Tschebotareff. Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers. *J. Reine Angew. Math.*, 161:179–193, 1929. 181

[Tsc50] N. G. Tschebotareff. *Gesammelte Abhandlungen*, volume 3. Verlag d. Akad. d. Wissenschaften, Moskau, 1950. 171 S., Russisch. 111, 112, 113

[Ull00] P. Ullrich. Emil Artins unveröffentlichte Verallgemeinerung seiner Dissertation. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19:173–194, 2000. 448

[vdW29a] B. L. van der Waerden. Zur Idealtheorie der ganz-abgeschlossenen Ringe. *Math. Ann.*, 101:309–311, 1929. 292

[vdW29b] B. L. van der Waerden. Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen. *Math. Ann.*, 101:293–308, 1929. 292

[vdW31] B. L. van der Waerden. *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete Bd. 24. Springer, Berlin, 1931. VII + 216 S. 292, 294

[vdW34] B. L. van der Waerden. Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems. *J. Reine Angew. Math.*, 171:1–3, 1934. 149

[vdW75] B. L. van der Waerden. On the sources of my book Moderne Algebra. *Historia Math.*, 2:11–40, 1975. 112, 128, 292

[Web97] H. Weber. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Zweite Abhandlung. *Math. Ann.*, 49:83–100, 1897. 392

[Web98] H. Weber. *Lehrbuch der Algebra. Erster Band.* Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1898. 376

[Wei48] A. Weil. *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisent.*, volume 1048 of *Actualités scientifiques et industrielles.* Hermann & Cie, Paris, 1948. 85 p. 247

[Wes08] E. A. Western. An extension of Eisenstein's law of reciprocity, I, II. *Proc. London Math. Society (2)*, 6:16–28, 265–297, 1908. 130, 153

[Win01] K. Wingberg. Das Klassenkörperturm-Problem. *Proceedings of the Berlin Mathematical Society.*, 1997–2000:180–193, 2001. 224

[Wit36] E. Witt. Bemerkungen zum Beweis des Hauptidealsatzes von S. Iyanaga. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 11:221, 1936. 201

[Wit37] E. Witt. Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p. *J. Reine Angew. Math.*, 176:126–140, 1937. 211

[Wit54] E. Witt. Verlagerung von Gruppen und Hauptidealsatz. In *Proc. ICM 1954*, volume 2, pages 71–73, Amsterdam, 1954. International Mathematical Union, North-Holland. 201

[Wit83] E. Witt. Vorstellungsbericht. *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.*, 1983:100–101, 1983. 400

[Wuß06] H. Wußing. Zur Emigration von Emil Artin. *Festschrift für Menso Folkerts*, 2006. 22

[Yan02] B. H. Yandell. *The Honors Class. Hilbert's problems and their solvers.* A. K. Peters, Natick, Mass., 2002. xi, 486 S. 11, 382

[Zas34] H. Zassenhaus. Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 10:106–108, 1934. 255

[Zas37] H. Zassenhaus. *Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd. 1.*, volume 21 of *Hamburg. Math. Einzelschriften.* B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1937. VI, 152 S. 200, 255

[Zas64] H. Zassenhaus. Emil Artin, his life and his work. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 5:1–9, 1964. 24

Abbildungsverzeichnis

This book contains the full text of the letters from Emil Artin to Helmut Hasse, as they are preserved in the Handschriftenabteilung of the Göttingen University Library. There are 49 such letters, written in the years 1923–1934, discussing mathematical problems of the time. The corresponding letters in the other direction, i.e., from Hasse to Artin, seem to be lost. We have supplemented Artin's letters by detailed comments, combined with a description of the mathematical environment of Hasse and Artin, and of the relevant literature. In this way it has become possible to sufficiently reconstruct the content of the corresponding letters from Hasse to Artin too.

Artin and Hasse were among those who shaped modern algebraic number theory, in particular class field theory. Their correspondence admits a view of the ideas which led to the great achievements of their time, starting from Artin's L-series and his reciprocity law towards Hasse's norm symbol, local class field theory and the Local-Global Principle.

These letters are a valuable source for understanding the rise and development of mathematical ideas and notions as we see them today. The book is a follow-up of our earlier book on the correspondence between Hasse and Emmy Noether. It is thus the second of a series which aims to open access to the rich collection of Hasse's mathematical letters and notes contained in the Göttingen Handschriftenabteilung.



ISBN 978-3-940344-50-2

Universitätsverlag Göttingen